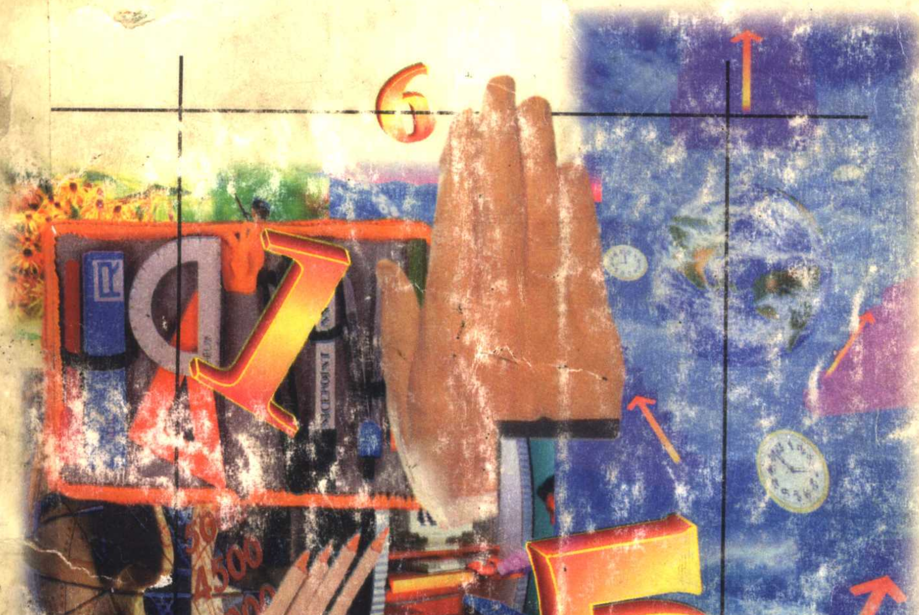
中学数学

解题百技巧

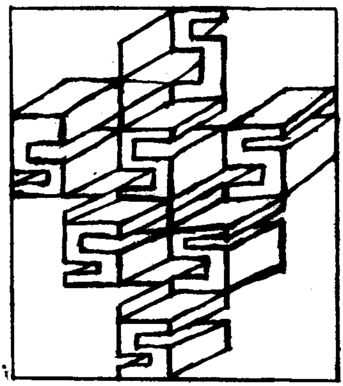
任 勇 著



福建少年儿童出版社

中学数学解题百技巧

丁保陛



闽新登字 06 号

中学数学解题百技巧

任　勇　著

*

福建少年儿童出版社出版发行

（福州东水路 76 号）

福建省新华书店经销

福建地质印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米　1/32　15.75 印张　2 插页　371 千字

1998 年 1 月第 1 版

1998 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7—5395—1575—9

G · 1059　　定价：16.00 元

前　　言

数学学习，离不开解题。用什么样的观点去对待数学解题，并采用什么样的方法和技巧去解决数学问题，这对于一个数学学习者来说，是十分重要的。

解题需要一定的方法

解题一定要讲究方法。事实上，我们解决任何一道数学题，都伴随着这样或那样的方法，没有方法的解题是不存在的，只不过有繁与简、通法与特法之分罢了。要提高解题能力，就要掌握一定的解题方法。本书总结的100种解题方法和技巧，愿读者能逐步领悟和掌握。

解题没有固定的方法

不同的人解同一道数学题有着许许多多不同的解法，同一个人解同一道数学题也可得到不同的解法。再好的解题方法也只是相对而言的，不存在可以解任何数学题的方法。只有具体问题具体分析，才能不断提高解题水平。本书中有少部分例题重复，正说明了同一道题从不同角度分析，会得到不同的解题方法。愿读者能加以比较，细心领会。

大法必须熟练掌握

数学解题中的大法，是指解题中一些通用的、常用的方法。这

些方法是人们长期解题所得出的经验。如数形结合、反面思考、问题转化、函数观点等，是数学中的大法，必须牢固、熟练地掌握。这是数学解题的基本功。

小法必须灵活运用

数学解题中的小法，是指解题中一些特殊的解题方法。这些方法在解决某些具体问题时，常常显示出它的优越性。如倒置变换、单位圆法、物理方法、赋值解题等。灵活地运用小法，是提高数学解题能力的关键。

数学解题是一个矛盾的统一体。解题要有一定的方法，却没有固定的方法。不定中有定，定中又相对不定。“大法”和“小法”也是相对而言的，对整个数学解题来说是“小法”的某种方法，可能在解决某一类问题时便是“大法”。本书所总结的 100 种解题技巧中，“大法”“小法”均有兼顾。

本书是总结数学解题技巧方面的一次尝试，注意选择常见的、实用的、具体的解题技巧，每个技巧配有 5 道典型例题（兼顾高、初中学生）和 2 道练习及其解答。限于作者的学识水平，有些问题还处理得不好，如顺序的安排怎样更好，部分内容交叉、包含怎样处理更好等，祈望读者不吝指正，以便再版时修改。

北京师范大学教授、中国教育学会数学教学研究会副理事长丁尔升先生十分关心我的成长，欣然为本书题写书名，在此谨向他表示深深的谢意！教育界的朋友们为本书的写作提了一些指导性意见，此书在写作过程中还参考了国内 80 年代以来的中学数学期刊上的文章，在此谨向真诚的朋友和论文的作者表示谢意！

[illegible] 傅 勇

1997 年 1 月 1 日

目　　录

1. 枚举寻径

有些数学题，题中包含着多种可能情形，难以用一个算式完成解答。这时我们可以根据问题的条件，把各种可能情形一一列举出来，分别予以考察，从而完成原题的解答。这是完全归纳法在解题中的具体运用。在枚举各种可能情形时，我们要充分利用划分的思想，做到不遗漏、不重复。

例 1 把由 1 开始的自然数依次写下去，一直写到第 198 位数为止：

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\cdots\cdots}_{198\text{ 位}}$$

那么这个数用 9 除的余数是________.

分析：问题在于这个 198 位数是多少呢？首先，我们把这个数按数位分成既不重复又不遗漏的三段：

第一段：数位是一位的有 1 2 3 4 5 6 7 8 9，一共有 $9\times1=9$ 位数；

第二段：数位是二位的有 10 11 12…99，一共有 $90\times2=180$ 位数；

第三段：数位是三位的有 100 101 102…999，该取到哪个数呢？设取到第 x 个数，显然有 $9+180+3x=198$，$x=3$. 第三个三位数是 102. 所以这个数是：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12…99 100 101 102

它一共有 198 位.

接着，我们再分段考察这个数用 9 除的余数情况.

数位是一位的数字和 $1+2+\cdots+9=45$，能被 9 整除.

数位是二位的数字和 $1+0+1+1+1+2+\cdots+9+9=(1+2+\cdots+9)\times10+(1+2+\cdots+9)\times9$，也能被 9 整除.

数位是三位的数字和 $1+0+0+1+0+1+1+0+2=6$.

所以，这个 198 位数用 9 除的余数是 6.

例 2 某班有 50 个学生，男女各占一半，他们围成一圈席地开会. 求证：必有一个学生两旁都是女学生.

证明：要证明的结论是如下两种情况之一成立：①某男生的两旁是女生；②某 3 位（或多于 3 位）女生连坐.

如果①出现，则结论已成立；

如果①不出现，则每个男生至少和另一个男生连坐. 我们把连坐的男生看成一组，25 个男生至多分成 12 组，各组之间全是女生. 由于全体学生是围成一圈坐，所以 25 个女生也至多分成 12 组. 由抽屉原理知，至少有一组 3 个（或 3 个以上）女生连坐，即②出现，故结论成立.

例 3 已知自然数 A、B、C 的乘积是 6，求 A、B、C.

解：由于 6 的正约数有 1，2，3，6，先令 $A=1，2，3，6$，做到不重不漏，再考虑 B、C 的取值，逐次枚举，有

$$A=1,\begin{cases}B=1,\ C=6;\\B=2,\ C=3;\\B=3,\ C=2;\\B=6,\ C=1.\end{cases}$$

$$A=2,\begin{cases}B=1,\ C=3;\\B=3,\ C=1.\end{cases}$$

$$A=3,\ \begin{cases} B=1,\ C=2; \\ B=2,\ C=1. \end{cases}$$

$$A=6,\quad B=1,\ C=1.$$

共有九组解答.

例 4　三角形三边 a、b、c 的长都是整数，且 $a\leqslant b\leqslant c$. 如果 $b=10$，那么，这样的三角形共有多少个？

解：当 $b=n$ 时，取 $a=k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，而 $b\leqslant c<a+b$，则 $n\leqslant c<n+k$，此时 c 的值恰好有 k 个，即 $c=n$，$n+1$，…，$n+k-1$. 于是有下表：

a	b	c	三角形的个数
1	n	n	1
2	n	n，$n+1$	2
3	n	n，$n+1$，$n+2$	3
⋮	⋮	⋮	⋮
k	n	n，$n+1$，…，$n+k-1$	k
⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	n，$n+1$，$n+2$，…，$2n-2$，$2n-1$	n

故当 $b=n$ 时，符合条件的三角形总数为：

$$1+2+\cdots+n+\frac{1}{2}n\ (n+1)$$

取 $n=10$，代入上式得：$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55$

所以，符合条件的三角形有 55 个.

例 5　试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$ 的根，并证明仅有一个根.

证明：显然此方程的根 $x>0$ 且 $x=2$ 是它的一个根.

假设除 $x=2$ 之外，还有正根，则此方程的根只能有两种情形：

①若 $x\in(2,+\infty)$，

$\because\ \sqrt{2+x}<\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}<\sqrt{xx}=x$，

$\therefore\ \sqrt{2+\sqrt{2+x}}<\sqrt{2+x}<x$，在 $(2,+\infty)$ 内不能有根.

②若 $x\in(0,2)$，设根 $x=2\cos4\alpha$（4α 为锐角）代入方程右边，有 $\sqrt{2+\sqrt{2+\cos4\alpha}}=2\cos\alpha$，

则 $2\cos\alpha=2\cos4\alpha$，

$\therefore\ \alpha=0$，这与 α 为锐角矛盾. 故在 $(0,2)$ 内不能有它的根.

综上可知，此方程只能有一个正根 2.

练习 1

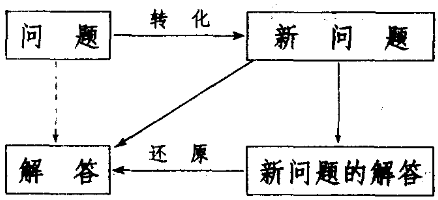
1. 已知有理数 $\frac{\pi}{4}$，试找出两个有理数 a、b，使得 $a<\frac{\pi}{4}<b$，且对 (a,b) 中的任意有理数 c，当 c 写成最简分数时，它的分母不小于 10.

2. 从 1 到 100 的一百个自然数中，每次取出两个数，使其和大于 100，这样的取法共有多少种？

2. 问题转化

问题转化也叫做化归，化归是数学家特别善于使用的解题策略。所谓“化归”，就是说在解决问题时，将原问题进行变形，使之转化，直至最终归结为我们熟悉的，或易于解决的，或已经解决的（新）问题。

用问题转化策略解数学习题的过程如下：



例 1　一个农民有鸡兔若干，它们共有 50 个头和 140 只脚，问鸡兔各有多少？

解：我们可以假想出现了这样一种奇特的现象：所有的鸡都抬起了一只脚，同时，所有的兔子也仅用后腿站立在地上．显然，问题就容易多了．因为，现在鸡的头数与脚的数目是相等的．如果有一只兔子，脚的数目就要比头的数目大 1；所以脚数（70）与头数的差（20）就是兔子的数目．于是得兔子 20 只，鸡 30 只．

这种化归的思想方法很巧妙，它是把问题的已知条件进行变形，以达到化归的目的．

例2 在边长为1的正方形的周界上任意两点间连一条曲线，把正方形的面积分为相等的两部分. 求证：曲线的长不小于1.

证明：我们先分析这两点在正方形边界上各种可能的分布情况. 显然有三种情形：①在同一条边上；②在相邻的两边上；③在相对的两边上. 其中③是不证自明的，因为正方形对边两点的连线不小于边长. 因此，我们只须将①、②化归为③.

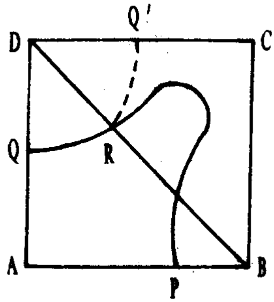


图-1

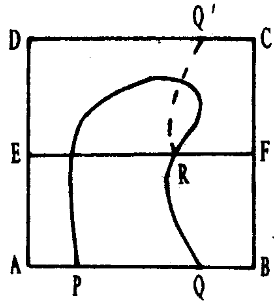


图-2

设正方形为 $ABCD$，曲线$\overset{\frown}{PQ}$将其面积分为相等的两部分.

(1) 当 P、Q 分别在 AB、AD 上时（图-1），连 BD，则 BD 与曲线$\overset{\frown}{PQ}$必有交点 R，否则，曲边三角形 APQ 完全位于$\triangle ABD$ 内，因而面积小于正方形 $ABCD$ 的面积的一半，与题意不合. 今以 BD 为轴，将$\overset{\frown}{RQ}$反转到$\overset{\frown}{RQ'}$，则 Q' 落在 CD 上. 至此，问题已化归为③.

(2) 当 P、Q 都在 AB 上时（图-2），设 E、F 分别为 AD、BC 的中点，则 EF 与$\overset{\frown}{PQ}$必有交点（理由同前）. 以 EF 为轴，将$\overset{\frown}{RQ}$翻转到$\overset{\frown}{RQ'}$，则 Q' 落在 CD 上. 同样，问题也化归为③.

综上所述，命题获证.

例3 设 a、b 为任意实数，$0\leqslant p\leqslant 1$，求证：$|a+b|^p\leqslant|a|^p$

$+|b|^p$.

证明：根据 p 的不同取值将问题分为三种情形：①$p=0$；②$p=1$；③$0<p<1$. 对于情形①，不等式即为 $1\leqslant 2$，这显然成立. 但这种情形过于简单，不具有代表性，其他情形是无法化归为这一情形的. 对于情形②，不等式即为 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，这是我们熟知的不等式，两边平方即可获证. 最后，对于情形③，我们将其化归为②. 实际上，若 $a+b=0$，则因 $|a|^p+|b|^p\geqslant 0$ 知不等式成立；若 $ab=0$ 或 $0<|a+b|\leqslant\max\{|a|, |b|\}$，则因 $|a+b|^p\leqslant\max\{|a|^p, |b|^p\}\leqslant|a|^p+|b|^p$，知不等式成立. 设 $|a+b|>\max\{|a|, |b|\}$，且 $ab\neq 0$，利用情形②，有：

$$|a+b|^p=\frac{|a+b|}{|a+b|^{1-p}}\leqslant\frac{|a|+|b|}{|a+b|^{1-p}}\leqslant\frac{|a|}{|a|^{1-p}}+\frac{|b|}{|b|^{1-p}}=|a|^p+|b|^p.$$

例 4　设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，S 是它的面积. 求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$. ……………………………………………… ①

分析：此题涉及的知识点多，综合性强. 但只要逐步化归，也不难寻得入门之道. 首先，不等式①中元多，应该消元. 由于 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，故要证①，只要证 $a^2+b^2-ab\cos C\geqslant\sqrt{3}ab\sin C$，即证 $a^2+b^2-2ab\sin(C+30°)\geqslant 0$，即证 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\sin(C+30°)+1\geqslant 0$……②，将②式左端视为关于 $\frac{a}{b}$ 的二次三项式，则问题化归为非常熟悉的二次不等式问题. 要证②式恒成立，只要证 $\Delta=4\sin^2(C+30°)-4\leqslant 0$ 恒成立. 而这是显然的.

例 5　在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，延长 CD，截取 $DE=2CD$，过 B、E 和 SC 的中点 F 作截面，交 SD、AD 于 K、L. 求截面 $BFKL$ 将四棱锥分为两部分的体积比.

解：这两部分均为非规则几何体，但只要求出其中一部分的体积，另一部分体积就可求. 因此，我们设法将其中一部分割补成规则体. 这只须将 $BFC-LKD$ 转化为两个三棱锥 $E-BFC$ 和 $E-LKD$ 之差.

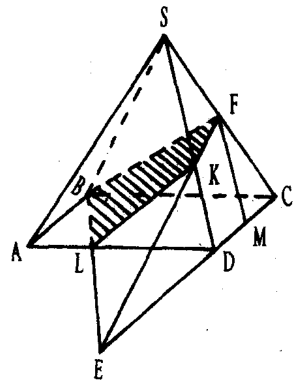


图-3

设正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 a，高为 h，则 $V_{E-BFC}=V_{F-BEC}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}BC\cdot CE)\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4}a^2h$，

$V_{E-LKD}=V_{K-LED}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}LD\cdot ED)\cdot h'$，

其中 h' 为 K 到平面 $ABCD$ 的距离. 作 $FM/\!/KD$ 交 CD 于 M，由 $KD:FM=ED:EM=\frac{2}{5}$ 知 $h'=\frac{2}{5}h$，又 $ED=2a$，$LD:BC=ED:EC=\frac{2}{3}$，所以 $LD=\frac{2}{3}a$. 于是，$V_{E-LKD}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot 2a)\cdot\frac{2}{5}h=\frac{4}{45}a^2h$，所以，

$$V_{BFC-LKD}=\frac{1}{4}a^2h-\frac{4}{45}a^2h=\frac{29}{180}a^2h,$$

$$V_{S-ALKFB}=\frac{1}{3}a^2h-\frac{29}{180}a^2h=\frac{31}{180}a^2h,$$

故 $V_{S-ALKFB}:V_{BFC-LKD}=31:29$.

练习 2

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2P$，$a_n=2P-\frac{P^2}{a_{n-1}}$. 其中 $n\geqslant 2$，P 为非零常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

2. 20 个相同的球放入 3 个不同的盒子，要求第 i 个盒子中至少有 i 个球（$i=1,2,3$）. 求所有不同的方法.

3. 以退求进

华罗庚先生曾经指出：善于“退”，足够地“退”，退到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍。

华罗庚先生的这段名言，道出了解数学题的一个重要策略——以退求进。在遇到一个困难的问题难以下手时，我们常常采用“退”的方法。这种“退”，往往使我们获得材料上和方法上的帮助。退的目的是为了进，我们把这种策略形象地称之为“退下来，跃上去”。

例1 证明$\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{55\cdots56}_{n个}$为完全平方数.

解：这个问题要一下子解决是有点困难的. 我们不妨先“退”下来，考察n为一些特殊值的情况. 用开平方运算不难得出：

$n=1$ 时，$16=4^2$；

$n=2$ 时，$1156=34^2$；

$n=3$ 时，$111556=334^2$.

据此我们猜测：

$$\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{55\cdots56}_{n个}=(\underbrace{33\cdots33}_{n个}+1)^2.$$

下面我们来证明这一结论：

$$(\underbrace{33\cdots33}_{n个}+1)^2=\underbrace{33\cdots33}_{n个}{}^2+2\times\underbrace{33\cdots33}_{n个}+1$$