高等学校数学教材配套辅导书

高等数学辅导

同济·高等数学

（下册配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕清
编　写　双博士高等数学课题组
总策划　胡东华

双博士文教丛书

揭开表层有防伪数码
拨16840315查询

机械工业出版社
China Machine Press

双博士精品系列

高等数学辅导

同济·高等数学

（下册配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕清
编　写　双博士高等数学课题组
总策划　胡东华

机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导,下册/邹本腾等主编. -北京:机械工业出版社,2002.9
(高等学校数学教材配套辅导丛书)
ISBN 7-111-03149-0
Ⅰ.高... Ⅱ.邹... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 070546 号
机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)
责任编辑:荆宏智 责任校对:郝峥嵘
封面设计:蒲菊祥 责任印制:何全君
中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2002 年 9 月第 1 版 第 1 次印刷
850mm×1168mm 1/32·11.25 印张·384 千字
定价:11.00 元

前　言

高等数学是理工科院校一门重要的基础学科，在现行教学领域越来越突出地表现出：一、授课时间减少，学生不能完全充分掌握该学科的本质内涵；二、各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。学生在校期间如何全面透彻掌握这一基础学科，如何衔接理顺该学科在考研中的关于，基于对此认识，本书应运而生。

本书体例兼顾教与学的要求，细致而独到，也得到师生的赞同。该书一经出版，即好评如潮，热销全国。

本书独特的品质内涵为：在每一节的开头，用表格的形式分类列出该节的主要内容，节省了读者做同样工作的时间，这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的，在同类书中尚属首例。对于例题，作者按分类的方式编排，把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者，并加了大量的注解，把容易出现的问题指出来，使读者少走弯路。书中加 * 号的内容较难，读者可根据需要自行选择。另外，每章都有一份提纲挈领的知识网络图，还附有最近几年考研真题评析，使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解，也方便有志于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

为方便同学在不同学期学习使用，该书分上下册分别出版。

我们在书后附上 2003 年考研大纲"高等数学"各部分考点分析以及 2002 年考研数学(一)真题。在考点分析中包括常考知识点，考试要求，还包括"高等数学"各部分在历年考研题中所占的分数，为方便各类考生，按不同的数学种类单独列出。供各类考生各取所需。

在编写过程中，总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

本书属于"双博士"品牌系列丛书中的黄金品牌。

本套丛书从 2002 年起由科学技术文献出版社改为由机械工业出版社出版，其内容、用纸及印装质量在原基础上均上了一个大台阶，故称之为"双博士精品"系列。

本书采用 60 克黄色胶版纸印刷，且每印张的定价不上涨，其直接目的是以学生利益为中心，并遏制盗版。

"双博士"品牌系列丛书，以其独有的魅力和卓越的品质被誉为最受大学生欢迎的教学辅导丛书，销量居全国同类书榜首。全国约有三分之一的大学生读过或正在使用本品牌丛书(不含盗版)。本品牌丛书封面、封底都带有双博士书标，此书标已由国家商标局注册。该系列品牌丛书，在读者中已树立起不可替代的品牌形象，引起了媒介的广泛关注。中央电视台 1999 年 9 月 15 日 ~ 10 月 15 日在"99 全球财富论坛"特别节

目及《东方时空》黄金时间强档推出该品牌系列丛书，成为当时图书界传媒热点。1999年11月5日《光明日报》第9版以“图书市场面临商标竞争时代”为标题，以“胡东华系列双博士品牌文教图书引起关注”为副标题做了报道，后被多家报纸转载。《中国青年报》、《新闻出版报》、《中国文化报》、《中国教育报》和《中国大学生》等报刊对该品牌系列丛书也做了相应报道。

欢迎垂询中国教育考试网站 http://www.bbdd.cc，该网站将在2002年12月1日～2003年1月15日举行“考研押题讲座”。

双博士数学课题组
2002年9月北京

目 录

下册

第七章　多元函数及其微分学

§ 7.1　多元函数的极限与连续性

7.1.1　考试内容及理解记忆方法

表 7.1－1　基本概念

名称		定义
多元函数	变化域	变量 x、y 所能取的一切数组 (x,y) 组成平面点集，称为变量 x、y 的变化域
	二元函数	设有三个变量 x、y、z，变量 x、y 的变化域为 D，若对 D 中每一点 $P(x,y)$，依照其一一对应规则 f，变量 z 都有唯一确定的值与之对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. z 为因变量，D 为 f 的定义域
	图形	在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，对于 D 中每一点 $P(x,y)$，依函数关系 $z=f(x,y)$，就有空间中一点 M 与之对应，M 的坐标为 $(x,y,f(x,y))$. 在空间中，点 M 的全体称为函数 $z=f(x,y)$ 的图形
	多元函数	二元及二元以上的函数统称为多元函数

（续）

名称			定义
区域	距离		设 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$ 是 xy 平面上两点，M_1 与 M_2 的距离记作 $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
	邻域		在平面 xy 上固定一点 $M_0(x_0,y_0)$，所有与 M_0 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的点的集合，称为点 M_0 的 δ - 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$；点集 $\{M \mid 0<d(M,M_0)<\delta\}$ 称为 M_0 的空心邻域，记作 $U_0(x_0,\delta)$
	点集 E 是平面上点集合	内点	存在 M_0 的某一邻域 $U(M_0,\delta)$，使得 $U(M_0,\delta)\subset E$，称 M_0 为点集 E 的内点
		外点	存在 M_1 的某一邻域 $U(M_1,\delta)$，使得 $U(M_1,\delta)$ 中没有 E 中的点，则称 M_1 是点集 E 的外点
		边界点	M_2 的任何邻域中都既有 E 中的点，又有不是 E 中的点，则称 M_2 是点集 E 的边界点
	集合	开集	若点集 E 的所有点都是内点，则称 E 为开集
		闭集	若点集 E 包含它的所有边界点，则称 E 为闭集
		连通集	若点集 E 中的任意两点都可用一条完全在 E 中的折线连接起来，则称 E 为连通集
		区域	若点集 D 是连通的开集，则称 D 为区域；区域 D 的边界点的全体称为 D 的边界；区域 D 加上它的边界称为闭区域，记作 $\bar{D}$
		有界闭区域	若闭区域 $\bar{D}$ 能够被包含在以原点为圆心的某个开圆中，则称此闭区域 $\bar{D}$ 为有界闭区域

（续）

名称		定义
极限	定义 1	设二元函数 $f(M)$ 在点 M_0 的附近有定义（点 M_0 本身可能除外），若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < d(M, M_0) < \delta$ 时，恒有：$\lvert f(M) - A \rvert < \varepsilon$，则称 $f(M)$ 在 M_0 点以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$
	定义 2	$f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的附近有定义（点 M_0 本身可能除外），若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$，$\lvert y - y_0 \rvert < \delta$ 且 $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ 时，有：$\lvert f(x,y) - A \rvert < \varepsilon$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处极限为 A，记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$
连续	定义 1	设二元函数 $f(M)$ 在 M_0 点及其附近有定义，若 $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$，则称 $f(M)$ 在点 M_0 处连续
	定义 2	若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $d(M, M_0) < \delta$ 时，恒有 $\lvert f(M) - f(M_0) \rvert < \varepsilon$，或者 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，称 $f(M)$ 在点 M_0 点连续

表 7.1－2　极限的运算

若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) = B$，则

加法 减法	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \pm \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) = A \pm B$
数乘	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} Cf(x,y) = C \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = CA$，（$C$ 为常数）

（续）

乘法	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=AB$
除法	当 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)/\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=\dfrac{A}{B}$

表 7.1－3　连续函数的性质

1. 四则运算性	若二元函数 $f(M)$ 与 $g(M)$ 在点 M_0 处连续，则和、差、积、商（分母不为 0）在点 M_0 处也连续
2. 初等函数连续性	以 x、y 为自变量的二元初等函数在其定义域内是连续的
3. 复合函数	若 $f(u,v)$ 在其定义域 E 内的点 (u_0,v_0) 处连续，函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在其公共定义域 D 内点 (x_0,y_0) 处连续，且 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$，又值域 $u(D),v(D)\subset E$，则复合函数 $f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

表 7.1－4　闭区域上连续函数的性质

有界性	若 $f(M)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，则 $f(M)$ 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在正数 k，使得 $\lvert f(M)\rvert\leqslant k,\forall M\in\bar{D}$
最大、最小值	若 $f(M)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，则 $f(M)$ 在 $\bar{D}$ 上达到最大值和最小值，即存在 M_1、$M_2\in\bar{D}$，使得 $f(M_1)=\max\limits_{M\in\bar{D}}f(M)$，$f(M_2)=\min\limits_{M\in\bar{D}}f(M)$
中间值	若 $f(M)$ 在区域 D（可以不是有界闭区域）内连续，M_1、M_2 为 D 内两点，且 $f(M_1)<f(M_2)$，$\forall\mu$，满足 $f(M_1)<\mu<f(M_2)$，则在 D 内存在一点 M_0 使得 $f(M_0)=\mu$

7.1.2 典型例题解析

例 1 下面的表达式是否是 x、y 的二元函数.

$$z = \int_0^1 (x + ty)^2 \mathrm{d}t$$

解 先把 x,y 看作固定常数,对 t 积分得

$$\begin{aligned} z &= \int_0^1 (x^2 + 2xyt + y^2t^2)\mathrm{d}t \\ &= x^2t \Big|_0^1 + xyt^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{3}y^2t^3 \Big|_0^1 \\ &= x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 \end{aligned}$$

容易验证,上面的表达式 $z(x,y)$ 是(x,y)的二元函数.

例 2 求函数 $z = \arcsin(2x) + \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域.

解 $\arcsin(2x)$ 的定义域为: $|2x| \leqslant 1$

$\sqrt{4x - y^2}$ 的定义域为:$4x - y^2 \geqslant 0$

$\dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域为:$1 - x^2 - y^2 > 0$ 且 $1 - x^2 - y^2 \neq 1$.

故所求函数的定义域为

$$\begin{cases} |2x| \leqslant 1 \\ 4x - y^2 \geqslant 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ y^2 \leqslant 4x \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

注 1 一般讲,二元函数的定义域是平面上的一个区域,常用图形表示出来;二元函数 $z = f(x,y)$ 的图形是一张曲面.求复杂的多元函数的定义域也和一元函数一样,先写出构成部分的各简单函数的定义域,再解联立不等式组即得所求定义域.

例 3 已知二元函数,$F(x,y) = \dfrac{4x - y^2}{3x - 2y}$,求 $F(2,1)$,$F(1,2)$,$F(0,1)$.

解
$$F(2,1) = \frac{4x - y^2}{3x - 2y}\bigg|_{(2,1)} = \frac{8 - 1}{6 - 2} = \frac{7}{4}$$

$$F(1,2)=\left.\frac{4x-y^2}{3x-2y}\right|_{(1,2)}=\frac{4-4}{3-4}=0$$

$$F(0,1)=\left.\frac{4x-y^2}{3x-2y}\right|_{(0,1)}=\frac{1}{2}$$

例 4 设 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解 令 $u=x+y,v=\frac{y}{x}\Rightarrow x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$，则

$$f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

故 $f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}\quad(y\neq-1)$

例 5 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

证明 因为 $\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y^2|$，故 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$，当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$，且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|y^2|<\delta^2=\varepsilon$$

由极限的定义有 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

例 6 求二元函数 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ 的两个累次极限

$$\lim_{x\to0}[\lim_{y\to0}f(x,y)];\lim_{y\to0}[\lim_{x\to0}f(x,y)]$$

并比较两个累次极限的值.

解 $$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to0}-\frac{y}{y}=-1$$

显然 $$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)\neq\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)$$

注 2 上面的例题表明虽然两个单极限都存在，但累次极限不相等，故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 是不存在的. 这是证明极限不存在的方法之一. 另外也可通过下面的方法证明极限不存在. 其一是找出两条不同的路径，使得点 M 沿这两

条路径趋于定点 M_0 时，$f(x,y)$ 的极限不相等；其二是找一条特殊的路径，使得 $f(x,y)$ 的极限不存在. 看下面的例题.

例 7 证明二元函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$ 两个累次极限 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 存在且相等，但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

证明
$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}=0$$
$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}=0$$

故累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$

若换成 (x,y) 按直线 $y=kx$ 趋于 0，即
$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1+k)^2x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1+k)^2}$$

显然若 $k=0$，则极限为 0，若 $k=-1$，则极限为 1.

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

例 8 证明函数 $f(x,y)=\cos\dfrac{y}{x^2}$ 在 $(0,0)$ 点的极限不存在.

证明 特别地，取点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点，则有
$$\cos\frac{y}{x^2}=\cos\frac{1}{x}$$

而极限 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在（这是一元函数熟知的结果），故原函数在 $(0,0)$ 点极限不存在.

例 9 证明二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y}$，当点 (x,y) 沿任意直线趋于点 $(0,0)$ 时，极限都为 0，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处没有极限.

证明 对 $\forall$ 常数 k，显然

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{xy}{x^2+y}=\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{kx^2}{x^2+kx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x+k}=0$$

当沿 y 轴方向时有

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{y\to0}0=0$$

故点 (x,y) 沿任意直线趋于 $(0,0)$ 时,都有极限 0.

但 $\lim\limits_{\substack{y=-x^2+x^3\\x\to0}}f(x,y)=-1\neq0$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点没有极限.

注 3 对于一元函数,我们知道极限存在的充要条件是两个单侧极限存在且相等,但对于多元函数情况却复杂得多,其本质原因是多维区域的复杂性,只有当点 (x,y) 沿任意路径(包括任意直线、各种曲线)趋于 (x_0,y_0) 时,函数有同一极限,则称函数在 (x_0,y_0) 处有极限.这也是多元函数的极限称为全面极限的原因.

例 10 证明函数 $f(x,y)=(x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$ 两个累次极根 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在,但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

证明 当 $y\neq\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ 时, $x\to0$, 则有 $(x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$ 极限不存在,

即 $\lim\limits_{\substack{y\to0\\y\neq\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}}}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\y\neq\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}}}\lim\limits_{x\to0}(x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$ 不存在.

故累次极限不存在.同理累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 不存在.

又 $0\leqslant\left|(x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=0$.

注 4 累次极限的存在性并不能由全面极限的存在性得到.

例 11 求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$ (4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$

解 (1) 当 $xy\neq 0$ 时，令 $xy=t$，当 $(x,y)\to(0,a)$ 时，$t\to 0$，于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin(xy)}{xy}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2) 因为 $(x^2+y^2)^{xy}=\mathrm{e}^{xy\ln(x^2+y^2)}$，而

$0<|xy\ln(x^2+y^2)|\leqslant(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|$，令

$t=x^2+y^2$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$t\to 0^+$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to 0^+}t\ln t=0$

于是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\ln(x^2+y^2)=0$，因此原式 $=\mathrm{e}^0=1$

(3)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{x+y}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

(4) 当 (x,y) 沿 $x=y$ 的路径趋于无穷时，$\left|\dfrac{\sqrt{x}}{3x+2y}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{|x|}}{5x}\right|=\dfrac{1}{5\sqrt{|x|}}$.

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5\sqrt{|x|}}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y=x}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=0$

又 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y=\frac{-3}{2}x+\frac{\sqrt{|x|}}{2}}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{|x|}}{2}}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}=1$