上海新教材智能训练丛书

鹤鸣

数学精编精练

高一（下）

邵春和　王翌楠/主编

中国出版集团
東方出版中心

上海新教材智能训练丛书

鹤鸣

数学精编精练

邵春和　王翌楠/主编

高一（下）

中国出版集团
東方出版中心

图书在版编目(CIP)数据
数学精编精练. 高一.下/邵春和,王翌楠主编.
上海：东方出版中心,2006
(上海新教材智能训练丛书)
ISBN 7-80186-412-3
I. 数… II. ①邵…②王… III. 数学课-高中-
教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 000075 号

数学精编精练 高一(下)

出版发行：东方出版中心
地　　址：上海市仙霞路 345 号
电　　话：62417400
邮政编码：200336
经　　销：新华书店上海发行所
印　　刷：江苏省启东市人民印刷有限公司
开　　本：787×1092 毫米 1/16
字　　数：200 千字
印　　张：10.25
版　　次：2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-80186-412-3
全套定价：75.00 元 (共 5 册)

编 写 说 明

本书是为上海“二期课改”高中数学课本编写的辅导读物。在内容选取方面，力求突出数学教学的重点，注重对教学基本要求的阐述和对难点的解析；重视数学思想方法的学习和运用；同时，提供典型的例题和训练题，帮助学生深入理解教学的重点内容，掌握学习的基本要求和提高分析问题、解决问题的能力。

全书按课本内容的章节顺序编写，每节都由“要点梳理”、“典题释疑”、“智能训练”三个部分组成。

在“要点梳理”部分，列出本章学习的内容要目。在“典题释疑”部分，精选典型例题，先对解题思路进行分析，然后展示规范的解题过程，最后再对解题中应注意的问题以及可进一步拓展的内容加以说明。在“智能训练”部分，既有注重基础知识、基本技能训练的基础题，又有提高分析问题、解决问题能力的提高题。

在每章开始部分，均设计了“本章提要”栏目，揭示本章的主要学习内容，描述该章内容的教学基本要求。在每章最后都配备了单元练习题，分(A)(B)两组，供不同程度的学生进行自我测试。书的最后还配有期中测试题(A)(B)两套；期末测试题(A)(B)两套，以巩固以前学过的知识。书中所有的练习题、测试题均附有答案，方便学生自学。

本书内容新颖，基础扎实，辅导性强，尤其注重能力训练，是高中生学数学的好帮手，对广大教师亦有参考作用。

本书由高朋中、陈水平、邹建兵等编写。

限于水平，疏漏之处难免，敬请广大读者指正。

编者

2006 年 1 月

目　录

第 5 章　三角比

一、任意角的三角比

5.1　任意角及其度量

要点梳理

1. 角的概念的推广

角可以看作是有一条射线绕着其端点从初始位置(始边)旋转到终止位置(终边)所形成的图形.

正角:射线绕端点按逆时针方向旋转所形成的角;

负角:射线绕端点按顺时针方向旋转所形成的角;

零角:射线没有旋转时,我们认为形成的一个角.

2. 弧度制与角度制的互化

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度,1 弧度 $= (\frac{180^\circ}{\pi}) \approx 57.3^\circ$

3. 弧长与扇形面积公式

$l = |\alpha| r, S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha| r^2$

4. 终边相同的角

<table>
<tr><td>x 轴
正半轴</td><td>$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$</td><td rowspan="2">$x$
轴</td><td rowspan="2">$\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$</td><td rowspan="4">坐
标
轴</td><td rowspan="4">$\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$</td></tr>
<tr><td>x 轴
负半轴</td><td>$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$</td></tr>
<tr><td>y 轴
正半轴</td><td>$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$</td><td rowspan="2">$y$
轴</td><td rowspan="2">$\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$</td></tr>
<tr><td>y 轴
负半轴</td><td>$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$</td></tr>
</table>

所有与角终边相同的角(包括 α 角本身)的集合 $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$,或 $\{\beta \mid \beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

5. **象限角**

第一象限	$\{\alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
第二象限	$\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$
第三象限	$\{\alpha \mid 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
第四象限	$\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

当角的终边在坐标轴上时，这些角不属于任何象限.

典题释疑

例 1 角 α 在第一象限的充要条件是存在一个整数 k，使 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$；

角 α 在第二象限的充要条件是存在一个整数 k，使 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi$；

角 α 在第三象限的充要条件是存在一个整数 k，使 $2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$；

角 α 在第四象限的充要条件是存在一个整数 k，使 $2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi$.

例 2 (1) 把下列角化为 $k \cdot 360° + \alpha\ (0° \leqslant \alpha < 360°, k \in \mathbf{Z})$ 的形式，指出所在象限：$1990°$，$2440°$，$-1550°$.

(2) 把下列角化为 $2k\pi + \alpha\ (-\pi < \alpha \leqslant \pi, k \in \mathbf{Z})$ 的形式，指出所在象限：$\frac{37}{4}\pi$，$-\frac{25}{6}\pi$.

解 (1) $1990° = 5 \times 360° + 190°$，位于第三象限；

$2440° = 6 \times 360° + 280°$，位于第四象限；

$-1550° = -5 \times 360° + 250°$，位于第三象限.

(2) $\frac{37}{4}\pi = 10\pi - \frac{3}{4}\pi$，位于第三象限；

$-\frac{25}{6}\pi = -4\pi - \frac{1}{6}\pi$，位于第四象限.

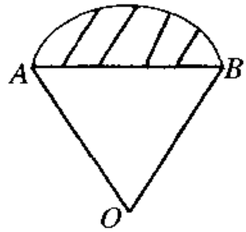
例 3 化下列角度为弧度：$210°$，$67°30'$，$54°$.

解 $210° = 7 \times 30° = 7 \times \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$；

$67°30' = \frac{135°}{2} = \frac{3 \times 45°}{2} = \frac{3\pi}{8}$；

$54° = 18° \times 3 = \frac{\pi}{10} \times 3 = \frac{3\pi}{10}$.

例 4　已知 $AB=m$，$\angle AOB=60^\circ$，求图中弓形的面积.



解　因为 $\triangle AOB$ 是正三角形，所以 $r=m$，$S_{弓}=\frac{1}{2}r^2\mid\alpha\mid-\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$
$=\frac{1}{2}m^2\,\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}m^2=(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})m^2$.

智能训练

基础题

一、选择题

1. 和 -463° 的终边相同的角可以表示为（　　）.

   A. $k360^\circ+257^\circ(k\in\mathbf{Z})$　　B. $k360^\circ+103^\circ(k\in\mathbf{Z})$

   C. $k360^\circ+463^\circ(k\in\mathbf{Z})$　　D. $k360^\circ-257^\circ(k\in\mathbf{Z})$

2. 终边在坐标轴上的角的集合是（　　）.

   A. $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha\mid\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

   C. $\{\alpha\mid\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha\mid\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}k\in\mathbf{Z}\}$

3. 扇形半径为 R，周长为 $3R$，则扇形的中心角为（　　）.

   A. 60°　　B. 1°　　C. 30°　　D. 1 弧度

4. $A=\{x\mid x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\}B=\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则满足的关系是（　　）.

   A. $A\supset B$　　B. $A\subset B$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

二、填空题

5. 在 $(-2\pi,3\pi)$ 内与 $-\frac{7\pi}{8}$ 终边相同的角为________.
6. 5 弧度是第________象限角.
7. 在半径为 2 米的圆中，120° 的圆心角所对的圆弧长为________米.
8. 时钟的分针经过 2 小时 40 分钟，它所转过的角是________度，这个角是第________角限角.
9. 设角的终边与 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边关于 y 轴对称，且 $\alpha\in(-2\pi,2\pi)$，则 α 等于________.
10. 若角 α 的终边与角 β 的终边关于 x 轴对称，则 α 与 β 的关系是________.

提高题

1. 已知 α 角的集合 $\{\alpha\mid\alpha=\beta+2k\pi,\frac{\pi}{2}<\beta<\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，写出表示 $\frac{\alpha}{2}$ 的集合，并指出 $\frac{\alpha}{2}$ 为第几象限角.

2. 已知集合 $A=\{\theta \mid \theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\theta \mid \theta=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\}$，试问 A 与 B 的关系，并在坐标系中作图示意.

3. 五边形 $ABCDE$ 的各顶点将其外接圆分成 2:3:4:5:6 五部分，求五边形 $ABCDE$ 的各内角大小.

4. 一扇形的周长为 20cm，当扇形的圆心角 α 等于多少弧度时，这扇形的面积最大？并求这扇形的最大面积.

5. 质点 M 从圆周上点 A（x 轴正半轴上）的位置开始，依逆时针方向作匀速圆周运动，已知质点 M 一分钟转过的角为 $\theta(0<\theta\leqslant\pi)$，2 分钟到达第三象限，14 分钟到达原来位置，求 θ.

5.2　任意角的三角比

要点梳理

1. **三角比的定义**

在角 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$，$r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}(r>0)$，规定：

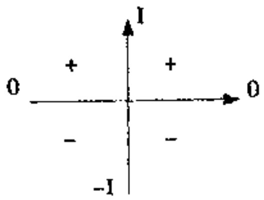
$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，　　$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，

$\tan\alpha=\frac{y}{x}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z})$，　　$\cot\alpha=\frac{x}{y}(\alpha\neq k\pi,k\in \mathbf{Z})$，

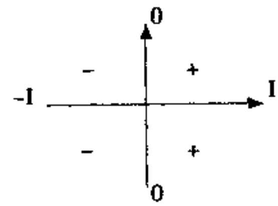
$\sec\alpha=\frac{r}{x}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z})$，　　$\csc\alpha=\frac{r}{y}(\alpha\neq k\pi,\in \mathbf{Z})$.

注意　三角比的值与角的终边的位置有关，而与终边上所取点的位置无关.

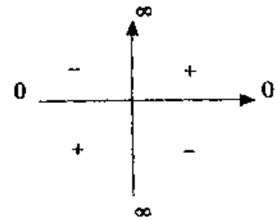
2. **当角 α 的终边变化时，正弦、余弦和正切的符号**



sinα



cosα



tanα

3. 诱导公式

角 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的三角比等于角 α 的同名三角比. 本公式可以将任意角的三角比问题转化为 $0\sim2\pi$ 间角的三角比，但反过来，两个角的某三角比值相等，不一定有角的终边相同，更不一定这两个角相等.

典题释疑

例 1 若角 α 的终边在直线 $y=-2x$ 上，求 $\csc\alpha$、$\cot\alpha$ 的值

解 α 的终边有两种可能，一条是射线 $y=-2x(x\leqslant0)$，另一条是 $y=-2x(x\geqslant0)$.

① 在 α 的终边上取点 $P(x,-2x)(x<0)$，

P 到原点 O 的距离 $r=\sqrt{x^2+(-2x)^2}=-\sqrt{5}x$，

$\therefore\quad \csc\alpha=\dfrac{r}{y}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}，\cot\alpha=\dfrac{y}{x}=-2$；

② 在 α 的终边上取点 $P(x,-2x)(x>0)$，

P 到原点 O 的距离 $r=\sqrt{x^2+(-2x)^2}=-\sqrt{5}x$，

$\therefore\quad \csc\alpha=\dfrac{r}{y}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}，\cot\alpha=\dfrac{y}{x}=-2.$

综上所述，$\csc\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\cot\alpha=-2.$

例 2 已知 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，$\sin\alpha\tan\alpha<0$，那么 $\dfrac{\alpha}{2}$、$(90°-\alpha)$ 分别是第几象限角？

解 (1) 由 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，所以 α 在二、四象限；由 $\sin\alpha\tan\alpha<0$，所以 α 在二、三象限. 因此 α 为第二象限的角，即

$90°+k360°<\alpha<180°+k360°(k\in\mathbf{Z})$，

$45°+k180°<\dfrac{\alpha}{2}<90°+k180°(k\in\mathbf{Z})$.

当 k 为偶数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第一象限角，当 k 为奇数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第三象限角；

所以 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或是第三象限角.

(2) 因为 $90°+k\cdot360°<\alpha<180°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $-180°-k360°<-\alpha<-90°-k360°(k\in\mathbf{Z})$，

故 $-90°-k360°<90°-\alpha<-k360°(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $90°-\alpha$ 是第四象限的角.

例 3 求值.

(1) $\sin420^\circ-\cos750^\circ+\tan(-315^\circ)+\sin540^\circ$;

(2) $\cos(-\frac{11}{3}\pi)+2\sin\frac{19}{3}\pi-3\tan\frac{13}{6}\pi+\cot\frac{17}{4}\pi$.

解 (1) 原式 $=\sin(360^\circ+60^\circ)-\cos(720^\circ+30^\circ)+\tan(-360^\circ+45^\circ)+\sin(360^\circ+180^\circ)$

$$=\sin60^\circ-\cos30^\circ+\tan45^\circ+\sin180^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+0=1.$$

(2) 原式 $=\cos(-4\pi+\frac{\pi}{3})+2\sin(6\pi+\frac{\pi}{3})-3\tan(2\pi+\frac{\pi}{6})+\cot(4\pi+\frac{\pi}{4})$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3}-3\tan\frac{\pi}{6}+\cot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1=\frac{3}{2}.$$

智能训练

基础题

一、选择题

1. 给出下列各函数值

①$\sin(-1000^\circ)$; ②$\cos(-2200^\circ)$;

③$\tan(-10)$; ④$\sin\frac{7\pi}{10}\times\cos\pi\cot\frac{17\pi}{9}$.

其中符号为负的有( ).

A. ① B. ② C. ③ D. ④

2. 设 θ 是三角形的内角,下列各对数中均取正值的是( ).

A. $\sin\theta$ 和 $\sec\theta$ B. $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ C. $\tan\theta$ 和 $\cos\theta$ D. $\sin\theta$ 和 $\cos\frac{\theta}{2}$

3. 已知 $\tan\alpha\cos\alpha>0$,$\frac{\sin\alpha}{\cot\alpha}<0$,则 α 是( ).

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

4. 设 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,那么下列的点在角 α 的终边上的是( ).

A. $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ B. $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ C. $(4,-3)$ D. $(3,-4)$

5. 若角 600° 的终边上有一点 $(-4,a)$,则 a 的值是( ).

A. $4\sqrt{3}$ B. $-4\sqrt{3}$ C. $\pm4\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

二、填空题

6. 若 $|\sin x|=\sin x$,则角 x 的集合是________.

7. 若 $|\cot x|=-\cot x$,则角 x 的集合是________.

8. $\tan\pi+\cos\frac{\pi}{2}-\sin\pi+\cos\frac{3\pi}{2}+\sin 2\pi$ ________.

9. 式子 $x^2\sin(-1350^\circ)+y^2\tan405^\circ-(x-y)^2\cot765^\circ-2xy\cos(-1080^\circ)$ 的值为________.

10. 已知角 α 终边上一点 $P(5,n)$ 且 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，求 α 的其余三角比.

11. 已知角 α 终边在第二象限，且与直线 $y=-3x$ 重合，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 之值.

12. 已知 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$，且 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})>0$，求角 α 的取值范围.

提高题

一、填空题

1. 若 α 为第二象限角，那么 $\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cot\frac{\alpha}{2}$ 中必定取正值的有________.

2. 函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是________.

3. 若角 α 属于第二象限，且 $|\cos\frac{\alpha}{2}|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则$\frac{\alpha}{2}$ 角属于第________象限的角.

4. 已知角 α 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq0)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=$ ________.

5. 已知角 α 的终边与函数 $5x+12y=0$ 决定的函数图像重合，$\cos\alpha+\cot\alpha-\csc\alpha$ 的值为________.

二、解答题

6. 已知 β 的终边经过点 $P(-3\cos\alpha,4\cos\alpha)$，其中角 α 属于第二象限，求角 β 的各三角函数值.

7. 求下列各式的值.

(1) $\cos390^\circ+\sin2550^\circ+\tan180^\circ+\cot270^\circ$

(2) $\sin(-\frac{7\pi}{6})+\cos\frac{12\pi}{5}\tan4\pi+\sec\frac{10\pi}{3}$

8. 角 α 的终边上的点 P 与 $A(a,b)$ 关于 x 轴对称($ab \neq 0$),角 β 的终边上的点 Q 与 A 关于直线 $y=x$ 对称,求 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}$ 之值.

9. 已知集合 $A=\{x \mid \log_{\frac{1}{2}}|x|>-1\}$,$B\{x \mid \tan x \geqslant 0\}$,求 $A \cap B$.

10. 已知 α 为锐角,试证:$1<\sin\alpha+\cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$.

二、三角恒等式

5.3 同角三角比的关系和诱导公式

要点梳理

知识要点

1. 同角三角比的基本关系

(1) 倒数关系:$\sin\alpha\csc\alpha=1$,$\cos\alpha\sec\alpha=1$,$\tan\alpha\cot\alpha=1$

(2) 商数关系:$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(3) 平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$,$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

说明 上述关系式的主要应用有

(1) 已知某角的一个三角比值,求其他的三角比值;

(2) 化简三角比式;

(3) 证明三角恒等式.

2. 诱导公式

(1) $2k\pi+\alpha$,$-\alpha$,$\pi\pm\alpha$,$2\pi-\alpha$ 的三角比值等于 α 的同名三角比值,其符号是把 α 看作锐角时,原来的三角比在相应象限内的符号.

(2) $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$,$\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ 的三角比值等于 α 的异名三角比值,其符号同样如(1)所述.

说明 (1) 诱导公式可简记为"奇变偶不变,符号看象限".

(2) 利用诱导公式,可以把任意的三角比化为锐角三角比.

典题释疑

例 1 填空题:

(1) 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$,则 $\cos(2\pi-\alpha)$ ________,$\tan(\alpha-7\pi)=$ ________.

解 由已知得 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,α 在第一或第二象限,

$\therefore$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan(\alpha-7\pi)=\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2) 已知 $\cot\alpha=m(m\neq 0)$,则 $\cos\alpha=$ ________,若 α 在第________象限时,则 $\csc\alpha=-\sqrt{m^2+1}$.

解 $\because$ $\csc^2\alpha=1+\cot^2\alpha=1+m^2$,$\csc\alpha=\pm\sqrt{1+m^2}$,当 α 在第一、二象限时取"+"号,当 α 在第三、四象限时取"—"号,$\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,$\cos\alpha=\cot\alpha\cdot\sin\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$,$\therefore$ α 在第三、四象限时,$\csc\alpha=-\sqrt{m^2+1}$.

(3) 已知 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$,则 $\cos\theta-\sin\theta$ 的值是________.

解 $\because$ $-2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\therefore$ $(\cos\theta-\sin\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

则 $\cos\theta-\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

注 $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm 2\sin\theta\cos\theta$ 在本例中的应用.

例 2 化简下列各式

(1) $\sqrt{\sec^2 40^\circ+2\tan(-40^\circ)}-\sin 140^\circ\sec 220^\circ$.

解 原式 $=\sqrt{\tan^2 40^\circ+2\tan(-40^\circ)+1}+\sin 40^\circ\sec 40^\circ$

$=|\tan 40^\circ-1|+\tan 40^\circ=1-\tan 40^\circ+\tan 40^\circ=1$.

(2) $(1+\cot\alpha-\csc\alpha)(1+\tan\alpha+\sec\alpha)$.

解 原式 $=(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha})(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha})$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}[(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1]$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}(2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=2.$$

(3) $\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}$.

解 原式 $=\frac{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}$

$$= \frac{1-[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha]}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1-1+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 3.$$

注 本例在解题过程中注意到了乘法公式、配方法的应用，对于 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 而言这种技巧更是常用.

例 3 已知 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$，求证：$\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{2}\sin\alpha$.

证明 由已知得 $\cot\alpha = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$，

$\because$ $\cot^2\alpha+1 = \left(\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)^2+1$，

$\therefore$ $\csc^2\alpha = \dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta+1-2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{2}{1-2\sin\theta\cos\theta}$，

则 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{2}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$，

即 $(\sin\theta-\cos\theta)^2 = 2\sin^2\alpha$，

$\therefore$ $\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{2}\sin\alpha$.

例 4 已知 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，求 $\dfrac{\sin(-\alpha-\frac{3}{2}\pi)\sin(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\tan^2\alpha}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cot(\pi-\alpha)}$ 的值.

解 由一元二次方程得 $x_1=2, x_2=-\dfrac{3}{5}$，$\because -1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$，$\therefore$ $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

又 $\because$ 原式 $= \dfrac{\cos\alpha(-\cos\alpha)\tan^2\alpha}{\sin\alpha(-\sin\alpha)(-\cot\alpha)} = \dfrac{-\cos^2\alpha\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = -\tan\alpha$，

$\therefore$ 由 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，可知 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$ α 为第三象限时，原式 $=-\dfrac{3}{4}$；α 为第四象限时，原式 $=\dfrac{3}{4}$.

例 5 设 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且满足关系式 $\log_{\tan\theta}\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，求 $\log_{\csc^2\theta}(\frac{1}{2}\sin 2\theta)$ 的值.

解 $\because$ $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\therefore$ θ 的各个三角比值均为正.

又 $\because$ $\log_{\tan\theta}\cos\theta = \dfrac{\lg\cos\theta}{\lg\sin\theta-\lg\cos\theta} = \dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\lg\sin\theta}{\lg\cos\theta}=\dfrac{5}{2}$，

即 $\log_{\cos\theta}\sin\theta=\dfrac{5}{2}$，

则 $\log_{\csc^2\theta}(\frac{1}{2}\sin 2\theta) = -\log_{\sin^2\theta}(\sin\theta\cos\theta) = -\dfrac{1}{2}[\log_{\sin\theta}\sin\theta+\log_{\sin\theta}\cos\theta]$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{10}.$$

智能训练

基础题

一、选择题

1. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(\pi,2\pi)$，则 $\tan\alpha$ 的值是(　　).

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{4}{3}$　　C. $\pm\dfrac{4}{3}$　　D. $\pm\dfrac{3}{4}$

2. 若 α 为第四象限的角，则 $\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\dfrac{2\cot\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$ 的值为(　　).

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

3. 下列各式中正确的是(　　).

A. $\cot3(-\alpha-\pi)=\cos3\alpha$　　B. $\sin(\alpha-3\pi)=\sin\alpha$

C. $\sec(3\pi-\alpha)=\dfrac{1}{\cos\alpha}$　　D. $-\cot(5\pi-2\alpha)=\cot2\alpha$

4. $f(\tan x)=\cot3x$，则 $f(\cot2003^\circ)$ 的值是(　　).

A. $\cot21^\circ$　　B. $\tan21^\circ$　　C. $-\cot21^\circ$　　D. $-\tan21^\circ$

二、填空题

5. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，$\pi<\alpha<2\pi$，则 $\sin\alpha=$ ________，$\cos\alpha=$ ________.

6. 已知，$\cos\alpha=m$，$0<|m|\leqslant1$，则 $\sin\alpha=$ ________，$\tan\alpha=$ ________.

7. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha=$ ________，$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=$ ________.

8. 若 A、B、C 为三角形的三内角，则其中正确的序号是________.

(1) $\sin(A+B)=\sin C$　　(2) $\cos(A+B)=\cos C$

(3) $\sin(\dfrac{\pi-A}{4})=\cos(\dfrac{\pi+A}{4})$　　(4) $\tan(\dfrac{A+B}{2})=\cot\dfrac{C}{2}$

三、化简题

9. $\dfrac{\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}$.

10. $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cot(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha)\cot(\pi-\alpha)}{\sin(-\dfrac{3}{2}\pi+\alpha)\cot(\pi+\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}$.