非线性控制系统理论基础

李殿璞 编著

哈尔滨工程大学出版社

（工科院校博士研究生“十五”规划教材）

非线性控制系统理论基础

李殿璞　编著

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统理论基础/李殿璞编著.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2006
ISBN 7-81073-862-3

Ⅰ.非… Ⅱ.李… Ⅲ.非线性控制系统—理论—研究生—教材 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072955 号

内容简介

本书介绍了非线性系统理论。非线性系统理论与线性系统理论相平行、相对应,但更具一般性。非线性系统理论建立在状态空间分析方法的基础上,所使用的主要数学工具是微分几何。微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效的和强有力的工具。本书内容由浅入深,概念清晰,理论严谨,深度适当,体系相对完整,侧重于系统地介绍基础理论,同时也兼顾实际应用。书中后一部分,从工程实用角度,深入地、仔细地分析了一些有通用性的实例,包括电机系统、单机和多机电力系统、机械手系统、飞行器系统(潜器和水下机器人系统)等。

本书是供研究生用的非线性几何理论的入门书,主要面向初涉足非线性理论领域的读者,为进一步提高和深入研究提供理论基础。

本书可作为工科院校相关学科博士研究生和硕士研究生的教材,也可供相关学科的科技工作者参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市东大直街124号
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 20.75 字数 499 千字
2006年9月第1版
印数:1—1 000 册
定价:30.00 元

前　言

本教材系普通高等教育“十五”规划研究生重点教材。与线性系统理论相对应，本书的内容是非线性系统理论。和线性系统理论一样，非线性系统理论建立在状态空间分析方法的基础上。非线性系统理论所使用的主要数学工具是微分几何。微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效和强有力的工具，正如拉氏变换、复变函数理论和线性代数对于早期和近代的线性系统理论一样。鉴于微分几何方法对于研究非线性系统理论的重要性，和至今尚缺少一本研究生所需要的非线性几何理论的入门教材的现状，为此提供一本由浅入深，概念清晰，理论严谨，侧重于系统地介绍基础理论，同时也兼顾实际应用，深度适当，体系相对完整的教材是十分必要的。同时也要能适应读者进一步进修提高和深入研究的需要，有助于提高读者文献阅读能力，及有助于初涉非线性理论领域的其它方面的广大读者进行自学的需要。本书就是为适应这一需要而奉献给广大研究生和相关领域的科技工作者朋友的。

本书大体上分为四部分。第 1 章至第 5 章是微分拓扑和微分几何基本概念和数学基础，重点介绍切向量、对偶向量、切空间、对偶空间、向量场、对偶向量场、李导数、李积、李括号、李代数、不变分布、不变最小分布等基本概念；第 6 章至第 10 章讨论非线性控制系统的基本性质，给出非线性系统能控性、能观测性、可积性和基于这些性质的系统能控和能观性分解，包括局部分解、全局分解和输入输出解耦；第 11 章至第 19 章是单入单出非线性系统的精确线性化理论，包括非线性系统坐标变换、相对阶、状态反馈理论、零动态、系统渐近稳定性分析、扰动解耦和前馈控制、状态观测器理论，并给出了若干工业控制应用实例；第 20 章至第 24 章是多入多出非线性系统的精确线性化理论，把前面的第 11 章至第 19 章的内容扩展至多入多出非线性系统，给出了潜器、飞行器姿态控制和电力系统励磁、多杆件机械手等方面的多入多出非线性系统工业控制应用实例。上述四个部分还可以进一步概括为两大部分，即第 1 章至第 10 章的基础理论部分和第 11 章至第 24 章的实用部分。全书构成基本完整的体系。

本教材可根据教学要求选择不同的教学实施方案。理论和实用全面完整的教学实施约需 54 至 72 学时。讲授次序是第 1 章至第 24 章，也可适当省去一些章节，有些章节可以课后阅读。侧重理论的教学实施可省去第 15 章至第 19 章和第 22 章至第 24 章的内容。侧重应用的教学实施可省去第 5 章、第 6 章的 6.2 节和 6.3 节以及第 8 章至第 10 章的内容。以上两教学实施方案约需 54 学时。理论和实用兼顾的一般要求的基础教学可只讲授第 1 章至第 4 章、第 6 章的 6.1 节和 6.4 节、第 7 章、第 11 章至第 14 章、第 19 章至第 21 章，约需 36 学时。

哈尔滨工业大学赵长安教授对本书原稿进行了认真的审阅，提出了一些很有价值和切实的改进意见，在此表示深切的谢意。本书的出版得到了刘胜、彭侠夫同志和研究生院各位领导同志的大力支持，也得到了全国高校教材委员会编审组同志的积极协助，谨此致谢！

由于编著者的学识所限，写作时间紧迫，难免有差错和不当之处，尚请读者批评指正，不

吝赐教。

说明：本书中矩阵、向量俯拾皆是，考虑到版面的美观性和读者的层次水平，以不采用黑体表示为宜，故直接使用白体。

编著者

2005年12月

目　　录

第 1 章　切向量和对偶向量

本章介绍微分拓扑和微分几何的一些基本知识和基本概念。前两节讲述光滑流形、光滑映射、切向量、切空间、对偶向量、对偶空间、正交对偶向量、全微分对偶向量、零化子等概念。1.3 节重点介绍切向量映射和对偶向量映射的定义和有关映射公式，后者包括切向量映射的局部坐标表示和向量表示、对偶向量映射的局部坐标表示和向量表示。本书第 1 章至第 5 章为后续各章提供数学基础。

1.1　切向量和切空间

1.1.1　切向量

在定义切向量之前，让我们先给出光滑函数的定义。

定义 1.1　设 A 是 R^n 的一个开子集，$f: A \to R$ 是一个函数。f 在点 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in A$ 的值记为 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$。如果 f 对 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数 f 是 C^∞ **类函数**(function of class C^∞)，简称 f 是 C^∞ 的或 f 是**光滑函数**(smooth function)。如果函数 f 是 C^∞ 的，且对每点 $x^0\in A$，存在 x^0 的一个邻域 U，使对所有 $x\in U$，f 在 x^0 的 Taylor 级数展开式都收敛到 $f(x)$，则称 f 是 C^ω 的或 f 是**解析函数**(analytic function)。

定义 1.2　一流形 N 上有定义的所有光滑函数的集合，记为 $C^\infty(N)$。在流形 N 上一点 p 邻域有定义的所有光滑函数的集合，记为 $C^\infty(p)$。

定义 1.3　设 N 是一个 n 维光滑子流形，$C^\infty(p)$ 是在 N 上 p 点有定义的光滑函数集合，$v: C^\infty(p)\to R$ 是定义在 $C^\infty(p)$ 上的泛函(算子)，v 有下列性质(也称求导性质)。

1. 线性性

$$\begin{aligned} v(\lambda+\gamma)&=v(\lambda)+v(\gamma) \qquad \forall\lambda,\gamma\in C^\infty(p) \\ v(a\lambda)&=av(\lambda) \qquad \forall a\in R,\lambda\in C^\infty(p) \end{aligned} \tag{1-1}$$

2. 符合 Leibnitz 规则

$$v(\lambda\gamma)=\gamma(p)v(\lambda)+\lambda(p)v(\gamma) \tag{1-2}$$

则称 v 是 N 在某点 p 的一个**切向量**(tangent vector)。

下面对定义 1.1 至 1.3 作一些概念性说明。

1. **流形**是拓扑学和微分几何中的重要概念。不过，为不涉及过多的数学基础，此处不准备作严格的定义。从概念上说，n 维流形可理解为由多个同为 n 维的曲面(或超曲面)经拼接所得到的曲面(或超曲面)。

2. 流形的一个特征，是它的各局域可以与 n 维欧氏空间之间建立起点与点间的一对一映射关系，并可据此建立起适用于各局部的流形局部坐标系。

3. 具有微分结构的流形被称为**微分流形**。这种微分结构，是指参与拼接的曲面(或超曲面)彼此拼接得是如此之好，以至于流形作为一整体与 n 维欧氏空间之间的映射能达到任意次可微的程度，即达到光滑的程度。因此微分流形也称为**光滑流形**或简称**流形**。微分流形可理解为是由多个同为 n 维的光滑曲面(或超曲面)经拼接所得到的光滑曲面(或超曲面)，也就是有任意阶导数的 n 维曲面(或超曲面)。

4. 定义在流形 N 上的光滑函数 $\lambda(p)$ 就是定义在流形 N 的局部坐标系上的函数，其各阶导数都存在。

5. 光滑函数 $\lambda(p)$ 在某方向上的变化率，一般称为**方向导数**。方向导数取值是一实数。算子 v 表示求方向导数的操作，故其映射关系可表示为 $v: C^{\infty}(p) \to R$。

6. 求导的方向在函数 $\lambda(p)$ 的定义域上表示，即指的是流形局部坐标平面(或超平面)上定的方向，而不是指在 $\lambda(p)$ 曲面的切平面(或超平面)上定的方向。

切向量和方向导数有密切关系，但这是两个不同的概念。切向量被定义为一个抽象的泛函(算子)，是 $C^{\infty}(p)$ 至欧氏空间 R 的一个映射，而方向导数则是该映射的像值。下面用一个例子做具体的解释。

例 1.1 (流形 R^n 上的切向量)设 $\lambda(x)$ 是定义在 R^n 上的 C^{∞}(光滑)函数，$\lambda(x)$ 在点 x 的方向导数(即 $\lambda(x)$ 在指定方向上的变化率)定义为

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)_x \tag{1-3}$$

式中，v_i 是表方向的系数。如果把式(1-3)改写成

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)_x &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x\right)\lambda(x_1,\cdots,x_n) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \lambda(x_1,\cdots,x_n) = v(\lambda(x))\end{aligned} \tag{1-4}$$

$$\underbrace{\text{切向量的基底}\quad\text{方向向量}\quad\text{光滑函数}}_{\text{切向量}}$$

可见方向导数可拆成三部分。方向导数的前面两部分，即切向量的基底和方向向量称为切向量。此切向量完全符合式(1-1)和式(1-2)的切向量定义。

方向的表示方法一般有两种。一种是用方向余弦向量 $[\cos\alpha_1 \cdots \cos\alpha_n]^{\mathrm{T}}$，另一种是用方向数向量 $[v_1 \cdots v_n]^{\mathrm{T}}$。切向量的方向一般都用后一种表示。方向数向量归一化后，等于方向余弦向量。也可以说方向数向量等于方向余弦向量外乘一个常数。该常数表示向量的长度或大小。所以通常所说的方向向量不仅指方向，还包括其长度。切向量的方向和大小都是点的函数。在不同点上，不仅方向可能不同，外乘的常数(向量的长度)也可能不同。

此外，还应特别提请读者注意的是，在后续章节中，在很多情况下，可能只谈方向，不问基底。这时谈及的切向量往往是专指方向向量。

1.1.2 切空间

定义 1.4 子流形 N 上定义在 p 点的所有切向量 v 的集合，记为 T_pN。

有必要再次向读者强调，p 点是在流形的局部坐标平面(或超平面)上，而不是在函数

$\lambda(p)$的切平面(或超切平面)上。各切向量 v 是指在流形的局部坐标平面(或超平面)上的切向量,而不是指 $\lambda(p)$的切平面(或超切平面)上的切向量。

定义 1.5 在集合 T_pN 上定义"加"和"数乘"运算为

$$\begin{aligned}(v_{\mathrm{I}}+v_{\mathrm{II}})(\lambda)&=v_{\mathrm{I}}(\lambda)+v_{\mathrm{II}}(\lambda) \qquad \forall v_{\mathrm{I}},v_{\mathrm{II}}\in T_pN\\ (av_{\mathrm{I}})(\lambda)&=av_{\mathrm{I}}(\lambda) \qquad \forall a\in R \quad \forall v_{\mathrm{I}}\in T_pN\end{aligned} \tag{1-5}$$

定义两种运算之后,就构成了线性空间 T_pN,称它为 N 上 p 点的**切空间**(tangent space)。

定义 1.6 $\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right|_p$ 被称为切空间 T_pN 的一组**基底**(bases)。

在此基底下,切空间 T_pN 中的切向量可一般地表示为

$$v=v_1\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right|_p+\cdots+v_n\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right|_p=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\ \cdots\ \frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)_p\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix} \tag{1-6}$$

在定义 1.6 中,$(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$表示流形 N 上 p 点附近的局部坐标。如上面强调的,切空间自然处于流形局部坐标平面(或超平面)上,而不是在函数 $\lambda(p)$的切平面(或超平面)上。

1.2 对偶向量和对偶空间

1.2.1 切向量的对偶向量

定义 1.7 T_pN 是一个 n 维线性空间,在此空间上定义一个实线性泛函(算子)

$$v^*:T_p\to R$$

线性是指它满足

$$v^*(av_a+bv_b)=av^*(v_a)+bv^*(v_b) \qquad \forall v_a,v_b\in T_pN \quad \forall a,b\in R \tag{1-7}$$

此v^*被称为(空间 T_pN 中所有切向量的)**对偶向量**(covector)。

按此定义,所谓对偶向量,就是能使一个 n 维切向量变换为一个实数的同维向量。这里读者会想到两个同维向量做点积可以得到一个实数的事实,所以对偶向量可理解为所有能与切向量做点积的同维向量。

1.2.2 切空间的对偶空间

定义 1.8 子流形 N 上 p 点有定义的所有对偶向量的集合记为 T_p^*。

定义 1.9 在集合 T_p^* 上定义"加"和"数乘"运算:

$$\begin{aligned}(v_1^*+v_2^*)(v)&=v_1^*(v)+v_2^*(v) \qquad \forall v_1^*,v_2^*\in T_p^*\\ (av_1^*)(v)&=av_1^*(v) \qquad \forall a\in R,\forall v_1^*\in T_p^*\end{aligned} \tag{1-8}$$

定义两种运算之后,构成了实线性空间 T_p^*N,称它为 N 上 p 点切空间 T_p 的**对偶空间**(cotangent space)。

1.2.3 对偶空间的基底

定理 1.1 n 维切空间 T_p 的线性对偶空间 T_p^* 是n 维的。

此定理的成立是显然的，如不同维，则在任何情况下都不可能满足对偶的定义 $v^*: T_p \to R$。

定义 1.10 设 $d\varphi_1|_p,\cdots,d\varphi_n|_p$ 是对偶空间的一组基底，如果它满足

$$d\varphi_i|_p\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\bigg|_p\right)=\delta_{ij}\qquad \forall\, i,j=1,\cdots,n \tag{1-9}$$

则称 $d\varphi_1|_p,\cdots,d\varphi_n|_p$ 是切空间基底 $\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\Big|_p$ 的一组**对偶基**(dual bases)。

在定义 1.10 中，$(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 表示流形 N 上 p 点附近的局部坐标。另外应提请读者注意的是，在本书的讨论中，以后凡提到对偶空间基底，都无例外地指的是对偶基，满足式(1-9)。

在对偶基下，空间 T_p^*N 中的对偶向量可一般地表示为

$$v^*=v_1^*\,d\varphi_1|_p+\cdots+v_n^*\,d\varphi_n|_p=(v_1^*\cdots v_n^*)\begin{bmatrix}d\varphi_1\\ \vdots\\ d\varphi_n\end{bmatrix}_p \tag{1-10}$$

因为

$$v=v_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\bigg|_p+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\bigg|_p=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)_p\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$$

定义在切空间 T_pN 上的泛函(算子)运算

$$\begin{aligned}v^*(v)&=(v_1^*\,d\varphi_1|_p+\cdots+v_n^*\,d\varphi_n|_p)(v) \qquad (1-11)\\
&=(v_1^*\cdots v_n^*)\begin{bmatrix}d\varphi_1\\ \vdots\\ d\varphi_n\end{bmatrix}_p\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)_p\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}\right\}\\
&=(v_1^*\cdots v_n^*)\begin{bmatrix}d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right) & \cdots & d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)\\ \vdots & & \vdots\\ d\varphi_n\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right) & \cdots & d\varphi_n\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}\\
&=v_1^*v_1+\cdots+v_n^*v_n=\langle v^*,v\rangle \qquad (1-12)\end{aligned}$$

式(1-12)表明，对偶向量 v^* 对切向量 v 的泛函运算，是两个有不同基底的向量间的运算，其运算结果等于两方向向量的点积。

作为上式的一些退化情况，这里给出两个退化公式：

1. 如果切向量 $v=(0\ \cdots\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 1)^{\mathrm{T}}$，仅第 i 个分量 $v_i=1$，则由上式得

$$v^*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\bigg|_p\right)=v_i^* \tag{1-13}$$

2. 如果对偶向量 $v^*=(0\ \cdots\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 0)$，仅第 i 个分量 $v_i^*=1$，则由上式得

$$d\varphi_i|_p(v)=v_i \tag{1-14}$$

1.2.4 正交对偶向量

定义 1.11 切向量 v 和对偶向量 v^* 相互间满足正交条件

$$v^*(v)=\langle v^*,v\rangle=[v_1^*\cdots v_n^*]\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=v_1^*v_1+\cdots+v_n^*v_n=0 \tag{1-15}$$

时，称该对偶向量 v^* **是正交对偶向量**(orthogonal covector)或**零化对偶向量**(annihilative covector)。

1.2.5 全微分对偶向量

一个对偶向量的方向向量($v_1^*\cdots v_n^*$)，除必须与切向量同维外，其选择是很自由的，可以有多种选择。注意到某函数 $\lambda(\varphi)$ 的全微分式

$$\mathrm{d}\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\mathrm{d}\varphi_1+\cdots+\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\mathrm{d}\varphi_n$$

方向向量($v_1^*\cdots v_n^*$)的一种可能的选择是$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\right)$。这导致下面的定义。

定义 1.12 设 $\lambda(\varphi)$ 是定义在流形 N 上 p 点邻域的一个光滑函数。依托于 $\lambda(\varphi)$ 的对偶向量

$$v^*=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\right)\begin{bmatrix}\mathrm{d}\varphi_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}\varphi_n\end{bmatrix}_p \tag{1-16}$$

被称为**全微分对偶向量**(exact differential covector)，并记为 $\mathrm{d}\lambda|_p$，即

$$\mathrm{d}\lambda|_p=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\right)\begin{bmatrix}\mathrm{d}\varphi_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}\varphi_n\end{bmatrix}_p \qquad \mathrm{d}\lambda|_p\in T_p^* \tag{1-17}$$

注意到，在流形的局部坐标系 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_n)^{\mathrm{T}}$ 下，$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\right)$正是函数 $\lambda(\varphi)$ 的梯度方向，因此全微分对偶向量的方向正是函数 $\lambda(\varphi)$ 的梯度方向。

由上面的全微分对偶向量定义，可推导出以下的一些性质。

性质 1 式(1-12)是对所有对偶向量都成立的性质，自然对于全微分对偶向量也成立。设 v 是一个切向量，则

$$\mathrm{d}\lambda|_p(v)=\langle\mathrm{d}\lambda|_p,v\rangle \tag{1-18}$$

性质 2 设 $\lambda(\varphi)$ 是一个光滑函数，v 是一个切向量，则

$$\mathrm{d}\lambda|_p(v)=v(\lambda) \tag{1-19}$$

证明 由全微分对偶向量定义和切向量定义，

$$\mathrm{d}\lambda|_p(v)=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\right)\begin{bmatrix}\mathrm{d}\varphi_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}\varphi_n\end{bmatrix}_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)_p\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}\right)$$

由式(1-12)和切向量定义知

$$\mathrm{d}\lambda|_p(v)=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_n}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}(\lambda)=v(\lambda)$$

性质 3 联合性质 1 和性质 2，得

$$\langle \mathrm{d}\lambda|_p, v\rangle = v(\lambda) \tag{1-20}$$

即全微分对偶向量 $\mathrm{d}\lambda$ 与切向量 v 的点积，等于函数 λ 在 v 方向的方向导数。

例 1.2 （二基底的点积等于 δ 函数）设 $\lambda=\varphi_i$，$v=\left.\dfrac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p$，其中 φ_i，φ_j 是流形局部坐标。代入式(1-18)，并注意到式(1-9)，得

$$\mathrm{d}\varphi_i|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p\right)=\left\langle \mathrm{d}\varphi_i|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p\right\rangle=\mathrm{d}\varphi_i|_p\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p=\delta_{ij}\quad \forall\, i,j=1,\cdots,n \tag{1-21}$$

例 1.3 （基底间的对偶关系）设 $\lambda=\varphi_i$，$v=\left.\dfrac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p$，代入式(1-19)，注意到式(1-9)，得

$$\mathrm{d}\varphi_i|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p\right)=\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right|_p(\varphi_i)=\delta_{ij}\quad \forall\, i,j=1,\cdots,n \tag{1-22}$$

式(1-21)和(1-22)清楚地表明了切空间和对偶空间基底间的对偶关系和运算关系。

性质 4 （式(1-13)和(1-14)在全微分对偶情况下的推论）设 $v^*=\mathrm{d}\lambda|_p$，$v=\left.\dfrac{\partial}{\partial\varphi_i}\right|_p$ 代入式(1-13)得

$$\mathrm{d}\lambda|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\right|_p\right)=(\mathrm{d}\lambda|_p)_i=\left.\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_i}\right|_p \tag{1-23}$$

又设 $\lambda=\varphi_i$，即 $v^*=\mathrm{d}\lambda|_p=\mathrm{d}\varphi|_p$，代入式(1-12)，得与式(1-14)同样结果

$$\mathrm{d}\varphi_i|_p(v)=v_i \tag{1-24}$$

1.3 切向量和对偶向量的映射公式

1.3.1 *切向量的映射

1.3.1.1 切向量映射的定义

一个切向量 v 定义在流形 N 某点 p 上，当流形做指定映射 F，由 N 向 M 映射时，流形 N 上 p 点被映射到流形 M 的 $q=F(p)$ 点上。那么切向量 v 应如何映射呢？下面给出映射公式。映射后的切向量应定义在点 $q=F(p)$ 上。映射公式将以映射定义的形式给出，其表达如下面的定义 1.13。

在定义之前，先约定一个函数在变换前后的符号表示。一函数在映射前定义在点 p 邻域，以 x 为自变量，记为 $\lambda_p(p)$，映射后定义在点 q 邻域，以 y 为自变量，记为 $\lambda_q(q)$，其间的函数变换关系是 $\lambda_p(p)=\lambda_q(q)\circ F(p)=\lambda_q(F(p))$。

定义 1.13 设 N 和 M 是两个光滑流形(见图 1-1)。$F:N\to M$ 是一个光滑映射，$p\in N$ 点的像是 $q=F(p)\in M$。设 v 是定义在点 p 的切向量，即 $v\in T_pN$。映射前后互为对应的二函数 $\lambda_p:N\to R$ 和 $\lambda_q:M\to R$，满足 $\lambda_p(p)=\lambda_q(q)\circ F(p)$，并且 $\lambda_p\in C^\infty(p)$和 $\lambda_q\in C^\infty(q)$。**切向量 v 到其像向量 w 的映射定义为**

$$F_*:T_pN\to T_{F(p)}M$$

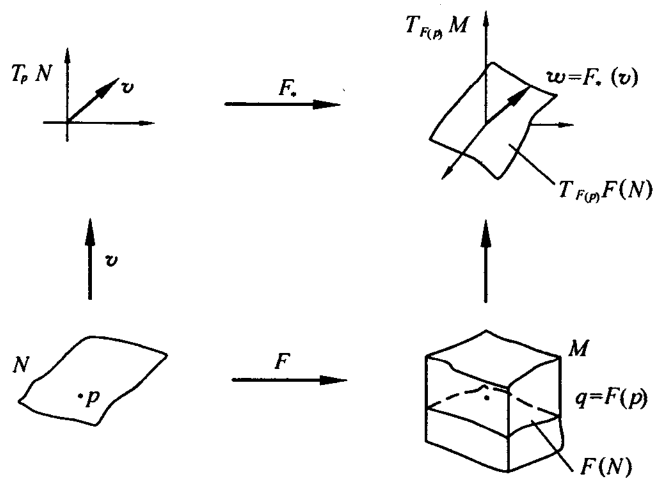

图 1－1　切向量的映射

$$F_*(v(\lambda_p(p))) = v(\lambda_q \circ F(p))$$

或简写为
$$F_*(v(\lambda_p)) = v(\lambda_q \circ F) \tag{1-25}$$

定义中 v 是切空间 T_pN 中的一个切向量，$w = F_*(v)$ 是切向量 v 的像，它是切空间 $T_{F(p)}F(N)$ 中的一个切向量。F_* 把 N 中点 p 的切向量 v 映射为 $F(N)$ 中点 q 的切向量 $w = F_*(v)$。

1.3.1.2　切向量映射的局部坐标表示

下面推导中总的思路走向是，要提出和消去函数 λ 和最终求得流形 M 坐标下的切向量 w。

首先，约定映射 $F: N \to M$ 的局部坐标表示。设点 $p \in N$ 的局部坐标用 x 表示，点 $q \in M$ 的局部坐标用 y 表示，则映射 $F: N \to M$ 在点 p, q 邻域的局部坐标表示是 $y = F(x)$。

其次，把 $F_*(v(\lambda))$ 分解为 n 个分量，即推导式(1－27)。把 $\lambda_q \circ F(x)$，即 $\lambda_q(F(x))$，写入式(1－4)的 λ 的位置，可知下式应当成立

$$F_*(v(\lambda_p)) = v(\lambda_q \circ F) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial(\lambda_q \circ F)}{\partial x_i}\right|_x \tag{1-26}$$

当 v 只含第 i 个分量，即 $v = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$ 时，此式最右端只有第 i 个分量 $v_i = 1$，其余均为零，上式变化为

$$F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x(\lambda_p)\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x(\lambda_q \circ F) = \left.\frac{\partial(\lambda_q \circ F)}{\partial x_i}\right|_x$$

再把所得结果代回式(1－26)的右端得

$$F_*(v(\lambda_p)) = \sum_{i=1}^{n} v_i F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x(\lambda_p)\right) \tag{1-27}$$

再次，求 $F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x(\lambda_p)\right)$ 的局部坐标表示。先求其第 i 个分量的局部坐标表示。注意 $y = F(x)$，并假设流形 M 为 m 维，得

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(\lambda_p)\right)=\frac{\partial(\lambda_q\circ F)}{\partial x_i}\bigg|_x=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\lambda_q}{\partial y_j}\bigg|_{y=F(x)}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\bigg|_x$$

或省去 λ_p 和 λ_q 写成

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\bigg|_x\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{y=F(x)}$$

最后，把此结果代回式(1-27)，得 $F_*(v)$的局部坐标表示为

$$\begin{aligned}w&=F_*(v)=\sum_{i=1}^{n}v_iF_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right)=\sum_{i=1}^{n}v_i\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\bigg|_x\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{y=F(x)}\right)\\&=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{y=F(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\bigg|_x v_i\right)\end{aligned}\tag{1-28}$$

1.3.1.3 切向量映射的矩阵和向量表示

切向量映射 $w=F_*(v)$左端切向量 w 的局部坐标表示是

$$w=\sum_{i=1}^{m}w_i\frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{y=F(x)}$$

另一方面，$F_*(v)$可表示为式(1-28)。把 $w=F_*(v)$两端都写成矩阵形式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{y=F(x)}\begin{bmatrix}w_1\\\vdots\\w_m\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{y=F(x)}\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$$

或简化为

$$\begin{bmatrix}w_1\\\vdots\\w_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}\tag{1-29}$$

最后得切向量映射 $w=F_*(v)$的矩阵表示是

$$w=J_F|_x v\tag{1-30}$$

其中

$$J_f|_x=\frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{T}}}\bigg|_x=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}_x\tag{1-31}$$

是流形映射 $y=F(x)$在点 x 处的 Jacobi 矩阵。

1.3.2 切向量向 R 切方向的映射

1.3.2.1 定义

本节(1.3.2 节)是 1.3.1 节的一个特例，是流形 M 退化为一维欧氏空间 R，即像空间由 m 维变为 1 维时的情况。

设有一个切向量 v 定义在流形 N 某点 p 上，当流形做指定函数映射 λ，由 N 向 R 映射

时，流形上 R 点被映射到 R 的 $q=\lambda(p)$ 点上得到一实数值。那么切向量 v 应如何映射呢？映射后得到 R 上的一个切向量。映射公式将以映射定义的形式给出，见下面的定义 1.14。

在定义之前，先约定一个函数在变换前后的符号表示。一函数在映射前定义在点 p 邻域，以 x 为自变量，记为 $\mu_p(p)$，映射后定义在点 q 邻域，以 y 为自变量，记为 $\mu_q(q)$，其间的函数变换关系是 $\mu_p(p)=\mu_q(q)\circ\lambda(p)=\mu_q(\lambda(p))$。

定义 1.14 设 N 是一个光滑流形，$\lambda:N\to R$ 是一个光滑函数映射，v 是定义在点 p 的切向量，即 $v\in T_pN$。映射前后互为对应的两个函数 $\mu_p:N\to R$ 和 $\mu_q:M\to R$，满足 $\mu_p(p)=\mu_q(q)\circ\lambda(p)$，并且 $\mu_p\in C^\infty(p)$ 和 $\mu_q\in C^\infty(q)$。**切向量 v 向 R 切方向的映射**定义为

$$\lambda_*:T_pN\to T_{\lambda(p)}R$$

$$\lambda_*(v(\mu_p(p)))=v(\mu_q\circ\lambda(p))$$

或简写为

$$\lambda_*(v(\mu_p))=v(\mu_q\circ\lambda) \tag{1-32}$$

定义中 v 是切空间 T_pN 中的一个切向量，$w=\lambda_*(v)$ 是切向量 v 的像。w 是切空间 $T_{\lambda(p)}R$ 中的一个切向量。λ_* 把 N 中点 p 的切向量 v 映射为 R 中点 $q=\lambda(p)$ 的切向量 $w=\lambda_*(v)$。

1.3.2.2 切向量向 R 切方向映射的局部坐标表示

首先，约定函数映射 $\lambda:N\to R$ 的局部坐标表示。设点 $p\in N$ 的局部坐标用 x 表示，点 $q\in R$ 的局部坐标用 y 表示，则函数映射 $\lambda:N\to R$ 在点 p,q 邻域的局部坐标表示是 $y=\lambda(x)$。

其次，把 $\lambda_*(v(\mu_p))$ 分解为 n 个分量，即推导式(1-34)。把 $\mu_q\circ\lambda(x)$，即 $\mu_q(\lambda(x))$，写入式(1-4)的 λ 的位置，有

$$\lambda_*(v(\mu_p))=v(\mu_q\circ\lambda)=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial(\mu_q\circ\lambda)}{\partial x_i}\bigg|_x \tag{1-33}$$

当 v 只含第 i 个分量，即 $v=\dfrac{\partial}{\partial x}\bigg|_x$ 时，此式最右端只有第 i 个分量 $v_i=1$，其余全为零，上式变化为

$$\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(\mu_p)\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(\mu_q\circ\lambda)=\frac{\partial(\mu_q\circ\lambda)}{\partial x_i}\bigg|_x$$

再把所得结果代回式(1-33)的右端得

$$\lambda_*(v(\mu_p))=\sum_{i=1}^{n}v_i\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(\mu_p)\right) \tag{1-34}$$

再次，求 $\lambda_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(\mu_p)\right)$ 的局部坐标表示。按定义，并注意 $y=\lambda(x)$ 得

$$\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(\mu_p)\right)=\frac{\partial(\mu_q\circ\lambda)}{\partial x_i}\bigg|_x=\frac{\mathrm{d}\mu_q}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=\lambda(x)}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\bigg|_x$$

或写成

$$\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right)=\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\bigg|_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=\lambda(x)}$$

最后，把此结果代回式(1-34)，得 $\lambda_*(v)$ 的局部坐标表示

$$\lambda_*(v)=\sum_{i=1}^{n}v_i\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\bigg|_x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=\lambda(x)}=v(\lambda(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=\lambda(x)} \tag{1-35}$$

1.3.2.3 切向量向 R 切方向映射的向量表示

切向量映射 $w=\lambda_*(v)$ 左端切向量 w 的局部坐标表示是