TEJIJIAOSHIJIAOSHUXUE

Teji Jiaoshijiao Shuxue

高一年级

奚定华 主编

特级教师教数学

教师的备课助手

学生的免费家教

学林出版社

特级教师教数学

高一年级

奚定华　主编
本册编写　李大元　张颂方

学林出版社

图书在版编目（CIP）数据

特级教师教数学．高一年级／奚定华主编．—上海：学林出版社，2001.12

ISBN 7-80668-233-3

Ⅰ．特…　Ⅱ．奚…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 092474 号

特级教师教数学（高一年级）

主　　编——奚定华
本册编写——李大元　张颂方
责任编辑——吴耀根
特约编辑——陈永良
封面设计——王　峥
出　　版——学林出版社（上海钦州南路 81 号 3 楼）
电话：64515005　传真：64515005
发　　行——新华书店上海发行所
学林图书发行部（文庙路 120 号）
电话：63779027　传真：63768540
印　　刷——上海师范大学印刷厂
开　　本——787×1092　1/16
印　　张——13.75
字　　数——27 万
版　　次——2001 年 12 月第 1 版
2006 年 2 月第 3 次印刷
印　　数——10001-12000 册
书　　号——ISBN 7-80668-233-3/G·91
定　　价——18.00 元

前　言

数学是中学的一门主要学科，要学好数学必须掌握数学基础知识和基本技能，提高运算能力、思维能力、空间想象能力和分析问题、解决问题的能力。有不少学生感到数学难学，面对一系列抽象的概念、一大堆定理和公式，不知所措、无所适从，迫切需要有名师指点。为此我们组织了在教学上有很高造诣和丰富经验的特级教师编写这套丛书。这些特级教师多年来在教学第一线工作，其中有些教师多次参加教材编写和中考、高考命题工作，这是他们数学教学工作的经验总结和心血结晶，相信对广大中学生的数学学习会有所启迪，对广大的中学数学教师的教学也会有所帮助。阅读本丛书，好像特级教师就在你身边给你上课，循循善诱、启发引导、分析点拨、指点迷津，帮助你抓住重点、掌握要领、克服难点，领悟数学的真谛。

本书具有以下几个特点：

1. 既重视基础知识和基本技能，又注意培养数学能力

本丛书深入浅出地阐述数学概念的本质，对定理、公式和法则进行透彻的分析，使读者通过学习，能深刻地理解数学基础知识和熟练地掌握数学的基本技能。书中精选典型例题，对每一个例题进行分析，引导读者通过对条件和结论以及它们之间关系的分析，探究解题的思路，并在解题的基础上，进行反思，总结解题的规律。又编制各种不同类型、不同层次的习题，让读者通过练习，提高运算能力、思维能力、空间想象能力和分析问题、解决问题的能力。

2. 既能用于新知识的学习，又能作为复习的参考

本丛书在每一个单元设有"重点难点分析"的栏目，对中学数学的重要概念、定理、公式和法则，难学的数学知识和技能进行详细的剖析，并通过例题加以说明，指出在学习过程中应该注意的问题和可能产生的错误，使读者阅读以后能真正抓住重点知识、克服学习中的困难。每一单元后附有习题，题型多样，供读者初步熟悉和操练之用。通过这一部分内容的学习，可以使读者扎扎实实地学好新的数学知识。在每一章结束之前设有"知识提要"栏目，系统地归纳总结本章重要的知识，分类进行整理，帮助读者巩固所学的知识。接着有"例题精选"栏目，选择典型的、综合的问题进行讲解，提高读者灵活和综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力。还有"方法指导"栏目是本丛书的重要特色，从数学思想方法的高度对一章的内容进行概括，对读者进行学习方法和数学思想方法的指导。每一章还设有"复习题"栏目，选择综合性较强的问题，让读者通过练习沟通各种数学知识。这些栏目的设置，为读者复习巩固有关的数学知识，提供了丰富的参考资料。

3. 既能使基础较差的读者有所得益，又能使水平较高的读者有所提高

本丛书面向全体学生，可供不同水平的读者选用。书中有很多基本的内容、例题和习题，通过一步步的引导和适量的练习，使基础较差的学生能牢固地掌握基础知识和基本技能，达到基本的要求。同时又注意编写提高的、综合的、灵活运用的内容和习题，让水平较高的学生通过学习也能得到进一步的提高。在一章和一个阶段结束时的测试评估都分 A、B 两组，A 组是基本要求，B 组是较高要求，让读者根据自己的基础和要求选用。

本丛书由上海市著名的特级教师和部分高级教师负责编写工作，具体分工如下：六年

级:周齐、胡平;七年级:吴传发、唐棣;八年级:邹一心、孙兆桂;九年级:叶锦义、奚根荣;高一:李大元、张颂方;高二:胡仲威、何维安、钱民广、杨兴中;高三:忻再义、王春明。最后全书由奚定华修改和统稿。

由于时间仓促,书中错误和不足之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 11 月

目　录

第一章　集合与命题 …… 1

一、集合 …… 1

重点难点分析 …… 1

二、四种命题形式 …… 7

重点难点分析 …… 7

知识提要 …… 11

例题精选 …… 12

方法指导 …… 14

复习题一 …… 15

测试评估 …… 16

试卷 A …… 16

试卷 B …… 17

第二章　不等式 …… 19

一、不等式的基本性质 …… 19

重点难点分析 …… 19

二、不等式的解法 …… 25

重点难点分析 …… 25

知识提要 …… 35

例题精选 …… 36

方法指导 …… 40

复习题二 …… 41

测试评估 …… 42

试卷 A …… 42

试卷 B …… 43

第三章　复数初步 …… 44

一、复数的概念 …… 44

重点难点分析 …… 44

二、复数的四则运算 …… 47

重点难点分析 …… 47

三、实系数一元二次方程的解 …… 50

重点难点分析 …… 50

知识提要 …… 52

例题精选 …… 53

方法指导 …… 55

复习题三 …… 56
测试评估 …… 57
试卷 A …… 57
试卷 B …… 58
第四章　函数 …… 60
一、函数及其运算 …… 60
重点难点分析 …… 60
二、函数的基本性质 …… 76
重点难点分析 …… 76
知识提要 …… 90
例题精选 …… 91
方法指导 …… 99
复习题四 …… 100
测试评估 …… 102
试卷 A …… 102
试卷 B …… 103
总测试评估一 …… 105
试卷 A …… 105
试卷 B …… 106
第五章　指数函数与对数函数 …… 109
一、指数函数 …… 109
重点难点分析 …… 109
二、对数 …… 113
重点难点分析 …… 113
三、对数函数 …… 120
重点难点分析 …… 120
四、简单的指数方程与对数方程 …… 125
重点难点分析 …… 125
知识提要 …… 131
例题精选 …… 133
方法指导 …… 135
复习题五 …… 136
测试评估 …… 138
试卷 A …… 138
试卷 B …… 138
第六章　三角比 …… 140
一、任意角三角比 …… 140
重点难点分析 …… 140
二、三角恒等式 …… 145

重点难点分析…………………………………………………………… 145
三、解斜三角形…………………………………………………………… 150
重点难点分析…………………………………………………………… 150
知识提要…………………………………………………………… 155
例题精选…………………………………………………………… 157
方法指导…………………………………………………………… 159
复习题六…………………………………………………………… 161
测试评估…………………………………………………………… 162
试卷 A …………………………………………………………… 162
试卷 B …………………………………………………………… 163
第七章　三角函数…………………………………………………………… 166
一、三角函数…………………………………………………………… 166
重点难点分析…………………………………………………………… 166
二、反三角函数和最简三角方程…………………………………………………………… 173
重点难点分析…………………………………………………………… 173
知识提要…………………………………………………………… 177
例题精选…………………………………………………………… 178
方法指导…………………………………………………………… 180
复习题七…………………………………………………………… 182
测试评估…………………………………………………………… 183
试卷 A …………………………………………………………… 183
试卷 B …………………………………………………………… 184
总测试评估二…………………………………………………………… 186
试卷 A …………………………………………………………… 186
试卷 B …………………………………………………………… 187
答案…………………………………………………………… 190

第一章　集合与命题

一、集　　合

重点难点分析

1. 集合的概念

我们把某些能确切指定的对象看作一个整体,这个整体叫做一个**集合**,简称**集**。

例如,我们为了考察某所中学取得的成绩,把该中学的全体师生看成一个整体;某天 8 时,为了给某港口预报台风信息,把这一天 8 时在该港口内停泊的所有船只看成一个整体。

又如,为了研究某个方程,经常把该方程的所有解看成一个整体;为了研究计算机所使用的二进位数,把 0、1 两个数码看成一个整体;等等。

集合是一个不定义的原始概念。上述只是集合的描述性的说明,其中有"确切指定的对象"和"整体"两层意思。"确切指定的对象"是说组成集合的对象必须是"确切"的,又是人为"指定"的。例如,某平面内,与点 A 距离较远的点的全体不能构成集合。这是因为两点之间的距离多大才算较远不知道,即与点 A 距离较远的点不确切。构成集合的对象是"确切"的标准是,对任何一个对象,可以判断其是否在这个集合内,另外,构成集合的对象是根据需要"指定"的,不需要其他的理由。集合是一个"整体"我们容易理解。

集合中的各个对象叫做这个集合的**元素**。含有有限个元素的集合叫做**有限集**。含有无限个元素的集合叫做**无限集**。

例 1　判断下列集合是有限集还是无限集:

(1) 一切三角形内切圆构成的集合;

(2) 在某平面内,与该平面内的直线 l 平行的所有直线构成的集合;

(3) 某一天大众出租汽车公司拥有的汽车全体构成的集合。

分析　要断定一个集合是有限集只要确定该集合的元素个数是一个自然数;要断定一个集合是无限集必须确定该集合有无限个元素。

解　(1) 以任意点为圆心,任意长为半径的圆,必可作一个外切三角形。换句话说,任意一个圆必是某一个三角形的内切圆,故一切三角形的内切圆构成的集合是无限集。

(2) 对任意正数 d,在已知平面内部可作一条直线与直线 l 平行,且这两平行线的距离为 d。由于 d 有无数个,故在某平面内,与该平面内的直线 l 平行的所有直线构成的集合是无限集。

(3) 某一天大众出租汽车公司拥有的汽车数量必是一个自然数,故某一天大众出租汽车公司拥有汽车的全体构成的集合为有限集。

2. 集合的表示

集合的表示,常用的有列举法和描述法。

如果把集合的元素一一列举出来，并且写在大括号中，那么这种表示的方法叫做列举法。

例如，中国的直辖市的名称构成的集合可表示为

$$\{北京，天津，上海，重庆\}。$$

如果在大括号中先写出这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线的右边写上这个集合的元素的公共属性，那么这种表示集合的方法叫做描述法。

例如，所有质数构成的集合可表示为

$$\{p \mid p\ 为质数\}。$$

集合这两种表示法，各有优劣。列举法的优点是集合的元素一目了然，但通常表示元素个数不太多的有限集；列举法所能表示的无限集只能是像全体自然数的集合那样的"可排列"的无限集。表示无限集时，不仅要使用省略号，而且要写出可排列无限集的排列规律。例如，全体自然数的集合可表示成

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}。$$

描述法虽然集合的元素并不明显，但它的表达非常广泛，如果集合的元素用 x 表示，元素的公共属性用 $p(x)$ 表示，那么该集合可表示成 $\{x \mid p(x)\}$ 。

在表示集合间的关系时，还有所谓图示法，即用一些平面的图形(通常是圆)表示集合。

例 2 分别用列举法与描述法表示所有奇数构成的集合。

分析 奇数是不能被 2 整除的整数。奇数有正，有负。奇数有无限个。要正确表示奇数集的关键是把奇数表示成一般形式：$2k-1(k \in \mathbf{Z})$ 。

解 奇数集用描述法可表示为

$$\{x \mid x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}。$$

为了用列举法表示奇数集，我们把奇数排成正负交错，且绝对值不减的一列数：

$$\{1,\ -1,\ 3,\ -3,\ \cdots,\ 2k-1,\ -(2k-1),\ \cdots\}。$$

说明 (1) 奇数集的上述的描述法表示也可写成 $\{x \mid x=2k-1\ k \in \mathbf{Z}\}$。奇数集的描述法表示不是唯一的，也可表示成 $\{x \mid x=2k+1,\ k \in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{x \mid x=2k+3,\ k \in \mathbf{Z}\}$，等等。

(2) 用列举法表示奇数集也不是唯一的，也可表示成 $\{-1,\ 1,\ -3,\ 3,\ \cdots,\ -(2k-1),\ 2k-1,\ \cdots\}$ 或 $\{1,\ 3,\ -1,\ -3,\ 5,\ 7,\ -5,\ -7,\ \cdots,\ 2k-1,\ 2k+1,\ -(2k-1),\ -(2k+1),\ \cdots\}$，等等。

例 3 考察如下四个结论：

① $\frac{\pi}{5} \in \mathbf{Z}$； ② $\frac{\pi}{5} \in \mathbf{Q}^{+}$； ③ $\frac{\pi}{5} \in \mathbf{Q}$； ④ $\frac{\pi}{5} \in \mathbf{R}^{+}$。其中正确的有 ( )

(A) 1 个； (B) 2 个； (C) 3 个； (D) 4 个。

分析 有理数是整数与分数的统称。因而有理数必可写成 $\frac{m}{n}$ 的形式，其中 $m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}$。有必要时还可要求 $m,\ n$ 互质。由此推知两个有理数的四则运算(做除法时要求除数不为零)的结果仍是有理数。现在 π 为无理数，由此推知 $\frac{\pi}{5}$ 也为无理数。

解 如果$\frac{\pi}{5}$为有理数，那么$\pi = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)$将是有理数，但$\pi$是无理数，故$\frac{\pi}{5}$只能是无理数。

因此，四个结论中只有④正确。选(A)。

说明 不要将$\frac{\pi}{5}$误认为是分数。

3. 子集与真子集

A、B是两个集合。如果A非空集，且对任何一个$a \in A$，都有$a \in B$，那么就把集合A叫做集合B的**子集**，记作$A \subseteq B$（读作"A包含于B"）。

另外，我们规定，空集是任何集合的子集。

空集的子集只有一个，即空集。非空集合B的子集是空集，及由集合B的部分或全部元素构成的集合。

例4 写出集合$\{1, 2, 3\}$的所有子集。

分析 $\{1, 2, 3\}$是一个由三个元素组成的集合。它的子集不是很多，可用枚举的方法来写它的所有子集。

解 $\{1, 2, 3\}$的所有子集是

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$。

共8个。

说明 为了不遗漏地写出已知集合的所有子集，一般可先写空集，然后写一元子集，二元子集，等等。

可以证明，一个n元集合的子集共2^n个。

例5 求证：$\{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{Z}$。

分析 欲证$A \subseteq B$，按定义，只要证明$a \in A \Rightarrow a \in B$。

证：对任意$x \in \{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\}$，必存在两个整数$a$、$b$，使$x = a + b$。

因为任意两个整数的和还是整数，故x也是整数，即$x \in \mathbf{Z}$。

$\therefore \{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{Z}$。

对于两个集合A，B，如果$A \subseteq B$，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的**真子集**，记作$A \subset B$（读作"A真包含于B"）。

换句话说，$A \subset B$的意思是$A \subseteq B$，且$A \neq B$。因此，集合B的所有子集中，除去本身外，都是B的真子集。

例6 设A为所有平行四边形构成的集合，B为所有矩形构成的集合，C为所有正方形构成的集合，D为所有菱形构成的集合。试指出A、B、C、D之间存在的真包含关系。

解 因为正方形也是矩形，矩形也是平行四边形；但反过来，平行四边形一般不是矩形，矩形一般不是正方形，所以，$C \subset B \subset A$。

同理，$C \subset D \subset A$。

4. 集合的相等

A、B是两个集合。如果既有$A \subseteq B$，又有$B \subseteq A$，就说A与B相等，记作$A = B$。

从这个定义可知，集合的元素是不讲顺序的，也不讲重复的。因而在用列举法表示集合时，元素不能重复。

对两个集合，只要所含的元素完全相同，这两个集合就**相等**。这对判断两个有限集相等非常有用。例如，$\{x \mid 1 < x < 5,\ x \in \mathbf{N}\}$ 与 $\{2, 3, 4\}$ 相等。对一般的两个集合，要判断它们是否相等，必须按照两集合相等的定义。

例 7 求证：$\{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\} = Z$。

证：例 2 中已经知道 $\{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{Z}$。

又对任意 $x \in \mathbf{Z}$，可把 x 写成 $x + 0$，故 $x \in \{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\}$。所以，$\mathbf{Z} \subseteq \{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\}$。

综上所述，$\{x \mid x = a + b,\ a、b \in \mathbf{Z}\} = Z$。

5. 集合的交、并、补运算

由集合 A 和集合 B 的所有公共元素所组成的集合叫做 A、B 的**交集**，记作 $A \cap B$（读作“A 交 B”）。即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}。$$

数学中的很多问题都可以用集合的交来描述。例如：

(1) 记 A、B 分别为两个自然数 a、b 的所有正约数构成的集合，则 $A \cap B$ 是 a、b 的正的公约数构成的集合，$A \cap B$ 中的最大数便是 a、b 的最大公约数；

(2) 设 a_1、b_1 不全为零，a_2、b_2 也不全为零，记

$$A = \{(x,\ y) \mid a_1x + b_1y = c_1\},$$
$$B = \{(x,\ y) \mid a_2x + b_2y = c_2\},$$

则 $A \cap B$ 即是方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

的解集；

(3) 记 A 为所有矩形构成的集合，B 为所有菱形构成的集合，则 $A \cap B$ 表示所有正方形构成的集合。

例 8 设 $A = \left\{x \middle| \frac{10}{3} < x < 10\right\}$，$B = \{x \mid x = 3k,\ k \in \mathbf{N}\}$，求 $A \cap B$（用列举法表示）。

分析 A 是大于$\frac{10}{3}$，且小于 10 的实数全体，B 是自然数集 N 中的 3 的倍数的全体。为了要求 $A \cap B$，可先考察集合 A 中的自然数，即 4，5，6，7，8，9，然后把其中 3 的倍数取出即可。

解 $A \cap B = \{6, 9\}$。

例 9 设 $A = \{(x,\ y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \geqslant 0\}$，
$B = \{(x,\ y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \leqslant 0\}$，

求 $A \cap B$。

解 $\because \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$ 的解为 $y = 0$。

$\therefore A \cap B = \{(x,\ y) \mid x \in \mathbf{R},\ y = 0\}$。

即 $A \cap B$ 表示直角坐标平面内 x 轴上的点构成的集合。

由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A、B 的**并集**，记作 $A\cup B$（读作“A 并 B”），即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

我们要特别强调，上式中的“或”不能省。

用通俗的话说，$A\cup B$ 是 A 的元素合“并”B 的元素（重复的元素只用一个）所构成的新集合。

例 10 设 $A=\{x \mid x\in\mathbf{N},\ x\leqslant 40, x \text{ 能被 } 5 \text{ 整除}\}$，$B=\{x \mid x\in\mathbf{N},\ x\leqslant 40, x \text{ 能被 } 7 \text{ 整除}\}$，求 $A\cup B$。

分析 A、B 都是有限集。为了清晰地求出 $A\cup B$，可分别用列举法表示 A、B，然后求 $A\cup B$。

解 $A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$，$B=\{7, 14, 21, 28, 35\}$。

$\therefore A\cup B=\{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 40\}$。

例 11 设 $A=\{(x, y) \mid x\in\mathbf{R},\ y\geqslant 0\}$，$B=\{(x, y) \mid x\in\mathbf{R},\ y\leqslant 0\}$，求 $A\cup B$。

分析 点集 A 即为直角坐标平面内的上半平面（包括 x 轴），点集 B 即为直角坐标平面内的下半平面（包括 x 轴），故点集 $A\cup B$ 即为整个直角坐标平面。

解 $A\cup B=\{(x, y) \mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$。

由并集的定义可以知道，

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A,$$

$$A\subseteq A\cup B,\ B\subseteq A\cup B;$$

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B。$$

例 12 满足 $\{1, 3\}\subset A\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 A 共有几个？

分析 按题意，1, 3 都是集合 A 的元素，且 A 至少含有 3 个元素；A 中除 1、3 以外的元素都属于 $\{2, 4, 5, 6\}$。因此 $A=\{1, 3\}\cup B$，其中 B 是 $\{2, 4, 5, 6\}$ 的非空子集。集合 A 的个数即是集合 B 的个数。

解 按题意，$A=\{1, 3\}\cup B$，而 B 是 $\{2, 4, 5, 6\}$ 的非空子集。

因 $\{2, 4, 5, 6\}$ 共有 $2^4-1=15$ 个非空子集，故不同的 A 也有 15 个。

在研究集合与集合之间的关系时，这些集合往往是某个给定集合的子集。这个给定的集合叫做全集，用符号 I 表示。例如在研究数的集合时，常把实数集 R 看作全集；在研究多项式的集合时，常把所有多项式构成的集合看作全集，等等。

已知全集 I，集合 $A\subseteq I$。由 I 中所有不属于 A 的元素全体所组成的集合叫做集合 A 在集合 I 中的**补集**，记作 $\overline{A}$（读作“A 补”），即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in I,\ x\notin A\}。$$

例 13 设全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A=\{2, 3\}$，$B=\{3, 4\}$，则 $\overline{A\cup B}=$ ________。

解 $A\cup B=\{2, 3, 4\}$，

$\overline{A\cup B}=\{1, 5\}$。

例 14 已知全集 $I=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 10,\ x\in \mathbf{N}\}$，

$$A=\{x \mid 0<x\leqslant 10, x\text{ 为偶数}\},$$

$$B=\{x \mid 0<x\leqslant 10, x\text{ 为质数}\},$$

求$\overline{A\cup B}$诸元素的积及$\overline{A\cap B}$诸元素的和。

分析 为解题方便，可先用列举法表示 I、A、B 三个集合，然后求$\overline{A\cup B}$，$\overline{A\cap B}$及它们诸元素的积及和。

解 $I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$，

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，

$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$。

$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$，

$A\cap B=\{2\}$。

$\overline{A\cup B}=\{1,\ 9\}$，

$\overline{A\cap B}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$。

$\therefore$ $\overline{A\cup B}$诸元素的积为 $1\cdot 9=9$；$\overline{A\cap B}$的诸元素的和为 $1+3+4+5+6+7+8+9+10=53$。

习 题 1.1

1. 用列举法表示集合 $\left\{x \,\middle|\, |x|<\dfrac{5}{2},\ x\in \mathbf{Z}\right\}$。

2. 用列举法和描述法表示偶数集。

3. 判断下列集合是有限集还是无限集：

(1) 方程 $5x+7y=41$ 的正整数解$(x,\ y)$构成的集合；

(2) 一切实系数一元二次方程构成的集合。

4. 试举两个实数 a、b，使 $a\overline{\in}\mathbf{Q}$，$b\overline{\in}\mathbf{Q}$，且 $a+b\in\mathbf{Q}$。

5. 已知集合 $A=\{x \mid x^2<20\}$，则下列四个结论中正确的是　　(　　)

(A) $3\sqrt{2}\subset A$；　(B) $\{3\sqrt{2}\}\subset A$；　(C) $3\sqrt{2}\notin A$；　(D) $\{3\sqrt{2}\}\in A$。

6. 写出自然数集 N 的各元素和为 10 的所有子集。

7. 求证：$Q=\{x \mid x=ab,\ a、b\in\mathbf{Q}\}$。

8. (1) 求证：自然数集 N 的含有有限个元素的子集必是 N 的真子集；

(2) 自然数集 N 有没有含有无限个元素的真子集？为什么？

9. 设 $A=\{(x,\ y) \mid x\in\mathbf{R},\ y\geqslant 0\}$，$B=\{(x,\ y) \mid x\in\mathbf{R},\ y\leqslant -1\}$，求 $A\cap B$。

10. 设 A 为所有平行四边形构成的集合，B 为所有梯形构成的集合，求 $A\cap B$。

11. 设 A 为所有平行四边形构成的集合，B 为所有圆内接四边形构成的集合，求 $A\cap B$。

12. 设集合 $M=\{x \mid x^2-mx+6=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，且 $M\cap\{2,\ 3\}=M$，求实数 m 的取值范围。

13. 设 $A=\{x \mid 0<x<2\}$，$B=\{x \mid 2\leqslant x<3\}$，求 $A\cup B$。

14. 将集合$\{a,\ b,\ c,\ d\}$写成 $A\cup B$ 的形式，其中 $A\cap B=\varnothing$，要求写出所有不同写法($A\cup B$ 与 $B\cup A$ 认为是同一种写法)。

15. (1) 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{x \mid x=2a, a\in A\}$,求 $A\cup B$。

(2) 设 $A=\{a \mid -1<a<2\}$, $B=\{x \mid x=2a, a\in A\}$,求 $A\cup B$。

16. 设全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{3, 4, 6\}$,则 $A\cup\overline{B}$ 中元素的个数为 ( )

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6。

17. 设 $I=\{a, b, c, d, e\}$, $A=\{a, c, d\}$, $B=\{b, d, e\}$,求 $\overline{A}\cap\overline{B}$。

18. 设 $I=R$, $A=\{x \mid x\leqslant 1+\sqrt{2}, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$,则 $\overline{A}\cap B$ 等于 ( )

(A) $\{4\}$; (B) $\{3, 4\}$; (C) $\{2, 3, 4\}$; (D) $\{1, 2, 3, 4\}$。

19. 设全集 $I=R$, $A=\left\{x \middle| -4<x<\frac{1}{2}\right\}$, $B=\{x \mid x\leqslant -4\}$, $C=\left\{x \middle| x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$,则下列关系中正确的是 ( )

(A) $C=A\cap B$; (B) $C=A\cup B$;

(C) $C=\overline{A\cap B}$; (D) $C=\overline{A\cup B}$。

二、四种命题形式

重点难点分析

1. 命题与推出关系

我们知道,命题有真有假。如何判断命题的真假是数学中的一个重要课题。

要断言一个命题是真的,必须给出证明,要指出一个命题是假的,可以举一个反例,即举一个满足命题条件,而不满足命题结论的例子。

例 1 判断下列命题的真假:

(1) p、$q\in\mathbf{Z}$。如果 p^3+q^2 为奇数,那么 $p+q$ 也为奇数。

(2) $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 是两个四边形。如果 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$,那么四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$。

(3) $ABCD$ 为梯形,且 $AB\parallel CD$。如果 $ABCD$ 内接于圆,那么 $AD=BC$。

分析 (1) 我们知道,两个奇数或两个偶数的和为偶数,一个奇数一个偶数的和为奇数,因而可从 p^3+q^2 的奇偶性来推断 p^3、q^2 的奇偶性。

另一方面,奇数的自然数指数幂为奇数,偶数的自然数指数幂仍为偶数。因此,从 p^3、q^2 的奇偶性再推断 p、q 的奇偶性。最后判断 $p+q$ 的奇偶性。

(2) 四边形相似要求所有的对应角相等,同时对应边成比例。两个四边形对应角相等不能推出对应边成比例,这可在特殊四边形内寻找反例。

(3) 因为圆内两平行弦所夹的弧相等,从而可知圆内接梯形必为等腰梯形。具体证明可利用轴对称性质。

解 (1) $\because p$、$q\in\mathbf{Z}$, $\therefore p^3$、$q^2\in\mathbf{Z}$。

已知 p^3+q^2 为奇数。如果 p^3, q^2 两个都是奇数或两个都是偶数,那么 p^3+q^2 就是偶数,与 p^3+q^2 为奇数矛盾,因此 p^3、q^2 必一奇一偶。$\because$ 奇数的平方或立方仍然是奇数,偶

数的平方或立方仍然是偶数，∴ p、q 也是一奇一偶，故 $p+q$ 为奇数。

∴ 这个命题是真命题。

(2) 这个命题是假命题，反例可取 $ABCD$ 为正方形，$A'B'C'D'$ 为非正方形的矩形。此时 $\angle A=\angle A'=90°$，$\angle B=\angle B'=90°$，$\angle C=\angle C'=90°$，但正方形 $ABCD$ 不与矩形 $A'B'C'D'$ 相似。

(3) 这个命题是真命题。证明如下：

∵ $ABCD$ 内接于圆，

∴ AB、CD 为圆的两条弦。

∵ $AB \parallel CD$，

∴ $BC=AD$。

说明 举反例有时需要构造，有一定难度。但是有不少的情况，可以考虑一些特例。如第(2)题中正方形和非正方形的矩形就是四边形的特例。

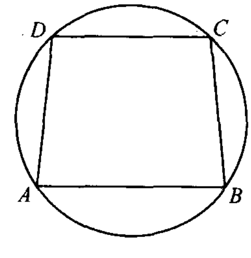

图 1-1

如果 α 这件事成立可以推出 β 这件事也成立，那么就说由 $\boldsymbol{\alpha}$ **推出** $\boldsymbol{\beta}$，并用记号 $\boldsymbol{\alpha \Rightarrow \beta}$ 表示。

这里的"这件事"也可理解为"某种明确的特性"。$\alpha \Rightarrow \beta$ 表示一种推出关系。这是数学证明中最重要的逻辑关系。按照推出关系的意义，"$\alpha \Rightarrow \beta$" 是真命题。

推出关系满足下面的传递性：

如果 $\alpha \Rightarrow \beta$，$\beta \Rightarrow \gamma$，那么 $\alpha \Rightarrow \gamma$。

为了要证明一个命题正确，可以从已知条件出发，依据所学过的公理、公式、定理进行逐步推理，从而得出结论。也就是说，要证明命题"如果 α，那么 β"正确，可先设法找出一串适当的并且是正确的命题 $\alpha \Rightarrow \alpha_1$，$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$，…，$\alpha_n \Rightarrow \beta$，再由推出关系的传递性就可断定 $\alpha \Rightarrow \beta$。这种证明一般叫做直接证明。此外，还有间接证明，如反证法、同一法等。

2. 四种命题形式和等价命题

我们已经知道，一个命题"如果 α，那么 β"中，α 是命题的条件，β 是命题的结论。

记 α 的否定为 $\bar{\alpha}$，β 的否定为 $\bar{\beta}$。

如果在 α、β 或 $\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$ 中，一个作命题的条件，另一个作命题的结论，那么可派生出另外三个命题：

如果 β，那么 α；

如果 $\bar{\alpha}$，那么 $\bar{\beta}$；

如果 $\bar{\beta}$，那么 $\bar{\alpha}$。

它们分别称为命题"如果 α，那么 β"的**逆命题、否命题、逆否命题**。此时，命题"如果 α，那么 β"叫做原命题。

我们把"如果 α，那么 β"与"如果 β，那么 α"叫做**互为逆命题**；把"如果 α，那么 β"与"如果 $\bar{\alpha}$，那么 $\bar{\beta}$"叫做**互为否命题**；把"如果 α，那么 β"与"如果 $\bar{\beta}$，那么 $\bar{\alpha}$"叫做**互为逆否命题**。

这样，如果把一个已知命题看作原命题，那么可以构造另外三个命题。

例 2 把"已知 $ABCD$ 为梯形，且 $AB \parallel CD$。如果 $ABCD$ 内接于圆，那么 $AD=BC$" 看作原命题，试写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并指出它们正确与否。

分析 本例中，"已知 $ABCD$ 为梯形，且 $AB \parallel CD$" 是命题总前提，"$ABCD$ 内接于圆"

是条件，“$AD = BC$”是结论。在写出原命题的另外三种命题形式时，命题总前提不变，该变动的是命题的条件与结论。

解 逆命题：已知 $ABCD$ 为梯形，且 $AB \parallel CD$。如果 $AD = BC$，那么 $ABCD$ 内接于圆。

否命题。已知 $ABCD$ 为梯形，且 $AB \parallel CD$。如果 $ABCD$ 不能内接于圆，那么 $AD \neq BC$。

逆否命题。已知 $ABCD$ 为梯形，且 $AB \parallel CD$。如果 $AD \neq BC$，那么 $ABCD$ 不能内接于圆。

它们都是真命题。

原命题正确的证明参见 § 1.6 例 1(3)。

逆命题正确的证明如下：

$\because$ $ABCD$ 为等腰梯形，且 AD、BC 为腰，$\therefore$ $\angle A = \angle B$，且 $\angle A + \angle D = 180°$。于是 $\angle B + \angle D = 180°$，故 A、B、C、D 四点共圆，即 $ABCD$ 内接于圆。

否命题正确的证明可用反证法。若 $AD = BC$，则由逆命题正确知 $ABCD$ 内接于圆。这与否命题的条件矛盾，故只能 $AD \neq BC$。

同样，逆否命题正确的证明也可用反证法。这里从略。

说明 四种命题形式的构成不难理解，但给出一个命题，要正确写出它另外三种形式的关键是分清命题的条件和结论。必要时可先将命题改写成“如果…，那么…”的形式。

通过例子，我们发现，互为逆否命题的两个命题同真同假。这个结论也是可以证明的。

设甲、乙为两个命题。如果甲 $\Leftrightarrow$ 乙，那么甲、乙两个命题叫做等价命题。

于是互为逆否命题的两个命题是等价命题。正因为如此，在证明某个命题有困难时，有时可用证明它的逆否命题来代替证明原命题。

例 3 设 $a \in \mathbf{Z}$，$n \in \mathbf{N}$，求证：如果 a^n 为奇数，那么 a 为奇数。

证，为方便，我们改证原命题的逆否命题：设 $a \in \mathbf{Z}$，$n \in \mathbf{N}$，如果 a 为偶数，那么 a^n 为偶数。

$\because$ a 为偶数，$\therefore$ a 可写成 $2k$，其中 $k \in \mathbf{Z}$。于是

$$a^n = (2k)^n = 2(2^{n-1}k^n)。$$

$\because$ $2^{n-1}k^n \in \mathbf{Z}$，$\therefore$ a^n 为偶数。

由于原命题的逆否命题正确，所以原命题正确。

3. 充分条件　必要条件

在前面推出关系中知道，$\alpha \Rightarrow \beta$ 表示如果 α 这件事成立，那么 β 这件事也成立。这时我们就把 α 叫做 β 的**充分条件**，也可说成 β 是 α 的**必要条件**。

例 4 “a、$b \in \mathbf{R}^+$”是“$ab \in \mathbf{R}^+$”的什么条件？为什么？

分析 两个正数的积为正数；但两个数的积为正数时，只能说明这两个数同号，不一定都是正数，可能两个都是负数。据此可得本例的解。

解 当 a、$b \in \mathbf{R}^+$ 时，必有 $ab \in \mathbf{R}^+$，即“a、$b \in \mathbf{R}^+$”$\Rightarrow$“$ab \in \mathbf{R}^+$”。

但当 $ab \in \mathbf{R}^+$ 时，未必有 a、$b \in \mathbf{R}^+$。例如当 a、$b \in \mathbf{R}^-$ 时，仍有 $ab \in \mathbf{R}^+$。

$\therefore$“a、$b \in \mathbf{R}^+$”是“$ab \in \mathbf{R}^+$”的充分条件，但非必要条件。

例 5 已知集合 A、B，且 $A \neq \varnothing$，则“$A \cap B = \varnothing$”是“$B = \varnothing$”的什么条件？为什么？