浙江省2007年

GAOKAO FUXI YONGSHU

高考复习用书

数学

理科版

浙江省教育厅教研室 编

浙江教育出版社

浙江省教育厅教研室　编

GAOKAO
FUXI
YONGSHU

高考复习用书

数学 理科版

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考复习用书. 数学:理科版/浙江省教育厅教研室编. —杭州:浙江教育出版社,2004.9(2006.7 重印)

ISBN 7-5338-5463-2

Ⅰ.高… Ⅱ.浙… Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 089252 号

高考复习用书
数学(理科版)
浙江省教育厅教研室 编

出　　版　浙江教育出版社
　　　　　(杭州市天目山路 40 号　邮编:310013)
发　　行　杭州钱江图书发行社
责任编辑　金馥菊　郑德文
装帧设计　韩　波
责任校对　汪　晖
责任印务　陆　江
图文制作　杭州富春电子印务有限公司
印刷装订　富阳美术印刷厂

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　13
字　　数　356 000
版　　次　2004 年 9 月第 1 版
印　　次　2006 年 7 月第 4 次
本次印数　0 001—5 000
书　　号　ISBN 7-5338-5463-2/G·5433
定　　价　15.00 元

联系电话:0571-85170300-80928
e-mail:zjjy@zjcb.com
网　　址:www.zjeph.com

如何把握高考的要求、理清复习的思路和方向，是每个高三同学和任课教师在复习迎考阶段不断思索的问题。浙江省教育厅教研室多年来一直组织力量跟踪、分析和研究高考，努力把握高考的方向，指导全省的高考复习工作。经过多年的研究，尤其通过分析学生答卷中出现的问题，我们认为：高考复习起始阶段必须"回到基础"。

"回到基础"的复习必须解决两个关键的问题：其一是根据高考要求，理清所需的知识体系和方法体系；其二是使知识和方法能在各种试题情景中被有效地调动、组合并用于解题，也就是能在头脑中进行"操作"。为此，复习时，同学们应当仔细地梳理所学的知识和方法，使一些密切相关的知识和方法组合在一起形成模块式结构，同时还要使各模块式结构之间建立必要的和清晰的联系，这样就能在各种试题情景中很好地"操作"知识和方法解决问题。

为了更好地帮助同学和教师们进行有效的复习，我们组织我省80多名经验丰富的教研员和高三任课教师（他们来自全省43所高中和8家教研室，其中33名是特级教师），本着"梳理、结构、联系"的思想，根据新教材和考试大纲，在研究2006年高考的基础上，编制了这套适用于高中总复习起始阶段的基础复习用书，共9门学科（数学分文科和理科）。

各学科参照教科书的章或单元，根据内容的顺序和逻辑关系形成章；在每个章下设**模块构建、考点要义、例题剖析、归纳提炼、随堂练习、本章检测**等栏目，全书最后设**综合检测**。

模块构建 高考中多数试题需要调动多个知识点和方法，即一定结构的知识和方法群来解题，而许多密切相关的知识和方法往往是因逻辑关系被联系在一起，又在一定的解题规则下被使用的。因此，揭示本章核心知识和方法之间的关系，有助于同学们对本章的知识和方法形成较好的模块式结构。

考点要义 将考纲中涉及本章的高考基本要求用简洁的方式呈现出来，帮助

同学们掌握高考的基本内容，以指导同学们回顾高考所需的知识和方法。

例题剖析 通过精心挑选的例题和独到的剖析，力图达到如下四个目的：(1) 明确高考相关内容的基本要求；(2) 明晰本章知识和方法的结构；(3) 揭示知识和方法的结构如何在一定的规则（解题思路）下被使用；(4) 熟悉高考试题的相应形式。

归纳提炼 通过设定一定的问题等多种形式，帮助同学们整理和反思学习的成果，进一步理清知识和方法的结构。该栏目是机动性栏目，某些学科没有设置。

随堂练习 按课时设计随堂练习，通过在相似的情景中使用知识和方法，让同学们熟悉高考试题的相应形式，帮助同学们明确高考的基本要求，体验使用知识和方法的过程。

本章检测 目的在于让同学们体验自己所理解的知识和方法结构如何使用，检查在类似例题的试题情景中"操作"知识和方法进行解题的能力。

综合检测 组合若干章的内容，编制综合检测，重在检测同学们在不同的试题情景中"操作"知识和方法进行解题的能力，即举一反三的能力。

我们将每年根据高考的情况和使用过程中反馈的信息对丛书进行修订，以冷静、沉稳的态度和追求完美的作风打造精品，服务于广大师生，望能得到大家的支持。

本书的试题我们都作了详细的解答，读者可登录：http://jys.zjedu.org或http://www.zjeph.com查询和下载。

浙江省教育厅教研室

2006年6月

第一章 集合与简易逻辑

模块构建

本章主要知识有集合、简易逻辑和三类基础不等式的解法，是高中数学的基石，也是人们日常生活中必备的数学基础知识.

本章作为数学语言、数学关系和数学工具融合于整个高中数学之中，也成为高考必考内容之一. 从近几年高考的情况来看，考查集合的概念、运算和充要条件，会联系一些其他数学知识，但难度不大；不等式的解法会直接考，也会借助解答题的求解来考查.

知识网络

- 集合
  - 概念
    - 元素与集合
    - 集合与集合
  - 运算
    - 交集
    - 并集
    - 补集
  - 应用
    - 解一元二次不等式
    - 解含绝对值不等式
    - 解简单的分式不等式
- 简易逻辑
  - 逻辑联结词
  - 四种命题
  - 充要条件

一、集合

考点要义

集合是现代数学的基础，集合语言是现代数学的基本语言，使用集合语言，可以简洁、准确地表达数学的一些内容，发展运用数学语言进行交流的能力. 集合是一个不加定义的概念，不仅是现代数学的基础，也与生活、生产密切相关. 因此，考查运用集合语言进行表达和交流，考查“自然语言”、“集合语言”、“图形语言”间的相互转换，考查集合之

间的关系和运算是高考的必考内容之一，一般常以选择题的形式出现，也会综合其他知识出现在填空题或解答题中.

不等关系是客观事物的基本数量关系之一. 本章涉及的三类不等式解法是高中数学的基本知识，也是解决问题时需要的数学工具，因此，高考经常会出现解不等式或运用不等式解决问题的考题.

第 1 课时　集合的概念

基础过关

1. 已知 $M=\varnothing$，那么(　　)
   (A) $0\in M$.　　(B) $\{0\}\subsetneqq M$.
   (C) $M\subsetneqq\{0\}$.　　(D) $\{0\}=M$.
2. 已知集合
   $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\right\}$，
   则下面属于 A 的元素是(　　)
   (A) $(1,0)$.　　(B) $x=1,y=0$.
   (C) $\{(1,0)\}$.　　(D) $\{0,1\}$.
3. 若 $A=\{3,4,5\}$，则集合 A 的子集有________个.
4. 设 U 是全集，A,B 是非空集合，且 $A\subsetneqq B\subsetneqq U$，则集合 $A\cap\complement_U B=$________.
5. 已知 $A\cap B=B$，且 $A=\{3,4,5\}$，求满足条件的集合 B.

例题剖析

例 1　已知全集 $I=\mathbf{R}$，

集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right\}$，

$B=\{x\mid\log_3(x-a)<2\}$.

(1) 当 $A\subseteq B$ 时，求 a 的取值范围；

(2) 当 $A\cap B=A$ 时，求 a 的取值范围.

例 2　已知集合 $A=\{2,4,6,8,9\}$，$B=\{1,2,3,5,8\}$. 集合 C：若各元素都加 2，变为 A 的一个子集；若各元素都减 2，变为 B 的一个子集. 求集合 C.

例 3　已知全集 $U=\{x\mid x$ 取不大于 20 的质数$\}$，且满足 $A\cap\complement_U B=\{5,13\}$，$\complement_U A\cap B=\{11,19\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{2,3,7\}$，求集合 A 与集合 B.

例 4　随着实数 k 的取值变化，方程 $4kx-4y=4-k^2$ 表示的直线有无数条，这无数条直线形成一个直线系. 如果直线系 $4kx-4y=4-k^2$ 中有且仅有一条直线经过点 A，由所有这样的点 A 组成的集合记做 M.

(1) 试问：点 $(1,2)$ 是否是 M 的元素？为什么？

(2) 求集合 M 中的点组成的轨迹方程；

(3) 设 $P=\{(x,y)\mid y=2x+a\}$（其中 a 为常数），任取 $C\in M,D\in P$，如果 $|CD|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$，求 a 的值.

解　(1) 将 $(1,2)$ 代入 $4kx-4y=4-k^2$，得 $k^2+4k-12=0$.

$\because$　此方程有两解，

$\therefore$　存在两条直线通过点 $(1,2)$，

即 $(1,2)\notin M$.

(2) 任取 $(x_0,y_0)\in M$，则由条件知

方程 $k^2+4x_0k-4(y_0+1)=0$ 只有一解.

$\therefore$　$\Delta=(4x_0)^2-4[-4(y_0+1)]=0$.

化简，得 $x_0^2+y_0+1=0$.

$\therefore$　集合 M 中的点组成的轨迹方程为 $y=-x^2-1$.

(3) 设点 C 坐标为 (x,y)，

则有 $y=-x^2-1$.

$|CD|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$ 等价于点 C 到直线 $y=2x+a$ 的距离 d 的最小值为 $\sqrt{5}$，

$\therefore$　$d=\dfrac{|2x-y+a|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|(x+1)^2+a|}{\sqrt{5}}$.

若 $a\leqslant 0$，则 d 的最小值为 0，不合题意，

$\therefore$　$a>0$.

$\therefore$　$d=\dfrac{(x+1)^2+a}{\sqrt{5}}\geqslant\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

$\therefore$　$a=5$.

评注　本例引入集合，综合解析几何有关知识，从而改变了设问情境，形成综合问题. 理解题设，即明确题设对集合 M 的规定，是作出等价转化、分析与解决问题的关键.

高考题往往通过改变设问情境，要求考生通过阅读、思考，联想知识、方法，抓住问题本质，从而分析解决问题.

归纳提炼

正确理解集合语言，掌握 $\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subsetneqq$，$\cap$，$\cup$，$\complement_U A$ 等符号的含义，这既是集合的重

点知识，也是解决集合问题的基础.

对于用描述法给出的集合$\{x|x\in P\}$，要抓住竖线前面的代表元素x及它所具有的性质P，切不可将$A=\{x|y=x^2-1\}$，$B=\{y|y=x^2-1\}$，$C=\{(x,y)|y=x^2-1\}$混淆.

要注意等价思想的运用. 如$A\cup B=B$，$A\cap B=A$均等价于$A\subseteq B$.

在解决元素与集合、集合与集合关系判定等问题时，常辅以 Venn 图，帮助提高解题效率.

随堂练习

1. 已知集合$Q=\{m,n\}$，则Q的非空真子集个数为(　　)
   (A) 1.　　(B) 2.
   (C) 3.　　(D) 4.
2. 设P,Q为两个非空实数集合，定义集合$P+Q=\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$. 若$P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则$P+Q$中元素的个数是(　　)
   (A) 9.　(B) 8.　(C) 7.　(D) 6.
3. 已知$U=\{1,2,3,4,5\}$，$P\subsetneqq U$，$T\subsetneqq U$. 若$P\cap T=\{2\}$，$\complement_U P\cap T=\{4\}$，$\complement_U P\cap\complement_U T=\{1,5\}$，则有(　　)
   (A) $3\in P,3\in T$.
   (B) $3\in\complement_U P,3\in T$.
   (C) $3\in P,3\in\complement_U T$.
   (D) $3\in\complement_U P,3\in\complement_U T$.
4. 已知集合A满足$\{7,8\}\subseteq A\subseteq\{7,8,9,10,11\}$，则符合条件的集合$A$共有______个.
5. 已知集合$M=\{2a\}$，$N=\{2-a,a\}$，且$M\subsetneqq N$，则实数a的值等于________.
6. 设A,B为两个非空集合. 给出下列四个命题：
   ①$A\subsetneqq B\Rightarrow$对任意$x\in A$，有$x\notin B$；
   ②$A\subsetneqq B\Rightarrow$不存在$x\in A$，使得$x\in A\cap B$；
   ③$A\subsetneqq B\Rightarrow$对任意$x\in A$，有$x\in A\cup B$；
   ④$A\subsetneqq B\Rightarrow$存在$x\in B$，使得$x\notin A$.
   其中真命题的序号是________________.
7. 设$A=\{x|x^2+px+q=x\}$，
   $B=\{x|(x-1)^2+p(x-1)+q=x+3\}$.
   若$A=\{3\}$，求集合B.
8. 设$I=\{x|x$为小于 20 的正偶数$\}$. 若$A\cap\complement_I B=\{12,14\}$，$B\cap\complement_I A=\{2,4,16,18\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\varnothing$，求集合$A,B$.
9. 已知集合S中的元素为实数，且满足条件：
   ①$1\notin S$；②$a\in S$，则必有$\frac{1}{1-a}\in S$.
   (1) 求证：如果$3\in S$，则S中必存在另外两个元素，并求出这两个元素；
   (2) 集合S能否是单元素集，为什么？请说明理由.
10. 集合A是由适合下列性质的函数$f(x)$组成的：
    性质 1　对于任意的$x\geqslant0$，$f(x)\in[-2,4)$；
    性质 2　对于任意的$x\geqslant0$，总有$f(x)+f(x+2)<2f(x+1)$成立.
    试判断函数$f_1(x)=\sqrt{x}-2$和函数$f_2(x)=4-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $(x\geqslant0)$是否在集合A中？请说明理由.

第 2 课时　集合的运算

基础过关

1. 已知集合$P=\{x|x<2\}$，$Q=\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$，则$P\cup Q=$(　　)
   (A) $\{x|-1\leqslant x<2\}$.
   (B) $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$.
   (C) $\{x|x\leqslant3\}$.
   (D) $\{x|x\geqslant-1\}$.
2. 已知集合$M=\{1\}$，$S=\{1,2\}$，$P=\{1,2,3\}$，则$(M\cup S)\cap P$为(　　)
   (A) $\{1\}$.　　(B) $\{3\}$.
   (C) $\{1,2\}$.　　(D) $\{1,2,3\}$.
3. 如果全集$S=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，则$\complement_S M\cap\complement_S N=$______.
4. 某班在期末测试中，有 36 人数学成绩不低于 80 分，有 20 人物理成绩不低于 80 分，有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分，则这两科成绩中至少有一科不低于 80 分的人数为________.
5. 已知集合$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|a<x<a+1\}$.
   (1) 若$A\cap B\neq\varnothing$，求实数a的取值范围；
   (2) 若$A\cap B=\varnothing$，求实数a的取值范围.

例 1 (1) 已知集合 $A=\{x\mid x^2+2x-3=0, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid -x^2+2x+15=0, x\in\mathbf{R}\}$, 求 $A\cap B$;

(2) 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x-3, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=-x^2+2x+15, x\in\mathbf{R}\}$, 求 $A\cap B$;

(3) 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+2x-3, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)\mid y=-x^2+2x+15, x\in\mathbf{R}\}$, 求 $A\cap B$.

例 2 已知集合 $M=\{x\mid x^2-(k-3)x-4k=0\}$, $N=\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$. 若 $M\cap N=\varnothing$, 求实数 k 的取值范围.

例 3 已知 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$, 满足 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$, 且 $A\cap C=\varnothing$, 求 a 的值.

例 4 给定自然数 $a\geqslant 2$, 集合 $A=\{y\mid y=a^x, x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{y\mid y=(a+1)x+b, x\in\mathbf{N}\}$. 在闭区间 $[1,a]$ 上是否存在 b, 使 $A\cap B\neq\varnothing$? 如果存在, 试求出 b 的一切可能值及相应的集合 $A\cap B$; 如果不存在, 说明理由.

假设存在 $b\in[1,a]$, 使 $A\cap B\neq\varnothing$, 则可设 $y_0\in A\cap B$, 有

$y_0=a^m=(a+1)n+b \quad (m,n\in\mathbf{N})$,

得 $n=\dfrac{a^m-b}{a+1}$.

$\because\ a^m=[(a+1)-1]^m$
$=C_m^0(a+1)^m-C_m^1(a+1)^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}(a+1)+(-1)^m$
$=k(a+1)+(-1)^m \quad (k\in\mathbf{N})$,

$\therefore\ n=\dfrac{a^m-b}{a+1}=k+\dfrac{(-1)^m-b}{a+1}$.

$\because\ n\in\mathbf{N}$, $\therefore\ \dfrac{(-1)^m-b}{a+1}\in\mathbf{Z}$.

分下列两种情况:

(1) 当 $m=2k \quad (k\in\mathbf{N})$ 时,

得 $\dfrac{(-1)^m-b}{a+1}=\dfrac{1-b}{a+1}\in\mathbf{Z}$.

若 $\dfrac{1-b}{a+1}\geqslant 1$, 则 $a+b\leqslant 0$, 这与 $a\geqslant 2$, 且 $b\in[1,a]$ 矛盾.

$\therefore$ 只能 $b=1$, 此时 $y_0=a^{2k}$,

$\therefore\ A\cap B=\{y\mid y=a^{2k}, k\in\mathbf{N}\}$.

(2) 当 $m=2k+1 \quad (k\in\mathbf{N})$ 时,

得 $\dfrac{(-1)^m-b}{a+1}=\dfrac{-1-b}{a+1}\in\mathbf{Z}$.

$\because\ 1\leqslant b\leqslant a$,

$\therefore\ -2\geqslant -1-b\geqslant -a-1$,

$\therefore\ \dfrac{-2}{a+1}\geqslant\dfrac{-1-b}{a+1}\geqslant -1$.

$\therefore\ a=b$, 此时 $y_0=a^{2k+1}$,

$\therefore\ A\cap B=\{y\mid y=a^{2k+1}, k\in\mathbf{N}\}$.

本题可以看成下面一题的一般情况, 这表明, 集合及集合运算是一种数学语言, 可以改变数学问题的陈述形式.

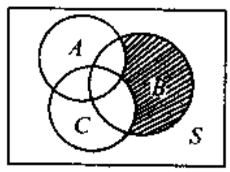
已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项分别是 $a_n=2^n$, $b_n=3n+2$, 将它们的公共项由小到大排列成数列 $\{c_n\}$, 求 c_n (答案: $c_n=2^{2n+1}$).

在进行集合的交、并、补运算时, 要认识集合的本质属性, 准确转译集合语言, 使问题转化为熟悉的问题.

在进行集合运算时, 一般先化简给定的集合, 使之"具体、直观、简单", 此时可考虑运用数形结合的思想, 利用图形、数轴或 Venn 图, 同时要注意区间的开闭情况.

1. 已知集合 $M=\{a,0\}$, $N=\{1,2\}$, 且 $M\cap N=\{1\}$, 则 $M\cup N$ 等于 (　　)
   (A) $\{a,0,1,2\}$.　(B) $\{1,0,1,2\}$.
   (C) $\{0,1,2\}$.　(D) $\{a\}$.

2. 如图, S 是全集, A,B,C 是 S 的三个子集, 则阴影部分表示的集合是 (　　)



(第 2 题)

   (A) $\complement_S(A\cup C)\cup B$.
   (B) $(\complement_S A\cup\complement_S C)\cup B$.
   (C) $(\complement_S A\cap\complement_S C)\cap B$.
   (D) $(A\cup C)\cap\complement_S B$.

3. 已知 $M\cap N=\varnothing$, 且 $M\cup N=\{1,2\}$, 则满足条件的集合 M,N 的不同的组数为 (　　)

(A) 2.　　(B) 4.

(C) 6.　　(D) 8.

4. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|x^2+px+12=0, x\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x|x^2-5x+q=0, x\in\mathbf{N}^*\}$, 且 $A\cap\complement_U B=\{4\}$, $B\cap\complement_U A=\{2\}$, 则 $p+q=$________.

5. 设集合 $A=\{x|y=\lg(9-x^2), x\in\mathbf{R}\}$. 若 $a,b\in A\cap\mathbf{Z}$, 且直线 $ax-by=0$ 的倾斜角大于 $45°$, 则这样的直线共有________条.

6. 高三(5)班学生开展研究性学习活动. 参加化学活动小组的有 20 人; 参加生物活动小组的有 22 人; 既参加化学活动小组, 又参加生物活动小组的有 10 人; 既未参加化学小组, 又未参加生物小组的有 15 人. 问: 高三(5)班共有学生多少人?

7. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|-3\leqslant x<4, x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x|-1<x\leqslant5, x\in\mathbf{R}\}$.
求: (1) $M\cup N$;　(2) $\complement_U M$;
(3) $\complement_U M\cap\complement_U N$.

8. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|x^2-nx+2=0\}$. 若 $A\cap B=B$, 求 n 的取值范围.

9. 已知 $A=\{x|x^2-5x+4=0\}$, $B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x|x^2-mx+4=0\}$. 若 $A\cup B=A$, $A\cap C=C$, 求 a, m 的值.

10. 已知集合 $A=\{x|x^2-ax\leqslant x-a, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x||x-2|\leqslant1, x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x|x^2+bx+c>0, x\in\mathbf{R}\}$.
(1) 若 $A\cap B=A$, 求 a 的取值范围;
(2) 若 $B\cap C=\varnothing$, 且 $B\cup C=\mathbf{R}$, 求 b, c 的值.

第 3 课时　含绝对值不等式及一元二次不等式的解法

基础过关

1. 不等式 $|x-2|>3$ 的解集是(　　)
(A) $\{x|x<5\}$.
(B) $\{x|-1<x<5\}$.
(C) $\{x|x<-1\}$.
(D) $\{x|x<-1$, 或 $x>5\}$.

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 且对一切实数 x 都有不等式 $ax^2+ax+a+3>0$, 那么 a 的取值范围是(　　)
(A) $a>0$.
(B) $a\geqslant0$.
(C) $a<-4$.
(D) $a<-4$, 或 $a>0$.

3. 若 $U=\mathbf{R}$, 设 $A=\left\{x\left|\frac{x}{1-x}\geqslant2\right.\right\}$, 则 $\complement_U A=$________.

4. 已知关于 x 的不等式 $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}\geqslant0$ 的解集是 $\{x|-1\leqslant x\leqslant2$, 或 $x>3\}$, 则不等式 $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}\leqslant0$ 的解集是________.

5. 解不等式 $x^2-4|x|-5\leqslant0$.

例题剖析

例 1　解下列不等式:
(1) $1<|2x+4|\leqslant5$;
(2) $|2x-3|-4|x+2|<3$.

例 2　已知关于 x 的不等式 $ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$, 求不等式 $bx^2-abx+a<0$ 的解集.

例 3　设全集 $U=\mathbf{R}$.
(1) 解关于 x 的不等式:
$|x-1|+a-1>0$ $(a\in\mathbf{R})$;
(2) 记 A 为(1)中不等式的解集, 集合 $B=\left\{x\left|\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right.\right\}$. 若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.

例 4　已知关于 x 的不等式组

$$\begin{cases}\frac{x-1}{x}\leqslant0, & ①\\ x^2+2kx+k>-\frac{1}{4} & ②\end{cases}$$

有实数解, 求实数 k 的取值范围.

解　由 $\frac{x-1}{x}\leqslant0$, 得 $0<x\leqslant1$.

∴　原不等式组有解等价于:

当 $0<x\leqslant1$ 时, $x^2+2kx+k>-\frac{1}{4}$ 有实数解.

下面有两种常用解法:

解法 1　$k(2x+1)>-\frac{1}{4}-x^2$,

∵　$0<x\leqslant1$,　∴　$1<2x+1\leqslant3$,

$\therefore\ k>-\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2+1}{2x+1}$

$=-\frac{1}{4}\left[(2x+1)+\frac{2}{2x+1}-2\right]$.(*)

要使不等式组有实数解,只需 k 大于右式在 $x\in(0,1]$时的最小值.

设 $u(a)=a+\frac{2}{a}\ (1<a\leqslant 3)$.

$\because\ u(a)-u(3)=a+\frac{2}{a}-3-\frac{2}{3}$

$=(a-3)\left(\frac{3a-2}{3a}\right)\leqslant 0$,

$\therefore\ u(a)\leqslant u(3)=\frac{11}{3}$,当且仅当 $a=3$ 时等号成立.

$\therefore\ -\frac{1}{4}\left[(2x+1)+\frac{2}{2x+1}-2\right]$

$\geqslant-\frac{1}{4}\left(\frac{11}{3}-2\right)=-\frac{5}{12}$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立,即当 $x=1$ 时,(*)式右式取最小值为 $-\frac{5}{12}$. $\therefore\ k>-\frac{5}{12}$.

解法2 设 $f(x)=x^2+2kx+k+\frac{1}{4}$,原不等式组有实数解等价于:

在 $0<x\leqslant 1$ 上存在 x,使 $f(x)>0$.

$\because\ f(x)$的图象是开口向上的抛物线,

$\therefore\ f(x)$当 $0<x\leqslant 1$ 时在 x 轴上方有图象.

为方便求解,先求当 $0<x\leqslant 1$ 时,使 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立的 k 的取值范围,再求其补集.

由 $\begin{cases}f(0)<0,\\ f(1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<-\frac{1}{4},\\ k\leqslant-\frac{5}{12},\end{cases}$

$\therefore\ k\leqslant-\frac{5}{12}$.

$\therefore$ 原不等式组有实数解时,k 的取值范围是 $k>-\frac{5}{12}$.

评注 (1) 高考常出现含有字母的问题,对此类问题一是要正确分类讨论,二是要正确作出等价转化.

(2) 解法1将问题转化为求最小值问题,并运用函数 $y=x+\frac{p}{x}\ (p>0)$的单调性;解法2将问题转化为二次函数性质与图象的问题,并针对正面情况较多的现象,从反面入手.

(3) 注意下面语言表述的问题的不同:

①当 $0<x\leqslant 1$ 时,$x^2+2kx+k>-\frac{1}{4}$ 有实数解;

②当 $0<x\leqslant 1$ 时,$x^2+2kx+k>-\frac{1}{4}$ 恒成立.

①表示存在;②表示恒成立.②转化为:

$k>-\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2+1}{2x+1}$

$=-\frac{1}{4}\left[(2x+1)+\frac{2}{2x+1}-2\right]$.(*)

要使 $0<x\leqslant 1$ 时,$x^2+2kx+k>-\frac{1}{4}$ 恒成立,只需 k 大于右式在 $x\in(0,1]$时的最大值.

归纳提炼

简单的含有绝对值的不等式解法,一般是依据 $|x|<a\ (a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$,$|x|>a\ (a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$ 求解.含有多个绝对值符号的不等式一般可用"零点分段"的方法去掉绝对值进行求解,同时要充分考虑绝对值的几何意义,准确把握什么时候取并集、交集.在解题过程中要注意等价变换.

一元二次不等式需要联系它相应的方程、函数,直接或数形结合求解.

研究含参数的一元二次不等式的解集问题,常化归为研究二次方程根的分布及函数的最值问题,或转化为直线与圆锥曲线的位置关系来处理,要养成从数形两个方面思考问题的习惯,数形结合是数学中一种基本的思想方法.

随堂练习

1. 不等式 $ax^2+bx+3>0$ 的解集为$\{x|-3<x<1\}$,则(　　)

(A) $a=-2,b=-1$.

(B) $a=2,b=1$.

(C) $a=-1,b=-2$.

(D) $a=1,b=2$.

2. 不等式 $|x-3|+|x-4|\leqslant 3$ 的解集是(　　)

(A) $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$.

(B) $\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$.
(C) $\{x|4\leqslant x\leqslant 5\}$.
(D) $\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$.

3. 不等式 $\dfrac{(x-3)(x-10)}{(x-1)x^2}\leqslant 0$ 的解集是（　　）
(A) $\{x|0<x<1$，或 $3<x\leqslant 10\}$.
(B) $\{x|x<0$，或 $1<x\leqslant 3$，或 $x\geqslant 10\}$.
(C) $\{x|x<1$，且 $x\neq 0$，或 $3\leqslant x\leqslant 10\}$.
(D) $\{x|0\leqslant x<1$，或 $3\leqslant x\leqslant 10\}$.

4. 不等式 $(x-4)x^2\geqslant 0$ 的解集是________.

5. 若对于满足 $k^2-7k+12<0$ 的一切 k，不等式 $x\leqslant k$ 恒成立，则 x 的取值范围为________.

6. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|-x^2+x+6\geqslant 0\}$，集合 $N=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+1}>2\right.\right\}$，则 $M\cap N$ 是________________.

7. 已知二次函数 $y=x^2-3kx+3k-m$ $(k,m\in\mathbf{R})$，不论 k 取什么实数，函数的图象与 x 轴总有两个不同的交点，求 m 的取值范围.

8. 解下列关于 x 的不等式：
(1) $\dfrac{1}{x}>m$ $(m\in\mathbf{R})$；
(2) $ax^2-(a+1)x+1<0$ $(a\in\mathbf{R})$.

9. 记函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\ln[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 B. 若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且对任意的 $x\in[0,1]$，$f(x^2-ax)<f(a-3)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

二、简易逻辑

考点要义

无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想，因此，正确地使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质之一. 本节学习需要掌握常用逻辑用语的用法，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性，理解四种命题及其相互关系，并掌握充要条件的概念.

充要条件是高考考查的一个重点，几乎每年都考，考查涉及它的概念，也会联系其他数学知识；判定命题真假的考查在高考中出现频率较高，虽然涉及到命题的概念，但主要还是考查主干的数学知识；近几年高考中还出现过对举特例或反例否定命题正确性的考查，这已成为考查数学能力的一种形式.

基础过关

1. 下列语句为命题的是（　　）
(A) 三角形内角和大于 180°.
(B) 对角相等的四边形.
(C) 三边相等的三角形.
(D) 平行四边形.

2. 对任意实数 a,b,c，给出下列命题：
①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件；②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件；③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.
其中真命题的个数是（　　）
(A) 1.　　(B) 2.
(C) 3.　　(D) 4.

3. 若 A 是 B 的必要不充分条件，则非 A 是非 B 的________.

4. 已知命题 p：当 $x=3$ 或 $x=-1$ 时，有 $x^2-2x-3=0$，则 p 的逆否命题是________.

5. 用反证法证明：三角形的内角最多只有一个是直角.

例题剖析

例 1 设 $n\in\mathbf{Z}$. 求证：
(1) 如果 n^2 是偶数，那么 n 只能是偶数；
(2) 如果 n^2 是 3 的倍数，那么 n 必是 3 的倍数.

例 2 (1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$(1-|x|)(1+x)>0$ 成立的充要条件是（　　）
(A) $|x|<1$.
(B) $x<1$.
(C) $x<-1$.
(D) $x<-1$ 或 $-1<x<1$.
(2) 设 $x,y\in\mathbf{R}$，$x\neq y$ 是 $x^2\neq y^2$ 成立的

什么条件?

(3) 分别求能使不等式$|x|<1$成立的一个充分不必要条件,一个必要不充分条件.

例3 命题甲:方程$x^2-mx+3-\frac{1}{4}m=0$有两个不相等的正实数解;命题乙:方程$(m-2)x^2+2(m-2)x-m=0$有两个异号的实数解.若这两个命题有且只有一个成立,求实数m的取值范围.

例4 对于映射$f(x)=x^2+ax+b$有适合$f(x)=x$的x时,这个x叫做f的不动点.为使f在区间$[-1,1]$上有绝对值相等且符号相反的两个相异不动点,a,b满足怎样的条件才是必要且充分的?

若f在区间$[-1,1]$上有绝对值相等且符号相反的两个相异不动点,

则$x^2+ax+b=x$在$x\in[-1,1]$内的两个根的绝对值相等且符号相反.

$\because$ $x^2+(a-1)x+b=0$的两个根的绝对值相等符号相反,

$\therefore$ $a=1$,

$\therefore$ $x^2=-b$.

$\because$ $x\in[-1,1]$有两解.

$\therefore$ $-1\leqslant b<0$.

$\therefore$ a,b满足$a=1$,且$-1\leqslant b<0$.

下面证明条件是充分的.

由$a=1$,得$f(x)=x^2+x+b$,

则方程$f(x)=x$为$x^2=-b$.

$\because$ $-1\leqslant b<0$,

$\therefore$ $0<-b\leqslant 1$.

解得$x=\pm\sqrt{-b}\in[-1,1]$,

即f在区间$[-1,1]$上有绝对值相等符号相反的两个相异不动点$x=\pm\sqrt{-b}$.

综上所述,a,b满足的充要条件是$a=1$,且$-1\leqslant b<0$.

寻找命题成立的充要条件的问题,有两种方法:一是如同本例,先求出其必要条件,再证明其充分性;二是由结论或条件出发,作每一步均等价的推导(变换),直到得出问题的条件(或结论).

归纳提炼

(1) 判断一个复合命题的真假,一般分为三个步骤:①确定复合命题的构成形式;②判定其中各简单命题的真假;③利用真值表判断复合命题的真假.

(2) 充要条件的有关定义,实际上给出了判断的法则.注意到互为逆否命题的等价性,即$A\Rightarrow B$等价于$\neg B\Rightarrow\neg A$;$B\Rightarrow A$等价于$\neg A\Rightarrow\neg B$.判断A是B的什么条件,有以上两种方法可供选用.另外,利用集合间的包含关系,也是判断方法之一.如:设$A=\{x|P(x)\}$,$B=\{x|Q(x)\}$.若$A\subseteq B$,则P是Q的充分条件;若$B\subseteq A$,则P是Q的必要条件;若$A=B$,则P是Q的充要条件.

随堂练习

1. 已知$p:|2x-3|<1$,$q:x(x-3)<0$,则p是q的( )
   (A) 充分不必要条件.
   (B) 必要不充分条件.
   (C) 充要条件.
   (D) 既不充分也不必要条件.
2. 已知集合P,M,N.若"$x\in P$"是"$x\in M$或$x\in N$"的充要条件,那么"$x\in M$"是"$x\in P$"的( )
   (A) 充分不必要条件.
   (B) 必要不充分条件.
   (C) 充要条件.
   (D) 既非充分又非必要条件.
3. 设$x>0,y>0$时函数$f(x)$满足$f(xy)=f(x)+f(y)$.现给出下列命题:
   ①$f(1)=0$;
   ②$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$;
   ③$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$;
   ④$f(x^n)=nf(x)$;
   ⑤$f(x-y)=f(x)-f(y)$;
   ⑥$f(2x)=2f(x)$.
   其中正确的命题的个数是( )
   (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.
4. 命题"若x,y是奇数,则$x+y$是偶数"的逆否命题是:________.
5. 函数$f(x)=ax^4+x+1$有极值的充要条件是________________.
6. 把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题:

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于________对称,则函数 $g(x)=$________(注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形).

7. 分别求出能使不等式 $|2x+4|<6$ 成立的一个充分不必要条件,一个必要不充分条件.

8. 求证:"$a+b+c=0$"是"方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1"的充要条件.

9. 命题 p:不等式 $|2x-1|<x+a$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}<x<3\right\}$;

命题 q:不等式 $4x\geqslant 4ax^2+1$ 的解集是 $\varnothing$.

若"p 或 q"为真命题,试求 a 的取值范围.

10. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

(1) 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$,求证:$\angle B$ 必为锐角;

(2) 求证:方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $\angle A=90^\circ$.

本章检测

一、选择题

1. 设 $M=\{x|x^2<9\}$,$a=-4$,则(　　)

(A) $a\in M$.　(B) $a\notin M$.

(C) $\{a\}\notin M$.　(D) $\{a\}\subset M$.

2. 设 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x|1\leqslant x<2\}$,$B=\{x|2\leqslant x<3\}$,则下列关系不正确的是(　　)

(A) $A\cap B=\{2\}$.

(B) $A\cup B=\{x|1\leqslant x<3\}$.

(C) $A\subsetneqq \complement_U B$.

(D) $B\subsetneqq \complement_U A$.

3. 不等式 $\frac{x-1}{2x}\leqslant 1$ 的解集是(　　)

(A) $\{x|x\geqslant -1\}$.

(B) $\{x|x\leqslant -1\}$.

(C) $\{x|-1\leqslant x<0\}$.

(D) $\{x|x\leqslant -1$,或 $x>0\}$.

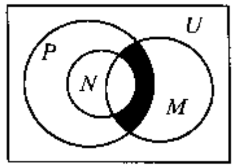
4. 设 U 为全集,M,N,P 都是 U 的子集,则图中阴影部分表示的集合是(　　)

(A) $M\cap(N\cup P)$.

(B) $M\cap(\complement_U N\cap P)$.

(C) $(\complement_U M\cap \complement_U N)\cap P$.

(D) $(M\cap N)\cup(M\cap P)$.



(第 4 题)

5. 若不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是 $\{x|1<x<2\}$,则不等式 $\frac{x^2+px+q}{x^2-5x-6}>0$ 的解集是(　　)

(A) $\{x|1<x<2\}$.

(B) $\{x|x<-1$,或 $x>6\}$.

(C) $\{x|-1<x<1$,或 $2<x<6\}$.

(D) $\{x|x<-1$,或 $1<x<2$,或 $x>6\}$.

6. "$a=b$"是"直线 $y=x+2$ 与圆 $(x+a)^2+(y+b)^2=2$ 相切"的(　　)

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分又不必要条件.

7. 设 $A=\{x|x=\sqrt{5k+1},k\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x|x\leqslant 6,x\in\mathbf{Q}\}$,则 $A\cap B$ 等于(　　)

(A) $\{1,4\}$.　(B) $\{1,6\}$.

(C) $\{4,6\}$.　(D) $\{1,4,6\}$.

8. 设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$,$Q=\{m|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立,$m\in\mathbf{R}\}$,则下列关系成立的是(　　)

(A) $P\subsetneqq Q$.　(B) $Q\subsetneqq P$.

(C) $P=Q$.　(D) $P\cap Q=\varnothing$.

9. $x\in \complement_U(A\cup B)$ 的充要条件是(　　)

(A) $x\in \complement_U A$.

(B) $x\in \complement_U B$.

(C) $x\in \complement_U A$ 且 $x\in \complement_U B$.

(D) $x\in \complement_U A$ 或 $x\in \complement_U B$.

10. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-1}{x+1}<0\right\}$,$B=\{x||x-b|<a\}$.若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件,则 b 的取值范围是(　　)

(A) $-2\leqslant b<0$.

(B) $0<b\leqslant 2$.

(C) $-3<b<-1$.

(D) $-1\leqslant b<2$.

二、填空题

11. 不等式 $x>\frac{1}{x}$ 的解集是________.

12. 条件"$x>y$ 且 $xy>0$"是"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$"成立的__________.

13. 已知不等式$\frac{x-a}{x^2-3x+2}>0$ 的解集是 $(1,a)\cup(2,+\infty)$ $(a\neq1)$，则 a 的取值范围是________.

14. 设 $A=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$. 若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题

15. 解不等式组$\begin{cases}6x^2-17x+5<0,\\|x-3|<1.\end{cases}$

16. 已知 $a\in\mathbf{R}$，求使不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1<0$ 对于任意实数 x 不成立的充要条件.

17. 已知函数 $f(x)=\log_a x$，其中 $a\in\{a\mid 20<12a-a^2\}$.

(1) 判断函数 $f(x)=\log_a x$ 的增减性；

(2) 若命题 p：$|f(\sqrt{x})|<1-f(2\sqrt{x})$为真命题，求实数 x 的取值范围.

18. 已知集合 $A=\{x\mid 2x^2+7x-15<0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant0\}$，满足 $A\cap B=\varnothing$. $A\cup B=\{x\mid -5<x\leqslant2\}$，求实数 a，b 的值.

19. 设集合 $E=\{$圆 $C_m\mid$以(m,m^2)为圆心，且与 x 轴相切$\}$.

(1) 若 $C_a\in E$，$C_b\in E$，且 C_a 与 C_b 外切，求 a，b 所满足的关系式；

(2) E 中是否存在仅与 E 中唯一元素外切的元素？请说明理由.