21世纪高等学校本科数学规划教材

高等数学

（理工类）

上册

Advanced Mathematics

東北大學出版社
Northeastern University Press

21世纪高等学校本科数学规划教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

（理 工 类）

上册

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学(理工类)(上册) / 滕勇，付连魁，黄江主编. — 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8
(21 世纪高等学校本科数学规划教材)

ISBN 7-81102-285-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①滕… ②付… ③黄… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 096667 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印 张：12.75
字 数：345 千字
出版时间：2006 年 8 月第 1 版
印刷时间：2006 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义 刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：章 丽
责任出版：秦 力

定 价：20.00 元

前 言

进入21世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步. 目前，科学技术日新月异，随着计算机的广泛应用及数学软件的普及，我们已全面进入信息时代，这些无疑对基础课教材，特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求. 正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这本适合于理工类本科生各专业使用的高等数学教材.

本书依据教育部制订的"高等数学课程教学基本要求"（文中简称"基本要求"）编写而成，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了高等数学课程教学时数减少的趋势. 本书具有以下特色：

第一，突出高等数学的基本思想和基本方法. 突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握高等数学的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果. 在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的思想方法与学术价值.

第二，加强基本能力培养. 本书的例题、习题较多，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的.

第三，贴近实际应用. 本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出. 例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习高等数学的兴趣和利用高等数学知识解决实际问题的能力.

本书分上下两册，上册包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何，下册包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程. 各节后均配有习题，各章后面配有总习题，书后附有全部习题的参考答案.

本书是多所院校合作的结晶，参加编写的院校有（以校名首字笔画为序）：东北大学、东华理工学院长江学院、辽宁石油化工大学顺华能源学院、江西师范大学科学技术学院、沈阳工业大学、青岛理工大学琴岛学院、重庆大学城市科技学院、南京信息工程大学滨江学院、莱阳农学院、新疆农业大学科学技术学院.

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足之处，敬请读者不吝赐教.

作 者

2006年2月

《高等数学（理工类上册）》编写人员

主　　　编：滕　勇　付连魁　黄　江

副　主　编：张建伟　马少军　苗　晨

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

马云峰　沈海龙　阿不都热合曼

费罗曼　喻建华

目　　录

第一章　函数的极限与连续 …… 1

第一节　函数、参数方程与极坐标 …… 1

一、区间和邻域 …… 1

二、函　数 …… 2

三、初等函数 …… 2

四、函数的性质 …… 4

五、参数方程 …… 5

六、极坐标 …… 8

第二节　数列的极限 …… 10

一、数列极限的定义 …… 10

二、收敛数列的性质 …… 12

第三节　函数的极限 …… 13

一、自变量趋于无穷大时函数的极限 …… 13

二、自变量趋于某个确定值时函数的极限 …… 14

三、函数极限的性质 …… 17

四、无穷大与无穷小 …… 17

第四节　极限运算法则 …… 18

一、无穷小的运算 …… 19

二、极限四则运算法则 …… 19

第五节　重要极限　无穷小的比较 …… 22

一、极限存在准则 …… 22

二、两个重要极限 …… 23

三、无穷小的比较 …… 26

第六节　连续函数 …… 28

一、函数的连续性 …… 28

二、函数的间断点 …… 29

三、初等函数的连续性 …… 30

四、闭区间上连续函数的性质 …… 31

第二章　导数与微分 …… 36

第一节　导数概念 …… 36

一、引　例 …… 36

二、导数的定义 …… 37

三、导数的几何意义 …… 40
四、函数的可导性与连续性的关系 …… 41
第二节　函数求导法则 …… 42
一、函数的加减求导法则 …… 42
二、函数的乘积求导法则 …… 43
三、函数的商的求导法则 …… 43
四、反函数的求导公式 …… 44
五、复合函数的求导法则 …… 45
六、基本导数公式与求导法则 …… 47
第三节　隐函数与参数式函数的导数　相关变化率 …… 49
一、隐函数的导数 …… 49
二、参数式函数的导数 …… 50
三、相关变化率 …… 51
第四节　高阶导数 …… 53
一、$y=f(x)$的 n 阶导数的求法 …… 54
二、隐函数的二阶导数 …… 55
三、参数式函数的二阶导数 …… 56
第五节　函数的微分 …… 57
一、微分的定义 …… 57
二、微分公式与微分运算法则 …… 59
三、微分形式不变性 …… 60
四、微分的近似计算 …… 60
第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 64
第一节　Rolle 定理与 Lagrange 定理 …… 64
一、Rolle 定理 …… 64
二、Lagrange 定理 …… 65
第二节　Cauchy 定理与 Taylor 定理 …… 67
一、Cauchy 定理 …… 67
二、Taylor 定理 …… 68
第三节　未定式求值 …… 70
一、$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 70
二、其他形式的未定式 …… 72
第四节　曲线的升降与凹凸 …… 74
一、函数的单调性与曲线的升降 …… 74
二、曲线的凹凸与拐点 …… 75
第五节　函数的极值 …… 78
一、极值的定义 …… 78
二、函数的极值的判定 …… 78
第六节　函数的最值 …… 80

一、最值的求法 …… 80
二、最值的实际问题 …… 80
第七节　弧微分与曲率 …… 82
一、弧微分 …… 82
二、曲率与曲率半径 …… 84
第八节　函数图形的描绘 …… 86
一、曲线的渐近线 …… 86
二、函数图形的描绘 …… 87
第四章　不定积分 …… 89
第一节　不定积分的概念与性质 …… 89
一、原函数与不定积分的概念 …… 89
二、不定积分的几何意义 …… 90
三、基本积分表 …… 91
四、不定积分的性质 …… 91
第二节　换元积分法 …… 93
一、第一类换元法 …… 93
二、第二类换元法 …… 98
第三节　分部积分法 …… 102
第四节　有理函数与无理函数的积分 …… 105
一、有理函数的积分 …… 105
二、三角有理式的积分 …… 107
三、无理函数的积分 …… 108
第五章　定积分及其应用 …… 112
第一节　定积分的概念与性质 …… 112
一、引例 …… 112
二、定积分的定义 …… 113
三、定积分的性质 …… 115
第二节　微积分基本公式 …… 117
一、原函数存在定理 …… 117
二、微积分基本公式 …… 119
第三节　定积分的计算 …… 122
一、定积分的换元法 …… 122
二、定积分的分部积分法 …… 125
第四节　广义积分 …… 128
一、无穷限的广义积分 …… 128
二、无界函数的广义积分 …… 130
第五节　定积分在几何上的应用 …… 132
一、微元法 …… 132
二、平面图形的面积 …… 132

三、立体的体积…… 134
四、平面曲线的弧长…… 137
第六节 定积分在物理学上的应用…… 139
一、变力做功…… 139
二、水压力…… 140
三、引力…… 141
第六章 向量代数与空间解析几何…… 145
第一节 空间直角坐标系…… 145
一、空间直角坐标系…… 145
二、空间中点的坐标…… 145
三、空间中两点间的距离…… 146
第二节 向量的线性运算及其向量的坐标…… 147
一、向量的概念…… 147
二、向量的线性运算…… 148
三、向量的坐标表示式…… 150
四、方向余弦…… 152
五、向量在轴上的投影…… 153
第三节 数量积与向量积…… 154
一、向量的数量积…… 154
二、向量的向量积…… 157
第四节 平面及其方程…… 160
一、平面的点法式方程…… 160
二、平面的一般式方程…… 161
三、平面的截距式方程…… 163
四、两平面间的夹角…… 163
五、点到平面的距离…… 164
第五节 空间直线及其方程…… 165
一、空间直线的一般方程…… 165
二、空间直线的对称式方程与参数方程…… 166
三、两直线的夹角…… 168
四、直线与平面的夹角…… 169
五、平面束…… 169
六、两异面直线间的距离…… 170
第六节 曲面与曲线…… 171
一、曲面及其方程…… 171
二、二次曲面…… 174
三、空间曲线及其方程…… 177
答 案…… 182

第一章　函数的极限与连续

初等数学研究的对象是常量，而高等数学研究的对象是变量．变量之间的依赖关系称为函数．极限方法是研究变量的一种基本方法．本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本内容．

第一节　函数、参数方程与极坐标

一、区间和邻域

设实数 a 和 b，且 $a<b$，则数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记为 $(a,\ b)$，即

$$(a,\ b)=\{x \mid a<x<b\};$$

数集

$$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记为 $[a,\ b]$，即

$$[a,\ b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地，称

$$[a,\ b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$

与

$$(a,\ b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

为半开半闭区间．

以上区间都称为有限区间，区间长度为 $b-a$．从数轴上看，这些有限区间均是长度为有限的线段．此外，还有所谓的无限区间．引进记号 $+\infty$（读做正无穷大）和 $-\infty$（读做负无穷大），例如

$$[a,\ +\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,\ b)=\{x \mid x<b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记做 $(-\infty,\ +\infty)$，它也是无穷区间．

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a,\ \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

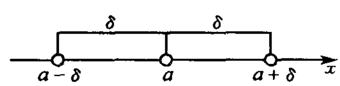

图 1-1

称为点 a 的去心 δ 邻域，见图 1-1，记做 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函　数

定义　设 D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，则从 D 到 $\mathbf{R}$ 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f. 集合 $R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 f 的值域，R_f 也记成 $f(D)$.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$的图像，见图 1-2.

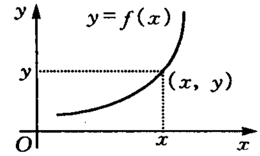

图 1-2

下面举几个函数的例子.

例 1　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域、值域，并画出其图像.

解　定义域为 $1-x^2\geqslant 0$，即 $D=[-1,\ 1]$；值域 $R_f=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 图像为半圆，见图 1-3.

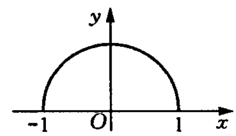

图 1-3

例 2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R_f=[0,\ +\infty)$，图像见图 1-4.

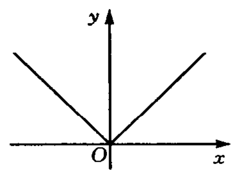

图 1-4

例 3　符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的图像见图 1-5.

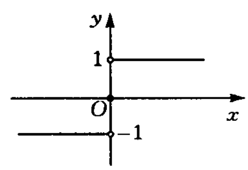

图 1-5

例 4　取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数，图像见图 1-6. 如

$$[1.25]=1,\ [-3.5]=-4,\ [-1]=-1.$$

由例 2 到例 4 可以看到，有时一个函数要用几个式子来表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应关系用几个不同式子表示的函数，称为分段函数.

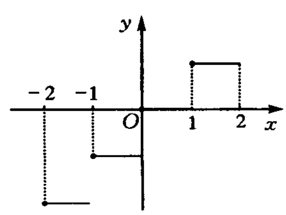

图 1-6

三、初等函数

1. 基本初等函数

初等数学对下面六类函数的定义域、值域及函数的性态进行了讨论：

(1) 常数函数　$y=C$（C 为常数）；

(2) 幂函数　　$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$；

(3) 指数函数　$y=a^x(a>0, 且 a\neq1)$;

(4) 对数函数　$y=\log_a x\ (a>0, 且 a\neq1)$;

(5) 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$;

(6) 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot} x$.

这六类函数统称为基本初等函数.

2. 反函数

在函数的定义中,如果 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一一映射,则它的逆映射 f^{-1}称为函数的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 显然，f^{-1}的定义域为 R_f，值域为 D.

例如，函数 $y=x^3$，$x\in\mathbf{R}$ 是一一映射，所以它的反函数存在，其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$. 习惯上写为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$.

一般地，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像画在同一坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 对称，见图 1-7.

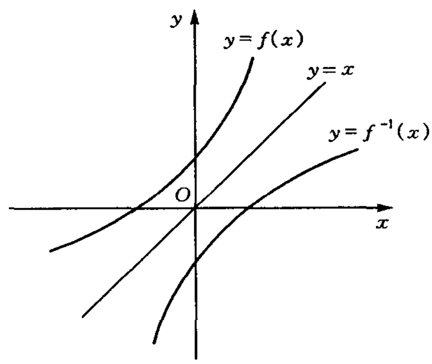

图 1-7

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义,且$g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f(g(x)),\ x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=g(x)$构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数f 能构成复合函数的条件是：函数 g 在D 上的值域$g(D)$必须含在 f 的定义域内，即 $g(D)\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数. 多个函数能够构成复合函数的过程叫函数的复合运算.

例 5　函数 $y=\arcsin(x^2-1)$可以看成由函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 和$u=g(x)=x^2-1$ 复合而成的函数. $y=f(u)$的定义域 $U_0=\{u\mid |u|\leqslant1\}$，$u=g(x)$的定义域 $D=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，复合函数 $y=\arcsin(x^2-1)$的定义域为$\{x\mid -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$.

4. 四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域分别为 D_1，D_2，记 $D=D_1\cap D_2$，且 $D\neq\varnothing$（$\varnothing$ 是空集)，在 D 上，通过加、减、乘、除四则运算可定义新的函数

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq0).$$

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的可用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如

$$y=ax^2+bx+c,\ y=\sin\frac{1}{x},\ y=\mathrm{e}^{-x^2}$$

等都是初等函数.

工程上常遇到由以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和$y=\mathrm{e}^{-x}$所构成的双曲函数，定义如下.

(1) 双曲正弦函数

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

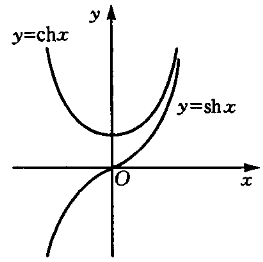

图 1-8

双曲正弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$；它是奇函数，在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的．见图 1-8.

(2) 双曲余弦函数

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

双曲余弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$；它是偶函数，在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的，在$(0,+\infty)$内是单调增加的，$\mathrm{ch}0=1$是最小值．见图 1-8.

(3) 双曲正切函数

$$\mathrm{th}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

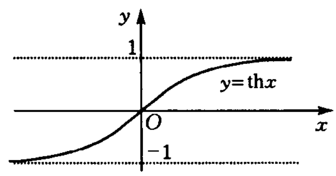

图 1-9

双曲正切的定义域为$(-\infty,+\infty)$；它是奇函数，在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，它的图形夹在水平直线$y=1$及$y=-1$之间．见图 1-9.

容易验证，双曲函数具有如下类似于三角函数的基本公式：

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$；

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$；

$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$；

$\mathrm{sh}(2x)=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$；

$\mathrm{ch}(2x)=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=1+2\mathrm{sh}^2x=2\mathrm{ch}^2x-1$.

双曲函数的反函数称为反双曲函数，定义如下.

(1) 反双曲正弦函数

$$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\quad(-\infty<x<+\infty).$$

(2) 反双曲余弦函数

$$\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad(x\geqslant 1).$$

(3) 反双曲正切函数

$$\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\quad(|x|<1).$$

四、函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在数 M_1，使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有上界，M_1 称为函数 $f(x)$在 D 上的一个上界．如果存在数 M_2，使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有下界，M_2 称为函数 $f(x)$在 D 上的一个下界．如果存在数 M，使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有界. 如果这样的数 M 不存在, 就称函数 $f(x)$在 D 上无界.

例如, $y=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上有界; $y=e^x$ 在$(-\infty, +\infty)$上无界, 但如定义域取有限区间, 则它也是有界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D, 对于 D 上的任意两点 x_1 及 x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, 如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上是单调增加的;如果恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上是单调减少的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$, 都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$为偶函数; 如果对于任意的 $x\in D$, 都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T, 使得对于任意的 $x\in D$, 有 $(x\pm T)\in D$, 且

$$f(T+x)=f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$为周期函数, T 称为$f(x)$的周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, 函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

五、参数方程

在取定的坐标系中,如果曲线上任意一点 $M(x, y)$中的 x, y 都是某个变量 t 的函数,即

$$\left.\begin{aligned} x&=f(t),\\ y&=g(t),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

并且对于 t 的每一个允许值, 由方程组(1)所确定的点都在这条曲线上, 那么方程组(1)就叫做这条曲线的参数方程, 联系 x, y 之间关系的变量 t 叫做参变量, 简称参数. 参数方程中的参数可以是有物理、几何意义的变量, 也可以是没有明显意义的变量.

(1) 直线的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t,\\ y=y_0+\beta t.\end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

(2) 圆的参数方程

$$\begin{cases} x=R\cos t,\\ y=R\sin t.\end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

(3) 椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

以上三种曲线的参数方程是中学已经学过的. 下面介绍几种在高等数学中要用到的曲线的参数方程.

(4) 摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

它是将半径为 a 的圆沿直线滚动(无滑动), 圆上一点所形成的轨迹, 见图 1-10.

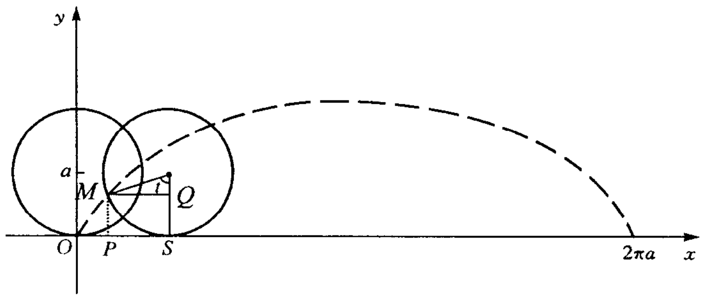

图 1-10

$$x = OP = OS - PS = \overset{\frown}{SM} - MQ = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$y = PM = SQ = SN - QN = a - a\cos t = a(1 - \cos t),$$

即得

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

其直角坐标系下的方程为

$$x = \arccos\frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

(5) 星形线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

它是半径为$\frac{a}{4}$的圆在半径为 a 的圆上(里边)滚动(无滑动)而形成的轨迹, 见图 1-11.

因为

$$\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{PA},\ QM = \frac{a}{4},$$

故

$$\frac{a}{4}\cdot\angle MQP = at,\ \angle MQP = 4t,$$

$$\angle NQP = \frac{\pi}{2} + t,$$

$$\angle MQN = \angle MQP - \angle NQP = 3t - \frac{\pi}{2},$$

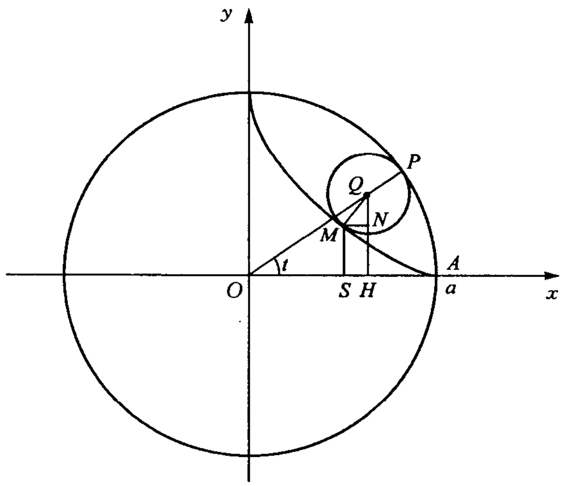

图 1-11

$$
\begin{aligned}
x &= OH - OS \\
&= \frac{3}{4}a\cos t - \frac{a}{4}\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{a}{4}(3\cos t + \cos 3t) = a\cos^3 t, \\
y &= QH - QN \\
&= \frac{3a}{4}\sin t - \frac{a}{4}\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{a}{4}(3\sin t - \sin 3t) \\
&= a\sin^3 t,
\end{aligned}
$$

即得

$$
\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}
$$

其直角坐标系下的方程为

$$
x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.
$$

(6) 圆的渐开线

$$
\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}
$$

它是缠绕在半径为 a 的圆上的线展开一端伸展开所形成的轨迹，见图 1-12.

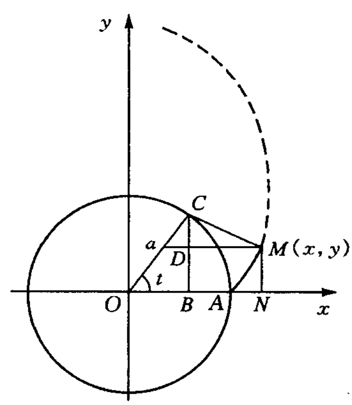

图 1-12

$$
\angle BCM = t,\ at = \overset{\frown}{CA} = CM,
$$

$$
x = OB + BN = a\cos t + at\sin t,
$$

$$
y = CB - CD = a\sin t - at\cos t,
$$

即得

$$
\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}
$$

六、极坐标

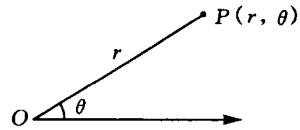

图 1-13

在平面上由一定点和一条定轴所组成的坐标系称为极坐标系，其中定点称为极点，定轴称为极轴，见图 1-13．坐标系中的点 P 用有序数$(r,\ \theta)$表示．其中 r 表示点P 到极点O 的距离，θ 表示射线OP 与极轴正向的夹角．这里 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

若取极点作为原点，极轴作为 x 轴建立直角坐标系，可以得到极坐标与直角坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \tag{2}$$

或

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x}. \tag{3}$$

建立 r 与θ 关系的等式称为极坐标方程，如

$$r=1$$

表示圆心在极点，半径为 1 的圆．

利用式(2)、式(3)可以把直角坐标方程和极坐标方程进行互化．

例 6 将极坐标方程

$$r=2\cos\theta$$

化为直角坐标方程，并说明它表示什么曲线．

解 方程两边同乘以 r 得

$$r^2=2r\cos\theta.$$

由式(2)有

$$x^2+y^2=2x,$$

即

$$(x-1)^2+y^2=1,$$

它表示圆心为(1, 0)，半径为 1 的圆．

下面给出几个特殊曲线的极坐标方程．

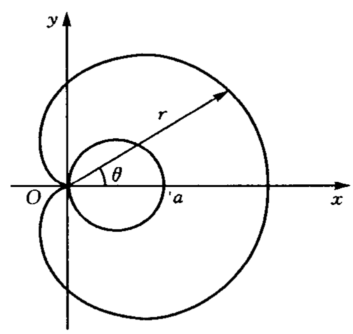

图 1-14

(1) 心形线(外摆线的一种，见图 1-14)的极坐标方程为

$$r=a(1+\cos\theta),$$

化为直角坐标方程为

$$x^2+y^2-ax=a\sqrt{x^2+y^2}.$$

(2) 双纽线(见图 1-15)的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\theta,$$

化为直角坐标方程为

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

(3) 阿基米得螺线(见图 1-16)的极坐标方程为

$$r=a\theta.$$