SHUXUE WULI FANGCHENG YU TESHU HANSHU

数学物理方程与特殊函数

主编 于涛

哈尔滨工程大学出版社

数学物理方程与特殊函数

主编　于　涛
主审　沈继红

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数/于涛主编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2005
ISBN 7-81073-760-0

Ⅰ.数…　Ⅱ.于…　Ⅲ.数学物理-高等学校-教材　Ⅳ.O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第062304号

内容简介

本书是根据全国高校工科数学课程教学指导委员会所制定的《数学物理方程与特殊函数》教学基本要求编写的。全书共九章，介绍了三类典型数学物理方程及其解法；讨论了贝塞尔函数及勒让德多项式的基本性质及应用；简要介绍了积分方程、变分法及近似解。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供工程技术人员、数学系师生参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市东大直街124号
发行部电话(0451)82519328　邮编：150001
新华书店经销
哈尔滨工业大学印刷厂印刷
*
开本850mm×1 168mm　1/32　印张7.5　字数184千字
2006年3月第1版　2006年3月第1次印刷
印数：1—2 000册
定价：10.00元

前　　言

数学物理方程的研究对象是具有物理背景的偏微分方程(组),它通过对三类具有典型意义的模型方程的深入剖析,阐明了偏微分方程的基本理论、解题的典型技巧以及它们的物理背景。把数学理论、解题方法与工程实际这三者有机地结合在一起,这是本课程区别于其他课程的显著特点。

本书编写时考虑了与大学数学课程内容的衔接,考虑了方法和符号的一致,保持数学系列课程体系上的统一。针对工科学生的特点,在文字和内容上,我们力求理论脉络尽可能清晰一些,方法技巧尽可能拓宽一些,数学推演尽可能简洁一些。为了达到易教易学的目的,本书不追求理论体系的完整性,而是注重内容的可读性与实用性。

本书共分九章,前六章介绍本课程的经典内容、数学物理方程的一些基本概念及三类典型方程,分离变量法,行波法,平均值法,积分变换法,格林函数法等,还探讨了贝塞尔函数及勒让德多项式的应用;后三章中,介绍了在工程实践中应用广泛的非线性偏微分方程及积分方程,并简要介绍了变分法、解析近似解及数值近似解等内容。书中的习题由徐润章提供并给予解答。

感谢哈尔滨工程大学的支持。感谢99级~03级中那些踊跃提问的同学,你们智慧的火花指明了我写作的方向。尤其要感谢苏景辉教授,关于数学物理问题多次有趣的探讨,使我受益匪浅。

本书可作为高等学校工科各专业的教材,也可供相关的理科

学生、工程技术人员参考。由于写作仓促，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　录

绪　论

18世纪,微积分产生之后,人们利用微分方程对力学、物理学中的一些问题和规律进行了深入探索.人们研究了质点的位移随时间的变化而发生改变的规律,电流电压与变化着的时间之间的关系,总结出了描绘这类现象内在规律的数学模型——常微分方程.在科学技术日新月异发展的过程中,用只含有一个自变量的常微分方程,描述人们所研究的所有问题显然不行.例如,流动的物体,其内部的温度、密度等物理量不仅与时间有关,同时还和其所处的空间位置有关,因此要用含有多个自变量的函数来描述这类物理现象.这样,偏微分方程的理论就产生了.

人们把含有某未知多元函数的偏导数的方程称为偏微分方程.

我们将表示物理量在空间或时间中变化规律的偏微分方程称为数学物理方程.

数学物理方程是以物理学、力学及工程技术中的具体问题为研究对象的,其基本任务有以下两个方面:

第一,建立描绘某类物理现象的数学模型,并提供这些问题的求解方法;

第二,通过理论分析,研究客观问题变化发展的一般规律.

通过对物理现象的分析,我们能得到表达某类物理现象共同规律的数学表达式——偏微分方程,也称之为泛定方程.偏微分方程只给出了未知函数(它可以是电场强度、磁场强度、电势、位移、温度等)在邻近点和邻近时间所取值之间的关系,即表明在一个物理过程中,物理量怎么由一个时刻或某一个地点连续地变化到邻近时刻或邻近地点的规律.仅靠这些揭示"共性"的方程无法确定一个完整的物理过程,因此我们还要分析伴随这一过程发生

的具体条件,一般情况下要考查初始条件与边界条件,我们称之为定解条件.泛定方程表达同一类物理现象的共性,是解决问题的依据;定解条件反映的是具体问题的个性,是确定具体现象的准则.泛定方程加定解条件就构成了数学物理中的定解问题.在本课程中,我们主要介绍各种定解问题的求解方法.

数学物理方程有如下两个显著的特点.

(1) 它广泛地运用数学诸多领域的成果.自然现象是复杂的、多样的,数学物理方程中所研究的问题也是复杂的、多样的,所以要应用不同的数学工具来解决性质不同的问题.

(2) 数学物理方程源于工程实际问题,自然现象本身所蕴含的内在规律,对人们寻求解决问题的思路有着重要的启迪.数学物理方程中的许多重要求解方法,都可以在自然现象中找到它们的来源.

本课程范围广泛,内容复杂,综合性强.我们力求做到陈述简单,条理清晰,对许多基本理论采取述而不证的方式.我们采用粗线条的直观的分析,着重于分析和阐明理论概念和方法的渊源与意义,在介绍经典理论的同时,适当地介绍一些现代的数学物理方法.

第 1 章　典型方程的推导及基本概念

本章论述偏微分方程及其定解问题有关的基本概念和物理模型，论述某些一般性的原理、方法．这样，对从总体上了解课程的特点、内容、方法有重要的作用．由于我们要讨论的这些偏微分方程都来自物理问题，因此我们先研究如何推导出这些方程，并给出相应的定解条件．最后简单地介绍一下二阶线性偏微分方程的分类．

1.1　弦振动方程与定解条件

数学物理方程中研究的问题一般具备下述两个方面：一方面是描述某种物理过程的微分方程；另一方面是表示一个特定的物理现象的具体条件的数学表达式．我们通过推导弦的振动方程引入这些方面的具体内容．

1.1.1　方程的导出

设有一根理想化的细弦，其横截面的直径与弦的长度相比非常小，整个弦可以任意变形，其内部的张力总是沿着切线的方向．

设其线密度为 ρ，长度为 l，平衡时沿直线拉紧，除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力的影响．下面研究弦作微小横向振动的规律．建立坐标系如图 1 - 1，所谓横向，是指运动全部在某一包含 x 轴的 xu 平面内进行，且在振动过程中，弦上各点在 x 轴方向上的位移比在 u 轴方向上的位移小得多，前者可以忽略不计．因此用时刻 t、弦上的横坐标为 x 的点在 u 轴方向上的位移 $u(x,t)$ 来描述弦的运动规律．所谓“微小”，不仅指振动的

幅度 $u(x,t)$ 很小，同时认为任意位置处切线的倾角也很小，即 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$.

t 时刻，任选一段弦，其每一点的位置如图 1 - 1 所示. 其中 $u(x,t) = |MN|$，且

$$|\overset{\frown}{M'M}| = \mathrm{d}s$$

现在建立位移 $u(x,t)$ 满足的方程. 首先，我们将小弦段 $|\overset{\frown}{M'M}|$ 上的运动，近似认为一个质点在运动. 根据牛顿运动定律，作用于质点上的合外力等于质点的质量乘以该方向上的加速度. 因此，我们分析弦段 $|\overset{\frown}{M'M}|$ 在 t 时刻的受力情况.

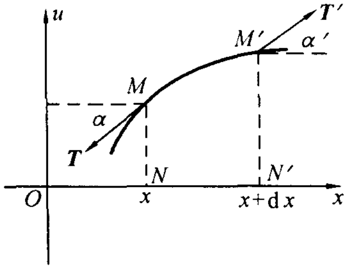

图 1 - 1

在 x 轴方向，弦段 $|\overset{\frown}{M'M}|$ 受力总和约为

$$F_x = -T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$$

因为弦只作横向振动，在 x 轴方向没有位移，因此合力为 0，即

$$T'\cos\alpha' = T\cos\alpha \tag{1.1.1}$$

由于振动是微小的，因此任意位置处切线的倾角很小，即 α, α' 近似为 0，由泰勒公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

当略去高阶无穷小的各项时，有

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \cos\alpha' \approx 1$$

代入式(1.1.1) 便可以近似得到

$$T' = T$$

在 u 轴方向上，弦段 $|\overset{\frown}{M'M}|$ 受力的总和为

$$F_u = -T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g \mathrm{d}s$$

因为 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$,所以有

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$$

弧段 $|\widehat{M'M}|$ 在 t 时刻,沿 u 方向运动的加速度近似为 $\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$, $\bar{x}$ 为弧段 $|\widehat{M'M}|$ 的质心.所以

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g \mathrm{d}s = \rho \mathrm{d}s \frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

即

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g \mathrm{d}x \approx \rho \frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

由微分中值定理可得

$$T\frac{\partial^2 u(x+\theta\mathrm{d}x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x - \rho g \mathrm{d}x = \rho \frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

令 $\mathrm{d}x \to 0$,则 $x + \theta\mathrm{d}x \to x, \bar{x} \in [x, x+\mathrm{d}x], \bar{x} \to x$,所以

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho g = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + g$$

通常情况下,张力较大时弦振动速度变化很快,即 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ 比 g 大得多,所以 g 可以略去.令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$,得到 u 满足的微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.2}$$

称式(1.1.2)为弦振动方程,未知函数 u 只含有2个自变量 x, t,其中 t 表示时间,x 表示空间位置,因此该方程又叫一维波动方程.

在振动过程中,如果弦上还受到一个与振动方向平行的外力,

t 时刻弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$，则描绘小弧段 $|\widehat{M'M}|$ 的状态的方程为

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0$$

$$F\mathrm{d}s - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s = \rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

应用上述推导可得弦的强迫振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1.1.3)$$

式中，$f(x,t) = \dfrac{1}{\rho}F(x,t)$，表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力，与函数 $u(x,t)$ 无关的项 $f(x,t)$ 又称为自由项.含有非零自由项 $f(x,t)$ 的方程称为非齐次方程，若 $f(x,t) \equiv 0$，则方程称为齐次方程.因此，式(1.1.2) 为齐次一维波动方程，式(1.1.3) 称为非齐次一维波动方程，它们分别刻画了在不受外力和受外力的情况下，均匀弦微小横振动的一般规律.

1.1.2 定解条件

一般弦线的特定振动状态还依赖于初始时刻弦的状态和通过弦线两端所受外界的影响.为了确定一个具体的弦振动的规律，除了列出方程外，还需要写出它满足的初始条件和边界条件，我们统称之为定解条件.

初始条件，即在初始时刻 $t = 0$ 时，弦上各点的位移和速度.

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (0 < x < l) \qquad (1.1.4)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 < x < l) \qquad (1.1.5)$$

式中，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为已知函数，当 $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ 时，称之为齐次初始条件.

对于变量 x，为了确定弦的振动还需给出边界条件.由物理学得知，弦在振动时，其端点(以 $x = l$ 表示这个端点) 所受的约束情

况通常有以下三种。

固定端.即弦在振动过程中,该端点始终固定不动,位移是0.对应这种状态的边界条件为

$$u(x,t)\big|_{x=l}=0 \quad 或 \quad u(l,t)=0$$

自由端.即弦的这个端点可以在垂直于 x 轴的轨道上自由滑动,不受垂直方向的外力,从而该端点在位移方向上的张力应该为零.由推导过程知,对应此种状态的边界条件为

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$$

弹性支承端.即弦的一个端点固定在弹性支承上,弹性支承伸缩符合虎克(Hooke)定律.如果弹性支承原来的位移为 $u=0$,则 $u\big|_{x=l}$ 表示弹性支承在该点的伸长.此时,弦对支承的拉力,在垂直方向的分量为

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$$

应该等于 $ku\big|_{x=l}$,即

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-ku\big|_{x=l},或$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\bigg|_{x=l}=0$$

式中,$\sigma=k/T$,k 为弹性支承的倔强系数.

从数学的角度出发,我们可以将上述三种边界条件归纳为更一般的情形.

若在边界 Γ 上直接给出了未知函数 u 的数值,即

$$u\big|_{\Gamma}=f_1(t)$$

这种形式的边界条件称为第一类边界条件.

若在边界 Γ 上给出了未知函数 u 沿 Γ 的外法线方向的方向导

数，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Gamma} = f_2(t)$$

这种形式的边界条件称为第二类边界条件.

同样，我们称

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u\right)\right|_{\Gamma} = f_3(t)$$

为第三类边界条件.

这里的$f_i(t)(i = 1,2,3)$都是定义在边界S上的已知函数，若$f_i(t) \equiv 0(i = 1,2,3)$，则称这类边界条件是齐次的，否则就称之为非齐次边界条件.

如果我们考虑一块平面薄膜的微小振动，则会得二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

在电动力学中，电磁波的传播方程也具有类似的形式，在一般情况下可表示为三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

1.2 热传导方程与定解条件

众所周知，如果空间某物体G内各点处的温度不同，则热量就会从温度较高的点向温度较低的点流动，这种现象就叫热传导.由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的不同而变化，因此解决热传导问题实质是求物体内部温度的分布.我们用$u(x,y,z,t)$表示物体G内点(x,y,z)在t时刻的温度.下面来推导在传热过程中，温度函数u所满足的偏微分方程.与上一节类似，我们首先考虑一个含有点(x,y,z)的小区域的温度，然后再设

法过渡到点(x,y,z)的温度.

1.2.1 方程的导出

热的传播符合傅里叶(Fourier)实验定律:物体在无穷小时段$\mathrm{d}t$内,流过一个无穷小面积$\mathrm{d}S$的热量$\mathrm{d}Q$与时间$\mathrm{d}t$、曲面的面积$\mathrm{d}S$及物体温度u沿曲面$\mathrm{d}S$的法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$三者成正比,即

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{1.2.1}$$

式中,$k = k(x,y,z)$称为物体在点(x,y,z)处的热传导系数,当物体为均匀且各向同性的导热体时,k取常数.由于热量的流向与温度的梯度方向相反,所以上式中含有一个负号.

在物体G内任取一闭曲面Σ,它所包围的区域记为Ω,则从时刻t_1到时刻t_2,经过曲面Σ流入区域Ω的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\oiint_{\Sigma} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t \tag{1.2.2}$$

式中,$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$表示$u$在曲面$\Sigma$上的沿外法向方向的方向导数.

流入的热量使Ω内部的温度发生了变化,在时间间隔(t_1,t_2)中,区域Ω内各点的温度由$u(x,y,z,t_1)$变化到$u(x,y,z,t_2)$,这一过程所需要的热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V \tag{1.2.3}$$

式中,c为物体的比热;ρ为物体的密度.

如果所考虑的物体内部没有热源,由热量守恒可得$Q_1 = Q_2$,则

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\oiint_{\Sigma} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t = \iiint_{\Omega} c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V \tag{1.2.4}$$