Advanced Mathematics

童裕孙　於崇华
金　路　张万国

高等数学

第二版　上册

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 数 学

（第二版）

上册

童裕孙　於崇华　金　路　张万国

高等教育出版社

内容提要

本书是在第一版的基础上，根据大量教学信息的反馈修改而成．作者改写了不少章节和段落，调整充实了较为简略的部分，增添了一些精彩的例题，目的是使本书更适用于大学数学基础课的实际教学过程．本书的主要特色是对分析、代数、几何等各个部分作较为统一的综合处理，科学组织并简洁处理相对成熟的材料；在运用严格的数学语言的同时，注意论述方式的自然朴素、易于理解；全书的深度和广度能适应多数专业的学时安排．

全书分上，下两册．上册包括一元函数微积分，线性代数与空间解析几何；下册包括多元函数微积分，常微分方程，概率论与数理统计．

本书可作为高等学校理科和技术学科非数学类各专业的教材，也可供经济、管理等有关专业选择使用．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册／童裕孙等．—2版．—北京：高等教育出版社，2004．4（2005重印）
ISBN 7－04－013847－6

Ⅰ．高…　Ⅱ．童…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第007911号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2001年9月第1版
印　　张	22.5		2004年4月第2版
字　　数	420 000	**印　　次**	2005年7月第3次印刷
插　　页	1	**定　　价**	23.90元

物料号　13847－00

第二版前言

本书第一版问世以来,我校理科和技术学科各专业,经济类各专业乃至医学类各专业的高等数学课程均采用了这本教材.在使用过程中,不少教师和学生提出了十分中肯的意见和很好的建议,为我们这次修订提供了充足的依据.

修订后的第二版并不改变原教材的编写宗旨、结构框架和主要内容,因为原书的特色正是通过它们体现出来的.主要修订之处在于:改写了原书中叙述不太清晰或由于条理、文字等因素致使效果不佳的段落;对教材中过于简略的部分作了调整和充实;增加了一些必要的或较精彩的例题;删去了若干多次同类重复或易导致歧义的题目,并补充了一些综合性的习题.这些修改散见于全书各篇,其中变动最大的是线性代数各章节.在这一部分中,我们在多处更改了例题,重作了证明,调整了叙述次序,以使条理更清晰,全书风格也更为一致.此外,我们还补充了关于曲率,广义积分等基本内容.对每一部分的修改,我们都反复推敲,再三权衡,目的是使这本教材更适用于大学数学基础课的实际教学过程.

如果说本书第一版因编写时间匆促,略嫌粗糙的话,这一版因有大量教学信息的反馈,使我们能较好地把握修订质量.我们深知一本成熟的教材须久经锤炼,因而仍然热切地期望广大师生一如既往,不吝指正,以期通过共同努力,把这本教材的质量提升到一个新的台阶.

编　者

2003 年 8 月

第一版前言

大学数学课程的建设历来受到高等院校教育工作者的广泛关注,适应不同需要的教科书品种繁多.在长期的教学工作中,我们曾接触过一些很有特色的教材,受益匪浅.然而,课堂教学的实践、与各专业老师的共同探讨以及来自学生的信息反馈,仍使我们多年前就萌发了编写一本通用于我校理科和技术学科各专业的高等数学教材的意向.

计划早已列出,大纲亦几经斟酌,年复一年却迟迟未能下笔.这固然缘于诸多客观因素,其实因为我们深知这门课程的份量,所以希望再看一看、想一想,冷静地把编写思路整理得更清晰些.在此期间,教育部组织并启动了高等教育改革研究的计划,理科非数学类高等数学课程的建设被列为其中一项.作为项目参加成员,我们有机会与兄弟院校的同行一起作深入的研讨,从教育观念上达到了一个明确而重要的共识:大学数学教育的目标不仅在于为学生提供学习专业知识的工具,更重要的在于引导学生掌握一种现代科学的语言,学到一种理性思维的模式,接受包括归纳、分析、演绎等各项数学素质的训练.根据这一理解,就有可能较为自觉而准确地把握好知识传授与能力培养的关系、基本技能训练和应用意识熏陶的关系、逻辑体系的继承性与教学内容现代化的关系.

基于对高等数学课程的认识与体验,我们在教材编写过程中特别注意了以下几个方面:

首先,大学数学基础课的教材,无疑应包含分析、代数、几何和随机数学这几部分的内容.作为一部完整的教材,须对全书的内容作统一的综合处理,使其不致沦为零星素材的简单堆砌.在本书中,第二篇线性代数与空间解析几何既是一个相对独立的篇章,又在第一篇一元函数微积分与第三篇多元函数微积分之间架起了一座桥梁.线性代数的语言与方法渗透于多元微积分的展开之中,将有利于学生对这两方面知识的理解与深化.

其次,由于本教材以非数学类学生为对象,取材的深度与广度自有一定限制.我们一方面尽量以学生易于接受的自然形式,展开各章节的数学材料,以帮助学生理解概念提炼的必然性、条件引入的合理性和证明过程的科学性;另一方面也注意恰当地运用严格的数学语言与推理,切实保证教材必要的系统性和严谨性,使学生有机会适度接触精彩的数学抽象,积累理性思维的经验,这是提高学生数学素质的重要环节.

再次,我们致力于以现代数学的观点统率经典的内容.在避免人为地提高课

程平台的前提下,精心组织并简洁处理相对成熟的材料,在一定程度上缩小教材的篇幅,以适应多数专业的学时分配.

同时,我们在较为广泛的范围内选取了一些应用性的例题和习题,并试图从中体现数学建模的思想与方法,以培养学生的应用意识,提高学生融会贯通地分析问题、解决问题的能力.教学实践证明这是增强高等数学课程活力的有效途径.

此外,我们在注意力求使教材的基本内容准确到位的同时,还先易后难地配置了相当数量的习题.例题和习题的选取兼顾了各类学生的需要,教师可根据学生的不同程度选择使用.

一般说来,大学教材并非教师照本宣科的脚本.同一本教材可以使用于不同的对象,教出不同的风格.我们把本书的目标定位在一本适用于理工类大部分专业的数学基础课程的教材,其内容经选择也应适用于对数学要求较高的其他各类(如经管、师范)有关专业的高等数学课程.作为本书前身的同名讲义,曾经在我校物理、电子工程、材料、电光源等系的各个大班和理、化、生各理科基地班使用.从 2001 年秋起,我校物理类、化学类各系和生命学院各系将同时使用这本教材.根据我们的经验,学生在两个学期内能学完前四篇的全部内容,第五篇可作为第三学期数学课程的内容.对于仅开设两学期数学课程的院系,为讲完全书主要内容,可以略去第二篇的“线性空间和线性变换”一章中除特征值问题外的其他各节、第三篇的“多元函数积分学”一章中关于曲线积分、曲面积分和场论等内容以及第五篇的“数理统计”一章中的部分内容.

复旦大学数学系每年都有近二十名教师承担高等数学的教学任务,多年来,我们在与大家的教学交流中获得了大量的启示;朱胜林教授、曹源副教授与翁史伟老师和我们一起试用过这本讲义,提出了许多宝贵的意见;在本书编写过程中,我们还自始至终获得了复旦大学前副校长严绍宗教授、副校长孙莱祥教授的关心与鼓励;教务处方家驹教授多年来一直支持着我们的工作;高等教育出版社的胡乃炯同志和徐刚同志以及上海分部的陈建新主任为本书的顺利出版提供了热情的帮助,值此本书面世之际,我们谨向以上诸位致以诚挚的谢意.

限于水平,我们的一些主观设想写成文字后也许走了样,全书中的错误和缺陷也在所难免.殷切地期望广大读者不吝指正,希望通过共同努力,经日后修订,使这本教材日趋成熟.

编　者

2001 年 3 月于复旦

目　录

第一篇　一元函数微积分

第一章　极限与连续 …………………… (3)
§1　函数 …………………………………… (3)
函数概念 ………………………… (3)
函数的图像 ……………………… (4)
函数的性质 ……………………… (5)
复合函数 ………………………… (6)
反函数 …………………………… (7)
初等函数 ………………………… (8)
习题 …………………………………… (11)
§2　数列的极限 ………………………… (12)
几个例子 ………………………… (12)
无穷小量 ………………………… (14)
无穷小量的运算 ………………… (15)
数列的极限 ……………………… (16)
收敛数列的性质 ………………… (17)
单调有界数列 …………………… (20)
Cauchy 收敛准则 ……………… (22)
习题 …………………………………… (23)
§3　函数的极限 ………………………… (24)
自变量趋于有限值时函数的极限 ………………………… (24)
极限的性质 ……………………… (26)
单侧极限 ………………………… (29)
自变量趋于无限时的极限 ……… (30)
曲线的渐近线 …………………… (32)
习题 …………………………………… (34)
§4　连续函数 …………………………… (35)
函数在一点的连续性 …………… (36)
函数的间断点 …………………… (37)
区间上的连续函数 ……………… (38)
闭区间上连续函数的性质 ……… (39)
无穷小和无穷大的连续变量 …… (41)
习题 …………………………………… (43)
第二章　微分与导数 …………………… (46)
§1　微分与导数的概念 ………………… (46)
一个实例 ………………………… (46)
微分的概念 ……………………… (48)
导数的概念 ……………………… (49)
导数的意义 ……………………… (50)
微分的几何意义 ………………… (53)
习题 …………………………………… (54)
§2　求导运算 …………………………… (54)
几个初等函数的导数 …………… (54)
四则运算的求导法则 …………… (55)
复合函数求导的链式法则 ……… (57)
反函数的求导法则 ……………… (60)
基本初等函数的导数表 ………… (61)
对数求导法 ……………………… (62)
高阶导数 ………………………… (63)
习题 …………………………………… (66)
§3　微分运算 …………………………… (67)
基本初等函数的微分公式 ……… (67)
微分运算法则 …………………… (68)
一阶微分的形式不变性 ………… (68)
隐函数求导法 …………………… (69)
由参数方程确定的函数求导法 ………………………… (70)
微分的应用:近似计算 ………… (72)
微分的应用:误差估计 ………… (74)
习题 …………………………………… (75)

§4 微分学中值定理 ………………… (76)
局部极值与 Fermat 定理 ………… (76)
Rolle 定理 ……………………… (77)
微分学中值定理 ………………… (78)
Cauchy 中值定理 ………………… (80)
习题 ……………………………… (81)
§5 L'Hospital 法则 ……………… (81)
$\frac{0}{0}$型的 L'Hospital 法则 ………… (82)
$\frac{\infty}{\infty}$型的极限 ……………………… (83)
其他不定型的极限 ………………… (84)
习题 ……………………………… (86)
§6 Taylor 公式 ……………………… (87)
带 Peano 余项的 Taylor 公式 …… (87)
带Lagrange 余项的 Taylor 公式 ……………………………… (89)
Maclaurin 公式 …………………… (90)
习题 ……………………………… (92)
§7 函数的单调性和凸性 ………… (93)
函数的单调性 …………………… (93)
函数的极值 ……………………… (95)
最大值和最小值 ………………… (97)
函数的凸性 ……………………… (100)
曲线的拐点 ……………………… (102)
函数图像的描绘 ………………… (103)
习题 ……………………………… (106)
§8 函数方程的近似求解 ……… (107)
习题 ……………………………… (110)
第三章 一元函数积分学 …………… (111)
§1 定积分的概念、性质和微积分基本定理 ……………… (111)
面积问题 ………………………… (112)
路程问题 ………………………… (113)
定积分的定义 …………………… (113)
定积分的性质 …………………… (115)
原函数 …………………………… (117)
微积分基本定理 ………………… (118)
习题 ……………………………… (119)
§2 不定积分的计算 …………… (120)
不定积分 ………………………… (120)
基本不定积分表 ………………… (121)
不定积分的线性性质 …………… (122)
第一类换元积分法(凑微分法) ……………………… (123)
第二类换元积分法 ……………… (126)
分部积分法 ……………………… (129)
有理函数的积分 ………………… (131)
某些无理函数的积分 …………… (135)
三角函数有理式的积分 ………… (136)
习题 ……………………………… (138)
§3 定积分的计算 ……………… (141)
分部积分法 ……………………… (141)
换元积分法 ……………………… (142)
数值积分 ………………………… (147)
习题 ……………………………… (149)
§4 定积分的应用 ……………… (151)
微元法 …………………………… (151)
面积问题(直角坐标下的区域) ……………………… (152)
面积问题(极坐标下的区域) …… (153)
已知平行截面面积求体积 ……… (154)
旋转体的体积 …………………… (155)
曲线的弧长 ……………………… (156)
曲线的曲率 ……………………… (158)
旋转曲面的面积 ………………… (161)
由分布密度求分布总量 ………… (162)
质量 ……………………………… (163)
引力 ……………………………… (163)
液体对垂直壁的压力 …………… (164)
动态过程的累积效应:功 ……… (165)
习题 ……………………………… (167)
§5 广义积分 …………………… (168)
无穷限的广义积分 ……………… (169)
比较判别法 ……………………… (170)
无界函数的广义积分 …………… (172)
Cauchy 主值积分 ………………… (176)

Γ 函数 …… (177)
B 函数 …… (179)
习题 …… (180)

第二篇　线性代数与空间解析几何

第四章　矩阵和线性方程组 …… (183)
§1　从多元一次方程组谈起 …… (183)
§2　向量与矩阵 …… (185)
向量 …… (185)
矩阵 …… (185)
矩阵的运算 …… (189)
分块矩阵及运算 …… (194)
习题 …… (197)
§3　行列式 …… (199)
n 阶行列式的定义 …… (199)
行列式的性质 …… (201)
习题 …… (206)
§4　逆阵 …… (208)
逆阵的概念与性质 …… (208)
用初等变换求逆阵 …… (210)
Cramer 法则 …… (214)
习题 …… (216)
§5　向量的线性关系 …… (217)
线性相关与线性无关 …… (217)
与线性关系有关的性质 …… (220)
习题 …… (224)
§6　秩 …… (224)
向量组的秩 …… (224)
矩阵的秩 …… (226)
习题 …… (231)
§7　线性方程组 …… (232)
齐次线性方程组 …… (232)
非齐次线性方程组 …… (237)
Gauss 消去法 …… (243)
Jacobi 迭代法 …… (245)
习题 …… (248)
第五章　线性空间和线性变换 …… (250)
§1　线性空间 …… (250)
线性空间 …… (250)
线性空间的基与坐标 …… (254)
基变换与坐标变换 …… (256)
习题 …… (259)
§2　线性变换及其矩阵表示 …… (260)
几个简单的几何变换 …… (260)
线性变换及其矩阵表示 …… (262)
不同基下表示矩阵的关系 …… (265)
习题 …… (268)
§3　特征值问题 …… (269)
特征值和特征向量 …… (269)
特征值和特征向量的性质 …… (271)
可对角化的矩阵 …… (274)
Jordan 标准形简介 …… (276)
习题 …… (278)
§4　内积和正交变换 …… (279)
Euclid 空间 …… (279)
正交基 …… (281)
正交矩阵和正交变换 …… (284)
酉空间、酉矩阵和酉变换 …… (285)
习题 …… (286)
§5　正交相似和酉相似 …… (288)
对称阵、Hermite 阵和正规阵 …… (288)
正交相似 …… (289)
酉相似 …… (292)
习题 …… (294)
§6　二次型及其标准形式 …… (295)
一个例子 …… (295)
二次型与对称矩阵 …… (297)
化二次型为标准形的几种方法 …… (299)
习题 …… (304)
§7　正定二次型 …… (304)
惯性定理 …… (304)
正定二次型和正定矩阵 …… (306)

用 Cholesky 分解解线性方程组 …… (310)
二次曲线的分类 …… (312)
习题 …… (313)
第六章 空间解析几何 …… (315)
§1 向量的外积与混合积 …… (315)
空间直角坐标系 …… (315)
三维空间的向量 …… (317)
向量的外积与混合积 …… (317)
习题 …… (321)
§2 平面和直线 …… (322)
平面方程的几种形式 …… (322)
直线方程的几种形式 …… (324)
平面束 …… (328)
点到平面、直线的距离 …… (328)
交角 …… (330)
习题 …… (333)
§3 曲面、曲线和二次曲面 …… (334)
曲面方程 …… (334)
空间曲线方程 …… (337)
二次曲面 …… (339)
习题 …… (346)

第一篇　一元函数微积分

数学是人类历史上最早诞生的科学之一,它研究的对象是现实世界中的数量关系和空间形式.任何事物都蕴涵其独特的量与形的特征,掌握这些基本特征,“胸中有数”,才能驾驭事物的发展,因而数学必然地成为自然科学、工程技术乃至人们日常生活不可缺少的工具.近几十年来,伴随着计算机技术的迅速提高,现代科学技术进入了高速发展的新阶段,其重要标志就是数学的思维方式、推理方法、演算技术均以前所未有的深度和广度延伸到各个领域,并对它们的发展起着关键的作用.现在重温马克思的名言:“一切科学,只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步”,更令人信服地体会到数学在科学舞台上正扮演着越来越重要的角色.

经过历史上长期的发展,数学已成为一个范围广阔,分支众多,应用广泛的科学体系.这个体系中最基础的一部分内容,构成了理科学生必修的高等数学课程.我们将从分析变量间最本质的联系,即函数关系入门,展开这门课程的主要内容.本篇就来介绍关于一元函数的局部性质和整体性质的微积分理论.

微积分作为一门科学,产生于17世纪后半期,基本完成于19世纪,而它的一些基本思想则萌芽于人类文明社会早期的古代.

对任意的封闭曲线所围成的平面图形面积的计算是微积分概念的主要来源之一.这类问题在欧几里得的《几何原本》就有所反映.公元前3世纪,古希腊数学家阿基米德提出用逼近的方法计算圆周率,正是对此类方法的重要贡献.我国魏晋时代的数学家刘徽提出了割圆术,即利用圆内接多边形面积来推算圆面积的方法,也是在极限方法探索上跨出的重要一步.

由于受到社会生产力和科学本身发展的制约,在相当长的一个历史阶段中,这些萌芽了的工作未被后人直接继续.直至16世纪中叶,伴随着大工业的发展、数学符号化的成熟和解析几何的问世,大量数学问题迅速涌现,这就为数学家创造性的工作开拓了方向.上至天文,下至机械,对各种运动的研究引发了对函数、切线、速度、极大、极小、面积、重心等问题计算的需要.自那以后的百余年间,许多欧洲数学家都致力于这些问题的个别解法.寻求这些实践问题普遍算法的过程,及由此建立的一系列基础,最终导致英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨

提出了微积分方法的雏型.以极限理论为基础的微积分体系的完成是十九世纪数学最重要的成就之一,极限方法的成熟也是这门学科严格化的标志.时至今日,微积分已经成为一个在理论科学和实践应用中不可缺少的重要工具.

本篇介绍一元函数微积分的基本知识.第一章讨论极限与连续.极限运算和极限方法是研究变化过程的有效手段,数列极限和函数极限则是两类最基本的极限概念.函数的连续性是利用极限概念描述的一类重要性质,微积分研究的主体正是连续函数.微分是讨论变量在小范围中变化性态的重要工具;伴随着微分概念的导数概念,则刻画了变量变化的快慢,导数的几何背景是切线斜率,其物理原型是瞬时速度.第二章将对导数和微分作出系统的讨论,进而介绍它们在某些理论和实际问题中的应用.第三章介绍一元函数的积分.不定积分是微分运算的逆运算;变速直线运动的路程、曲线的弧长以及曲边形的面积等问题均可归结为定积分的计算.这一章介绍的微积分基本定理——Newton - Leibniz 公式不仅使积分运算方便易行,而且建立了微分和积分的本质联系,使微分学和积分学融合成一个不可分割的有机整体.

第一章　极限与连续

微积分的主要课题在于研究变量的变化性态.为了利用变量的变化趋势、变化速度以及变化的累积效应等要素刻画变化过程的特征,人们提出并发展了极限的理论和方法.实际上,导数是一类特殊的极限,定积分又是另一类型的极限,极限的理论与方法构成了整个微积分的基础.本章就来介绍极限的基本概念、基本性质和基本运算,并且利用极限描述函数的连续性.连续函数是最常见的一类函数,它具有一系列很好的性质和基本运算,本篇展开的微积分理论将以连续函数为主要对象.

§1　函　　数

我们生活在永恒运动着的客观世界中,变化无处不在.诸如行星围绕太阳转动时相对位置的改变;城市人口数逐年的增减;转炉中钢水温度的升降;流水线上完成产品的多少;国际贸易中逆差的变化等,它们都可以用数学上的变量来描述.人们注意到在同一个自然现象、生产实践或科学实验过程中,往往同时有几个量相互联系、相互影响地变化着,遵循着一定的客观规律.如果能用数学方式精确地描述出这些变化的因果关系,就有可能准确地预测事物未来的进程,提出有效的工作方案,把握事物的发展趋势.本节讨论的函数就是对变量变化关系最基本的数学描述.

函数概念

定义 1.1.1　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集,如果按某规则 f,对 D 中每个数 x,均有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是以 D 为定义域的**(一元)函数**,称 x 为**自变量**,y 为**因变量**.这个函数关系记作

$$f: D \to R,$$
$$x \mapsto y,\ x \in D.$$

又记 $y = f(x)$,并称

$$R = \{f(x) \mid x \in D\}$$

为函数 f 的**值域**.

有时,为明确起见,记上述函数 f 的定义域为 $D(f)$,值域为 $R(f)$.

在函数定义中出现两个变量:取值于定义域 D 的自变量 x 和取值于值域 R 的因变量 y. 反映这两个变量联系的数学概念就是函数关系 f. 由定义可见,确定函数有两个要素:定义域和对应规则,如果两个函数 f_1 和 f_2 满足

$$D(f_1) = D(f_2)$$

且

$$f_1(x) = f_2(x), \qquad x \in D(f_1),$$

则有 $f_1 = f_2$.

例 1.1.1 三个函数 f,g,h 分别定义为

$$f(x) = x^2, \qquad D(f) = [0,1];$$
$$g(t) = t^2, \qquad D(g) = [0,1];$$
$$h(s) = s^2, \qquad D(h) = [-1,1].$$

显然有

$$f = g, \qquad g \neq h.$$

例 1.1.2 设有半径为 r 的圆,记该圆内接正 n 边形周长为 $s(n)$,则

$$s(n) = 2nr\sin\frac{\pi}{n}.$$

上式给出了边数与周长的函数关系 s,显然

$$D(s) = \{n \mid n \in \mathbf{N}^+, \quad n \geqslant 3\},$$

其中 $\mathbf{N}^+$ 表示正整数集合.

函数的图像

借助于图形的直观形象,有利于掌握函数的变化规律.

例如,汽车的计速器把车轮转动的角速度转换为表盘上指针的相应位置,即指示汽车的速度. 画出车速关于时间的图形,得到车辆起步后的速度图(图 1.1.1).

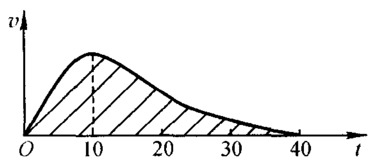

图 1.1.1

从图 1.1.1 中我们可以清晰地看到车辆加速和减速的全过程:车辆起步后迅速加速,至 10 分钟后又缓缓减速,直至 40 分钟时停下.

如何得到这 40 分钟间汽车经过的路程,并把它显示在里程表上?一般是通过机械装置的运转实现的,这个装置运转的结果实际上是算出了图中阴影部分

的面积,读者学了积分就会知道这部分面积恰是汽车经过的里程.

由此可见,反映变量间依赖关系的几何图形对研究变量的关系起着十分重要的作用.这种图形就是函数的图像.

定义 1.1.2　*设函数 f 的定义域为 D,在平面直角坐标系中,记*

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\},$$

*称 G_f 为函数 f 的***图像**.

例 1.1.3　符号函数 sgn. 这个函数定义于 $(-\infty, +\infty)$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

它是一个分段函数,其图像见图 1.1.2.

例 1.1.4　取整函数 $y = [x]$,其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数,即

$$[x] = k, \quad x \in [k, k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

这个函数的图像见图 1.1.3.

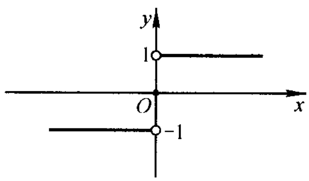

图 1.1.2

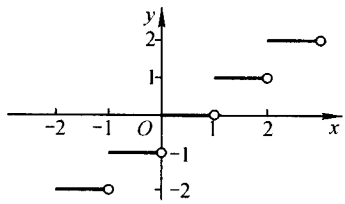

图 1.1.3

函数的性质

各类函数的变化规律,表现于它们各自具有一些特殊的性质.人们考察具体函数时,往往先从分析它们是否具有下列特性着手.

1. 奇偶性　设函数 f 的定义域关于原点对称.如果

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in D(f),$$

则称 f 为**偶函数**,它的图像关于 y 轴对称,如果

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in D(f),$$

则称 f 为**奇函数**,它的图像关于坐标原点中心对称.

例如,定义于 $(-\infty, +\infty)$ 的函数 $f(x) = \sin x$ 是奇函数,$g(x) = \cos x$ 是偶函数,$h(x) = \sin x + \cos x$ 既非奇函数又非偶函数.

2. 周期性　对于函数 f,如果存在正数 T,使得

$$f(x + T) = f(x), \qquad x \in D(f),$$

则称 f 是以 T 为周期的**周期函数**,满足上述关系的最小正数 T 称为 f 的**最小正周期**.

例如,$f(x)=\sin x,g(x)=\cos x$ 都是以 2π 为最小正周期的周期函数,$h(x)=\tan x$ 是以 π 为最小正周期的周期函数.

3. 单调性　对于函数 f,如果任意取 $x_1,x_2\in D\subset D(f)$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\qquad (\text{或}\quad f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 f 在 D 上是**单调增加**(或**单调减少**)的;如果上述关系式中等号均不成立,则称 f 在 D 上是**严格单调增加**(或**严格单调减少**)的.

例如,在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)=[x]$ 是单调增加函数;$g(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的,在 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的.

4. 有界性　设有函数 $f,D\subset D(f)$,如果存在数 M,使得

$$f(x)\leqslant M,\qquad x\in D,$$

则称函数 f 在 D 上**有上界**,称 M 为 f 的一个上界;如果存在数 m,使得

$$f(x)\geqslant m,\qquad x\in D,$$

则称函数 f 在 D 上**有下界**,称 m 为 f 的一个下界;在 D 上既有上界又有下界的函数称为在 D 上**有界**. f 是 D 上有界函数等价于存在数 k,使得

$$|f(x)|\leqslant k,\qquad x\in D.$$

如果这样的数 k 不存在,则称 f 在 D 上无界.

例如,$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的,这是因为

$$|f(x)|\leqslant 1,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

又如 $f(x)=\lg x$ 在 $(0,10)$ 内有上界 1 而无下界;在 $(0.1,+\infty)$ 内有下界 -1 而无上界;在区间 $(0.1,10)$ 内有界,实际上

$$|\lg x|\leqslant 1,\qquad x\in(0.1,10).$$

复合函数

如果某个过程中同时出现几个变量,其中第一个量依赖于第二个量,第二个量又取决于第三个量,于是,第一个量实际上由第三个量所确定.这类多个变量的连锁关系导致复合函数的概念.把一个复杂的函数分解为几个简单函数的复合,以及引入新变量,通过函数复合简化运算的方法,都是微积分中经常使用的有效手段.

定义 1.1.3　*设有函数 f 和 g,称定义在*

$$\{x\,|\,x\in D(g),g(x)\in D(f)\}$$

上的函数 $f\circ g$ 为 f 和 g 的 **复合函数**,*其中*

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

对于复合函数 $f\circ g$,称 $u=g(x)$ 为**中间变量**,其中 $x\in D(f\circ g)$ 为自变量.

例 1.1.5　设函数 f 和 g 分别为

$$f(u)=\sqrt{u},\qquad D(f)=[0,+\infty),$$
$$g(x)=a^2-x^2,\qquad D(g)=(-\infty,+\infty),$$

其中 $a>0$. 于是

$$(f\circ g)(x)=\sqrt{a^2-x^2}.$$

而 $f\circ g$ 的定义域则为

$$\begin{aligned}D(f\circ g)&=\{x\mid x\in(-\infty,+\infty),a^2-x^2\in[0,+\infty)\}\\&=\{x\mid -a\leqslant x\leqslant a\}.\end{aligned}$$

同样地,可以讨论多个函数的复合函数.

例 1.1.6　设

$$f(u)=\log_3 u,\qquad D(f)=(0,+\infty),$$
$$g(v)=\sqrt{4+v},\qquad D(g)=[-4,+\infty),$$
$$h(x)=x^6,\qquad D(h)=(-\infty,+\infty).$$

则有

$$(f\circ g\circ h)(x)=\log_3\sqrt{4+x^6},$$
$$D(f\circ g\circ h)=(-\infty,+\infty).$$

例 1.1.7　试把

$$F(x)=2^{\arccos\sqrt{1-x^2}},\qquad D(F)=[-1,1],$$

分解为几个简单函数的复合.

解　取

$$f(u)=2^u,\qquad D(f)=(-\infty,+\infty),$$
$$g(v)=\arccos v,\qquad D(g)=[-1,1],$$
$$h(w)=\sqrt{w},\qquad D(h)=[0,+\infty),$$
$$j(y)=1-y,\qquad D(j)=(-\infty,+\infty),$$
$$k(x)=x^2,\qquad D(k)=(-\infty,+\infty).$$

则显然有

$$F=f\circ g\circ h\circ j\circ k.$$

反函数

一个函数可以看作从其定义域到值域的一种运算,现在讨论这种运算的可逆性及其逆运算,这就引出了反函数的概念.

定义 1.1.4　设有函数 f,如果对每一个 $y\in R(f)$,有唯一的 $x\in D(f)$ 满