高职高专规划教材

高等数学

王建荣　景妮琴　编

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高职高专规划教材

高等数学

王建荣　景妮琴　编

中国计量出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/王建荣，景妮琴编．—北京：中国计量出版社，2006.8
高职高专规划教材
ISBN 7-5026-2421-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②景…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 063435 号

内 容 提 要

本书是作者在多年从事课程改革和教学研究的基础上，专为高职高专编写的一本高等数学教材。其特点是结合高职教育的特点和学生的基础状况，适度降低理论水平，注重培养学生运用数学思想、方法解决实际问题的能力。在教学内容的编排上，依据教学经验注意分清知识层次与侧重点。本书教学时数不超过 140 学时。

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、函数的积分、空间解析几何、二元函数的微分、二重积分、常微分方程、级数与拉普拉斯变换、概率初步、数据处理方法等十二章。书中各节后均附有习题，书末附有答案。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码　100013
电话（010）64275360
http：//www.zgjl.com.cn
北京密东印刷有限公司印刷
新华书店北京发行所发行

*

787 mm×960 mm　16 开本　　印张 23.25　字数 431 千字
2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月第 1 次印刷

*

印数 1—3 100　　　**定价：** 26.00 元

前　言

本书是作者在多年从事课程改革和教学研究的基础上，根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的一本高等数学教材。

本书的编写原则是：夯实基础，强化能力，立足应用，服务专业，突出工具性。具有以下特点：

1. 力求从实际问题中引出数学概念，利用数学概念的图形和数值特性，揭示概念的本质，强化数学概念与实际问题的联系。

2. 教学内容的选取比较全面，基本满足了工科专业对数学的要求。

3. 一元函数微积分的每一章都加入了一节“进一步知识”的内容，使教学更具灵活性，同时也满足了不同状况的学生的需求。

4. 广泛征求了专业课教师的意见，体现了必须、够用和为专业服务的原则，力争为专业课教学打下坚实的基础。

5. 结合高职教育的特点，适度降低理论水平，采用数形结合与描述的方法阐明数学概念和验证定理，并且注重培养学生用数学思想、方法解决实际问题的能力。

6. 本书内容简明、条理清晰、语言简练、通俗直观，并依据教学经验把握侧重点。

7. 书中例题较多，用以训练解题方法和思路，有利于学生掌握知识。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和不当之处在所难免，恳请同行和读者指正。

编　者

2006 年 5 月

目　录

第一章　函　　数

高等数学的核心是微积分学，函数是微积分学研究的对象. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数的概念及其性质，并介绍初等函数和建立函数关系，为微积分的学习打下基础.

第一节　函数概念及其简单性质

一、函数的概念

1. 几个实例

(1)使用智能型电表的用户每次最多可以购买 2000 kW·h 的电量. 如何了解这些用户的用电情况？表 1—1 给出了某个家庭某年 1 月到 12 月的用电量.

表 1—1

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
用电量(kW·h)	96	112	91	82	76	105	118	109	93	81	101	95

(2)气温是随着时间的变化而变化的，如何表示某天的气温与时间的变化关系？图 1—1 是某气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜的温度变化规律. 其中横坐标是时间 t，纵坐标是温度 T/℃.

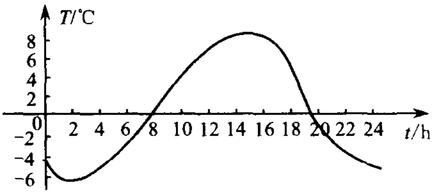

图 1—1

(3)用长为 20m 的绳子围出一个矩形，则所得矩形的面积 S 和一条边长 x 之间的关系为

$$S = x(10 - x).$$

(4)乘坐某种出租汽车，行驶路程不超过 3 km 时，付费 10 元；行驶路程超过 3 km 时，超过部分每 1 km 付费 1.6 元. 假定汽车行驶中没有等候时间，则付

费金额 y 与行驶路程 x 之间的关系为

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3\\ 5.2+1.6x, & x>3\end{cases}.$$

2. 函数的定义

以上各例都体现了在某一特定过程中，两个变量之间的依赖关系(即对应法则)，并且当其中一个变量在某一范围内取值时，另一个变量按照对应法则就有确定的值与之对应．两个变量的这种对应关系实质上就是函数关系．下面给出函数的定义：

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．如果对于每一个值 $x\in D$，按照某种对应法则 f，变量 y 都有确定的值和它对应，那末 y 就叫做定义在数集 D 上的关于 x 的函数，记作 $y=f(x)$．集合 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$．当 x 取遍 D 中的所有值时，对应的函数值的集合 M，叫做函数的值域．即

$$M=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

函数定义中对应法则的记号 f 也可以改用其他字母，如“F”，“φ”等，这时函数就记作 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等．如果在同一个问题中需要同时讨论几个不同的函数，则要用不同的函数记号．

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有惟一的 $y\in M$ 与它对应，那么这种函数就称为单值函数，否则就称为多值函数．例如，以原点为圆心，1 为半径的圆的方程为

$$x^2+y^2=1,$$

由这个方程所确定的函数就是多值函数

$$y=\pm\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1].$$

以后如果没有特别说明，所研究的函数都是指单值函数．

3. 函数的两个要素

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素．

在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定．对于用解析式表示的函数，如果不考虑其实际意义，则函数的定义域就是使其解析式有意义的自变量的取值范围．

两个函数相同的充分且必要条件是它们的定义域和对应法则完全相同．

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应法则都相同，所以它们是相同的函数．

又如，函数 $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$，它们的定义域不同，所以它们不是相同的函数.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(2-x)+\sqrt{16-x^2}$； (2) $y=\dfrac{1}{x}+\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

解 (1)因为对数式中的真数要大于零、偶次方根中被开方数要非负，所以有

$$\begin{cases}2-x>0\\16-x^2\geqslant 0\end{cases}，\quad 即 \quad \begin{cases}x<2\\-4\leqslant x\leqslant 4\end{cases}，$$

因此，函数的定义域为 $[-4，2)$.

(2)因为分式中的分母不能是零、反正弦函数自变量的绝对值不大于 1，所以有

$$\begin{cases}x\neq 0\\-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1\end{cases}，\quad 即 \quad \begin{cases}x\neq 0\\-3\leqslant x\leqslant 1，\end{cases}$$

因此，函数的定义域为 $[-3，0)\cup(0，1]$.

例 2 设函数 $f(x)=2x^2+1$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(x+\Delta x)-f(x)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=\dfrac{3}{2}$，

$f(x+\Delta x)-f(x)=[2(x+\Delta x)^2+1]-(2x^2+1)=4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2$.

例 3 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，可得

$$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3，$$

所以，$f(x)=x^2+x+3$.

二、函数的表示法

常用的表示函数的方法有公式法、图形法和表格法.

1. 公式法

直接用解析式表达两个变量之间的函数关系的方法叫做函数的公式表示法. 如上面几个实例中的(3)、(4).

在函数的公式表示法中，还有以下几种常见的情形：

(1)分段函数 在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的函数称为分段函数. 如上面几个实例中的(4).

分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数. 它的定

义域是各段自变量取值集合的并.

(2)隐函数　有些函数的因变量 y 是用自变量 x 的表达式表示出来的，称之为显函数. 如 $y=1-x^2$，$y=\ln(2x+3)$等. 而有些函数，它的两个变量 x 和 y 之间的函数关系是用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示的，称之为隐函数. 如 $x^2+y^2=r^2$，$e^{x+y}-xy=0$ 等.

相对于隐函数来说，显函数则可看作是由解析式 $y=f(x)$确定的函数. 特别地，把形如 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 的函数称为幂指函数. 其中底数部分和指数部分都是自变量 x 的表达式. 如函数 $y=(1+x)^x$，$y=x^{\sin x}$等.

(3)参数方程表示的函数　一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \tag{1}$$

通过变量 t 确定了 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程(1)所确定的函数.

2. 图形法

用直角坐标系中的点或曲线来表示函数的方法叫做函数的图形表示法，如上面几个实例中的(2). 利用函数的图形研究和解决函数问题是数学的一种重要思想和方法.

3. 表格法

把一系列自变量的值和与之对应的函数值列成表格来表示函数关系的方法，叫做函数的表格表示法. 如上面几个实例中的(1).

函数的上述三种表示法各有优缺点，在解决实际问题时，应根据问题的特点选用适当的方法，或者结合使用.

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ x^2-1, & 1<|x|<2 \end{cases}$. 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-\sqrt{2})$及函数的定义域.

解　因为 $\left|\frac{1}{2}\right|<1$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

因为 $1<|-\sqrt{2}|<2$，所以 $f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^2-1=1$；

函数 $f(x)$的定义域为$(-2, 2)$.

三、反函数

定义　设函数 $y=f(x)$是定义在 D 上的函数，值域为 M，若对于每一个 $y\in M$，都可以由关系式 $y=f(x)$确定惟一的 x 值与之对应，这就在数集 M 上定义了一个关于 y 函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)(y\in M)$.

按习惯记法，函数 $y=f(x)$ 的反函数常记作

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in M.$$

函数 $y=f(x)$ 的定义域就是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；函数 $y=f(x)$ 的值域就是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 5 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$；　　(2) $y=2^x+1$.

解 (1) 函数的定义域是 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，由于 $y=\dfrac{3x+1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\dfrac{7}{x-2}\neq 3$，因此函数的值域为 $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

由 $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$，有 $y(x-2)=3x+1$，

解得
$$x=\frac{2y+1}{y-3}.$$

将字母 x，y 互换，则函数 $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ 的反函数为 $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$，$x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(1,+\infty)$.

由 $y=2^x+1$ 解得

$$2^x=y-1,\text{化成对数式 得 } x=\log_2(y-1).$$

将字母 x，y 互换，则函数 $y=2^x+1$ 的反函数为 $y=\log_2(x-1)$，$x\in(1,+\infty)$.

四、函数的简单性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

显然，奇函数的图形关于坐标原点对称(图 1－2)，偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1－3).

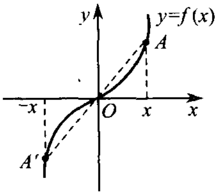

图 1－2

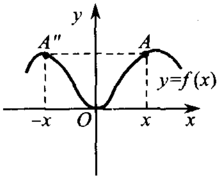

图 1－3

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a, b)内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a, b)内是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升(图 1－4)；单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降(图 1－5).

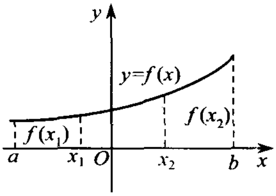

图 1－4

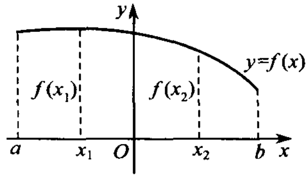

图 1－5

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任意 $x\in D$，都有 $x\pm l\in D$，且关系式 $f(x+l)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的周期. 满足这个关系式的最小正数，称为 $f(x)$的最小正周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数. 对于周期为 l 的周期函数，在它的定义域内每个长度为 l 的区间上，函数图形具有相同的形状(图 1－6).

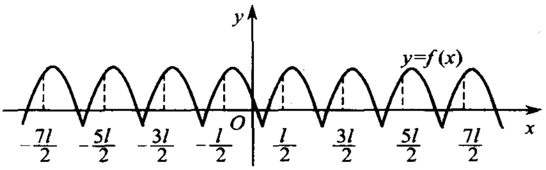

图 1－6

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义. 如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$在区间

D 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的，因为对任意实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\frac{1}{x}$在$(0, 2)$内是无界的，在 $[1, +\infty)$ 上是有界的.

例 6　判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x\sin x+\cos x$；(2)$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$；(3)$f(x)=2x^3+3x^2+1$.

解　(1)函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，对任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，由于

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)+\cos(-x)=x\sin x+\cos x=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2)函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，对任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)]\\&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(3)函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，对任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，有

$$f(-x)=2(-x)^3+3(-x)^2+1=-2x^3+3x^2+1,$$

由于　　$f(-x)\neq -f(x)$，且 $f(-x)\neq f(x)$，

所以 $f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数(一般称之为非奇非偶函数).

习题 1—1

1. 求下列函数的定义域：

(1)$f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$；　(2)$f(x)=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；　(3)$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$；

(4)$f(x)=\ln\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$；　(5)$f(x)=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\log_2 x}$.

2. 判断下列各组两个函数是否相同，并说明理由.

(1)$y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$；　(2)$y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=|x|$；　(3)$y=\ln x^3$ 和 $y=3\ln x$；

(4)$y=x+1$和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$；　(5)$y=\sqrt{x(x+1)}$ 和 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$.

3. 设 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(x-1)$，$f(2x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ x^2+1, & x>1 \end{cases}$，(1)确定函数的定义域；(2)求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$.

5. 求下列函数的反函数：

(1)$y=2x+1$；(2)$y=\lg(x+1)$；(3)$y=3^{2x-1}$；(4)$y=\dfrac{x-1}{x+3}$；(5)$y=\sqrt[3]{x+1}$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x-\sin x$；(2)$f(x)=3x^2+2x^3$；(3)$f(x)=x\arcsin x$；(4)$f(x)=1+\mathrm{e}^{-x^2}$；(5)$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+x^2}$；(6)$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.

7. 设 $f(x)=x^2+3x-2$，求 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数？哪个是偶函数？

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的偶函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，判断 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内的单调性.

9. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1)$y=x^2-2x+3$；(2)$y=\sin\dfrac{x}{2}$；(3)$y=\cos^2 x$；(4)$y=x\sin x$；(5)$y=3\sin(\pi x+1)$；(6)$y=\tan 2x$；(7)$y=1+\cos(2-x)$；(8)$y=\sin x+\cos x$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，解不等式 $|f(x)|\leqslant 1$，根据解的情况，你能得出什么结论？

第二节　初等函数

一、基本初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

1. 常函数　$y=C$(C 是常数)

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$，图形是过点$(0, C)$且垂直于 y 轴的一条直线.

2. 幂函数　$y=x^\alpha$(α 是常数)

它的定义域依 α 的取值而定，但不论 α 为何值，幂函数在$(0, +\infty)$内总有定义，而且图形都经过点$(1, 1)$. 例如，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$；$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$ 的定义域是$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$的定义域是 $[0, +\infty)$. 它们的图形如图 1－7 所示.

当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 在区间$(0, +\infty)$内单调增加；当 $\alpha<0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 在区间$(0, +\infty)$内单调减少.

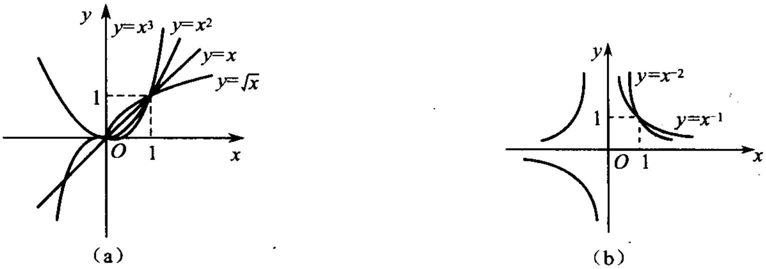

图 1－7

3. 指数函数　$y=a^x$（a 是常数且 $a>0$，$a\neq1$）

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$．因为对于任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，总有 $a^x>0$，又 $a^0=1$，所以指数函数的图形总在 x 轴的上方，且通过点$(0, 1)$．

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是单调减少的(图 1－8)．

由于 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$，所以 $y=a^x$ 的图形与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称．

以常数 e＝2.7182818…为底的指数函数

$$y=\mathrm{e}^x$$

是科学技术中常用的指数函数．关于常数 e 的意义将在第二章中说明．

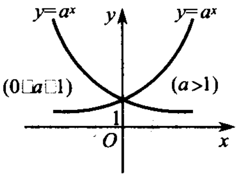

图 1－8

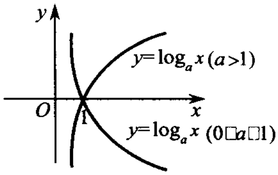

图 1－9

4. 对数函数　$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0$，$a\neq1$）

它的定义域是$(0, +\infty)$，值域是$(-\infty, +\infty)$，其图形总在 y 轴右侧，且通过点$(1, 0)$．

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在$(0, +\infty)$内单调增加，在区间$(0, 1)$内函数值为负，而在区间$(1, +\infty)$内函数值为正；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在$(0, +\infty)$内单调减少，在区间$(0, 1)$内函数值为正，而在区间$(1, +\infty)$内函数值为负(图 1－9)．

同底的指数函数和对数函数互为反函数，它们在同一坐标系下的图形关于直线 $y=x$ 对称．例如函数 $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$．

科学技术中常用以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$，叫做自然对数函数，简

记作

$$y=\ln x.$$

5. 三角函数

三角函数是统称，它们分别是：

正弦函数　$y=\sin x$(图 1—10)；　余弦函数　$y=\cos x$(图 1—11)；

正切函数　$y=\tan x$(图 1—12)；　余切函数　$y=\cot x$(图 1—13)；

正割函数　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；　余割函数　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

其中自变量以弧度作单位来表示.

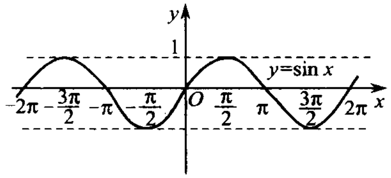

图 1—10

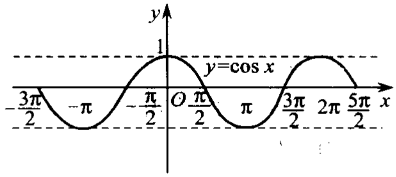

图 1—11

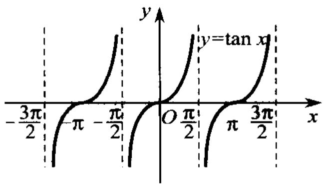

图 1—12

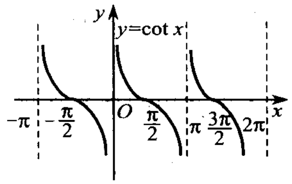

图 1—13

$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域都是 $[-1,\ 1]$，即 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以它们都是有界函数.

因为 $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$，所以 $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数.

$y=\sin x$ 的单调增加区间是 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$；单调减少区间是 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

$y=\cos x$ 的单调增加区间是 $(2k\pi-\pi,\ 2k\pi)$；单调减少区间是 $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$. 以上各单调区间中 $k\in\mathbf{Z}$.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域是 $\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$. 它们的值域都是 $(-\infty,\ +\infty)$.