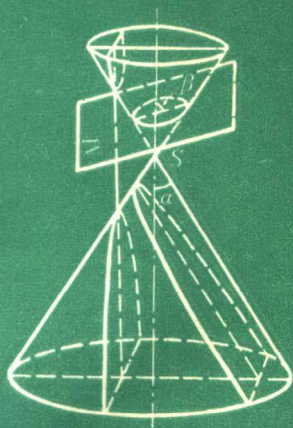


数学进修用书



林 华

# 圆锥曲线

YUANZHUIQUXIAN

浙江人民出版社

数学进修用书  
圆锥曲线  
林 华

\*

浙江人民出版社出版  
(杭州武林路196号)

浙江新华印刷厂印刷  
(杭州环城北路天水桥堍)

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 8.375 字数 190,000  
1982年10月第一版  
1982年10月第一次印刷  
印数：1—5,500

统一书号：7103·1220  
定 价： 0.68 元

## 内 容 提 要

本书运用综合法和解析法详细地介绍圆锥曲线的性质、应用及其作图方法，并利用坐标变换对一般二元二次方程作了系统的论述。资料丰富，选材严谨，例题和习题新颖而且类型多样。

## 编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的。随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务。当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切。本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料。编写时注意照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实。同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学。丛书也适合具有高中程度的学生和青年自学。

# 目 录

第一章 圆锥曲线 .....	( 1 )
§ 1 圆锥曲线名称的由来 .....	( 1 )
§ 2 圆锥曲线的基本特征 .....	( 4 )
§ 3 圆锥曲线的性质 .....	( 10 )
第二章 用解析法研究圆锥曲线 .....	( 18 )
§ 1 椭圆 .....	( 18 )
§ 2 抛物线 .....	( 36 )
§ 3 双曲线 .....	( 44 )
§ 4 共焦的椭圆和双曲线 .....	( 57 )
§ 5 直角坐标系下圆锥曲线方程的统一形式 .....	( 60 )
第三章 坐标变换及其应用 .....	( 63 )
§ 1 坐标变换 .....	( 64 )
§ 2 用坐标变换化简二元二次方程 .....	( 74 )
第四章 不变量及其应用 .....	( 85 )
§ 1 二元二次方程的不变量 .....	( 85 )
§ 2 用不变量化简二元二次方程 .....	( 90 )
第五章 二次曲线的一些性质和位置的确定 .....	( 102 )
§ 1 对称中心和对称轴的确定 .....	( 102 )
§ 2 二次曲线位置的确定 .....	( 107 )
§ 3 二次曲线束 .....	( 112 )
第六章 直径和共轭直径 .....	( 122 )
§ 1 基本概念 .....	( 123 )
§ 2 椭圆的弦和共轭直径 .....	( 125 )

§ 3	抛物线的弦与直径 .....	( 134 )
§ 4	双曲线的弦与共轭直径 .....	( 142 )
§ 5	等轴双曲线的弦 .....	( 150 )
第七章	切线和法线 .....	( 157 )
§ 1	椭圆的切线和法线 .....	( 159 )
§ 2	抛物线的切线和法线 .....	( 180 )
§ 3	双曲线的切线和法线 .....	( 198 )
§ 4	用切线确定二次曲线 .....	( 210 )
第八章	关于圆锥曲线的作图 .....	( 215 )
§ 1	关于椭圆的主要作图 .....	( 215 )
§ 2	关于抛物线的主要作图 .....	( 222 )
§ 3	关于双曲线的主要作图 .....	( 226 )
	习题答案 .....	( 234 )

## 第一章 圆锥曲线

在文艺演出过程中，往往运用灯光的作用加强艺术效果。比如，舞台上有时就会出现一圈醒目的亮光照射在剧中主人公身上，以突出其形象。当时，作为观众，你有否发现这圈亮光是呈椭圆形的，如果注意到了，那么你又是否想过，这圈亮光为什么是这种形状？为了说明究竟，我们从圆锥曲线名称的由来谈起。

### § 1 圆锥曲线名称的由来

#### 一、由来简说

在现实世界中，物体的几何形状，质点的运动轨迹是复杂而多样的。在有些看来毫不相关的问题中，会出现同样的曲线，而在同一问题中，却又可能出现不同的曲线。其中，除了人们熟知的、也是最简单的直线和圆以外，还有其它一些曲线。例如，实践活动中经常遇到的椭圆、双曲线和抛物线等。

只要对周围环境稍加注意，我们便会发现许多这样的曲线。比如，汽车油罐封头是椭圆形的，圆形物体在阳光斜照下的影子，有些齿轮的齿廓线，人造地球卫星运行的轨道，……都是椭圆形曲线；又如，反比例函数的图象是双曲线，汽车前灯将公路照亮部分的边界是双曲线的一支，浙江人民体育馆马鞍形悬索结构的屋面与水平面的截线，南京长江大桥公路引桥

两头的34孔拱桥的拱轴线，……也都是双曲线；再如，弹道曲线是抛物线，手电筒、汽车前灯、探照灯等反射面的轴截线也都是抛物线。还有各种桥拱轴线，隧道、涵洞断面上的拱轴线等都是这样的一些曲线。

所有上述这些曲线统称为“圆锥曲线”。为什么可以用这个统一名称呢？原来，椭圆、双曲线和抛物线最初是从不同位置的平面与正圆锥面的截线中发现的。作为几何图形来说，这是它们具有的共同性质。因而，历史上一直把这些曲线总称为圆锥截线或圆锥曲线。

圆锥曲线的研究起源于公元前四世纪的古希腊。柏拉图、蒙爱启玛斯、阿基米德，特别是阿波罗尼斯对此进行了详细的探讨。但那时并未考虑实际背景，而仅仅是一种纯几何的讨论。因此，在后来的一千多年中没有什么发展。直到十七世纪初，由于生产的发展，科技的进步，才揭示了圆锥曲线的实际意义。例如，在天文学上，开普勒发现了行星绕太阳运行的轨道是椭圆，一些慧星的轨道是双曲线；在力学上，伽利略确定了抛射体的轨道是抛物线等等。可以认为，如果没有阿波罗尼斯等人的工作，开普勒在对行星轨道进行复杂、繁重的计算时就可能更加困难，而牛顿是否能在当时完成他的万有引力定律也就很难说了。所以，希腊数学家对于圆锥曲线的研究，是十七世纪以后的天体力学发展的基础。反过来，在解决这些实际问题的过程中，圆锥曲线本身的理论发展也获得了新的、真正的动力。

## 二、圆锥曲线的产生与类型

上面已指明，圆锥曲线最初是从平面与正圆锥面相截的截痕中发现的。那么，怎样位置的平面与正圆锥面相截才会得出圆锥曲线呢？



如所知，正圆锥面是一种常见的几何图形，在图1-1-1中， $\alpha$ 称为半锥角，它是正圆锥面的母线与锥轴交成的等角。以后，为了方便，我们把正圆锥面简称为圆锥，把它的顶点 $S$ 简称为锥顶，并以锥顶的字母标记相应的圆锥，而把截圆锥的平面简称为截面或截面。

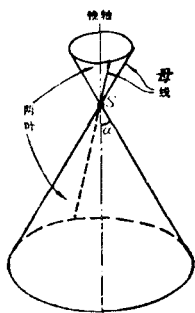


图1-1-1

现在，设圆锥 $S$ 的半锥角为 $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )，不通过锥顶 $S$ 的截面 $\Sigma$ 与锥轴 $Z$ 的

交角为 $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ )。从图1-1-2可见，由于 $\beta$ 和 $\alpha$ 的大小关系有三种可能性，所以 $\Sigma$ 与 $S$ 相截的截痕也就有三种相应的类型。我们定义如下：

定义1-1-1 如果给定圆锥的半锥角为 $\alpha$ ，截面与锥轴的交角为 $\beta$ ，那么对应着 $\alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ 、 $\beta = \alpha$ 、 $0 \leq \beta < \alpha$ 的圆锥曲线分别是椭圆、抛物线、双曲线。

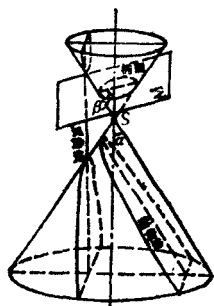


图1-1-2

显然，它们都是平面曲线。而当 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时，圆锥曲线是圆。它是特殊的椭圆。

由于 $\beta$ 与 $\alpha$ 的大小关系完全确定了 $\Sigma$ 与圆锥 $S$ 母线的相互位置关系，所以，从图1-1-2不难看出，椭圆是封闭曲线，且位于圆锥 $S$ 的同一叶上；抛物线和双曲线都是开口的、无限伸展的曲线，不同的是抛物线位于 $S$ 的同一叶上，而双曲线位于 $S$ 的两叶上，它由两支曲线组成。

定义1-1-1说明了椭圆、抛物线、双曲线是圆锥被不同倾斜度的平面截出的曲线。这一事实，反映了所述三类曲线在中心投影<sup>①</sup>下可以互变。例如，在灯光照射下，圆在各种不同倾斜度的平面上的影子有的是椭圆，有的是抛物线，也有的是双曲线，这因为圆形物体挡住光的黑暗区域是圆锥形。这里我们顺便回答本书开头提出的问题。由于舞台照明灯射出的光线束组成了一个圆柱体<sup>②</sup>，它是锥顶在无限远处的圆锥体(若是采用普通灯罩，则组成锥顶在照明灯处的圆锥体)。而舞台面相当于截面 $\Sigma$ ，只要照明灯安装在适当位置，由它射出的光线在舞台上留下的一圈亮光就是椭圆形的。

此外，当截面 $\Sigma$ 通过锥顶 $S$ 时，椭圆退化为一·点，称为点椭圆；抛物线退化为一条(重合)直线；双曲线退化为·一对相交的直线。而当锥顶在无穷远处、即圆锥 $S$ 退化为圆柱时，圆锥曲线相应为一对平行的直线，或一条(重合)直线，或者是虚直线。这些都是退化的抛物线。

以后都是讨论非退化的圆锥曲线，即给定的任一截面都·不过锥顶，除非特别指明。

## § 2 圆锥曲线的基本特征

### 一、基本特征

上述已知，截面 $\Sigma$ 至少与圆锥 $S$ 的一叶相交。在这一叶，锥顶 $S$ 与 $\Sigma$ 之间的腔内必可作唯一的球 $O$ ，使它与 $\Sigma$ 切于点 $F$ ，与圆锥 $S$ 内切于圆 $C$ ，于是锥轴 $Z$ 就垂直于 $C$ 所在的平面 $\omega$ 。

<sup>①</sup>从一点 $S$ 引出的射线，与两张不重合的平面各有一个交点，若把这对交点规定为一对对应点，则这样规定的两平面间的对应关系称为以 $S$ 为中心的中心投影。中心投影也称为透视对应。<sup>②</sup>参见本书定理7-2-2。

见图1-2-1. 设  $S$  的半锥角为  $\alpha$ ,  $\Sigma$  与  $Z$  轴的交角为  $\beta$ , 只要  $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\Sigma$  与  $\omega$  就必相交于一直线  $l$ .

若在  $\Sigma$  截  $S$  所得的圆锥曲线  $\Gamma$  上任取一点  $M$ , 且过  $M$  分别作平面  $\omega$  和直线  $l$  的垂线,  $D$  和  $A$  是相应的垂足, 则连线  $MD \parallel Z$  轴. 再由三垂线定理的逆定理知道, 连线  $AD \perp l$ , 因而, 从  $D$  点所作的

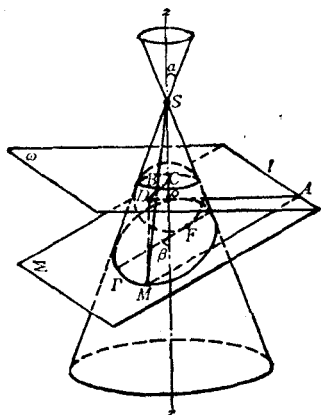


图1-2-1

$AM$  的垂线也垂直于  $\Sigma$ . 由直线与平面夹角的定义可知,  $\angle AMD = \beta$ , 于是在直角  $\triangle ADM$  中有关系式

$$|MD| = |MA| \cos \beta. \quad (1-2-1)$$

又因连线  $MS$  就是  $S$  的一条母线, 它与  $\omega$  的交点  $B$  必在圆  $C$  上, 所以  $MB$  就是球  $O$  的切线, 再从  $MD \parallel Z$  轴, 得  $\angle BMD = \alpha$ , 从而在直角  $\triangle BDM$  中成立

$$|MD| = |MB| \cos \alpha \quad (1-2-2)$$

比较式(1-2-1)和式(1-2-2)可见  $\frac{|MB|}{|MA|} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ , 由于  $MB$  和  $MF$  都是球  $O$  过点  $M$  的切线, 所以,  $|MB| = |MF|$ . 而若令

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e \text{ (正常数)}, \quad (1-2-3)$$

最后得到

$$\frac{|MF|}{|MA|} = e. \quad (1-2-4)$$

式中  $|MF|$  是  $\Gamma$  上任一点  $M$  到切点  $F$  的距离,  $|MA|$  是点  $M$  到直线  $l$  的距离.

由上述作出球  $O$  的过程知道, 对于给定的圆锥  $S$  和截平面  $\Sigma$ , 球  $O$  与  $\Sigma$  的切点  $F$  是定点,  $\Sigma$  与  $\omega$  的交线  $l$  是定直线, 因此从式(1-2-4)我们有

**结论1-2-1** 圆锥曲线  $\Gamma$  上任一点  $M$ , 到一定点  $F$  和一不过  $F$  的定直线  $l$  的距离之比等于一个正常数  $e$ , 其中  $e$  由(1-2-3)式给定.

反过来, 可以证明

**结论1-2-2** 如果平面  $\Sigma$  上的一点  $M$  到定点  $F$  和不过  $F$  的定直线  $l$  的距离之比为正常数  $e$ , 那么, 点  $M$  必在圆锥曲线  $\Gamma$  上.

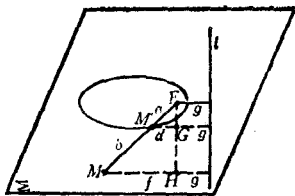


图1-2-2

**证明** 如图1-2-2, 假设  $M$  在  $\Gamma$  外, 则线段  $MF$  与  $\Gamma$  必相交, 记交点为  $M'$ . 若点  $F, M', M$  到  $l$  的距离分别是  $g, g+d, g+f$ , 而  $|M'F|=a, |MM'|=b$ , 则从结论1-2-2的已知条件有  $\frac{a+b}{g+f}=e$ . 但  $M'$  在  $\Gamma$  上, 由结论1-2-1知  $\frac{a}{g+d}$

$=e$ . 于是  $\frac{a}{g+d} = \frac{a+b}{g+f}$ , 由此可得

$$af = ad + bg + bd, \quad (1-2-5)$$

另一方面, 在图1-2-2中, 因  $\triangle FM'G \sim \triangle FMH$ , 故

$$\frac{a}{d} = \frac{a+b}{f}, \text{ 由此得到}$$

$$af = ad + bd. \quad (1-2-6)$$

将式(1-2-5)减去式(1-2-6)有  $bg=0$ , 但  $g \neq 0$ , 只有  $b=0$ ,

即  $M \equiv M'$ 。这和假设  $M$  不在  $\Gamma$  上矛盾，故  $M$  在  $\Gamma$  上。

当点  $M$  在  $\Gamma$  内的情形，或者连线  $MF \perp l$  的情形，我们可类似地证明。

因为不过锥顶  $S$  的平面与圆锥截得的曲线均不退化，所以将上面两个结论合起来可得

**定理1-2-1** 平面上任一点  $M$  在圆锥曲线上的充要条件是它到同一平面上的定点  $F$  和不过  $F$  的定直线  $l$  的距离之比等于正常数  $e$ 。

这是圆锥曲线共有的基本特征。

作为练习，读者可对  $\beta = \frac{\pi}{2}$  的情形说明其相应的特点。

因为定点  $F$ 、定直线  $l$  和常数  $e$  都与点  $M$  在圆锥曲线  $\Gamma$  上的位置无关，所以我们将  $F$ 、 $l$  和  $e$  分别称为圆锥曲线  $\Gamma$  的焦点、准线和离心率。而将  $\Gamma$  上的点  $M$  与  $F$  的连线段之长称为  $\Gamma$  在点  $M$  的焦半径。

另外，通过上述讨论，还顺便得到了圆锥曲线  $\Gamma$  的准线  $l$  的一种空间作图法。

## 二、离心率和圆锥曲线的类型

对于给定的圆锥  $S$ ，因为半锥角  $\alpha$  为定值，所以从式(1-2-3)可见，这时  $e$  是角  $\beta$  的函数。由于定义1-1-1，我们就可用  $e$  的取值范围来区分圆锥曲线的类型。下面讨论离心率  $e$  和圆锥曲线的类型的关系。

1. 当  $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  时，圆锥曲线  $\Gamma$  是椭圆。在这种情形下，

因为  $\cos \beta < \cos \alpha$ ，所以

$$\frac{|MF|}{|MA|} = e < 1. \quad (1-2-7)$$

反过来, 若点 $M$ 使式(1-2-7)成立, 则由式(1-2-3)可见,  $\cos \beta < \cos \alpha$ , 再从定义 1-1-1 以及余弦函数的性质知点 $M$ 必在椭圆上. 因此得椭圆的特征性质:

结论1-2-3 椭圆的离心率是小于1的正常数.

若  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , 则椭圆成为圆. 因这时  $\cos \beta = 0$ , 故  $e = 0$ . 这就表示圆的离心率  $e = 0$ . 但从图1-2-1可见, 截面  $\Sigma // \omega$ , 于是准线  $l$  在无穷远处.

2. 当  $\beta = \alpha$  时,  $\Gamma$  是抛物线. 在这种情形下, 因为  $\cos \beta = \cos \alpha$ , 所以

$$\frac{|MF|}{|MA|} = e = 1. \quad (1-2-8)$$

反过来, 若点 $M$ 使式(1-2-8)成立, 则和情形1一样可证点 $M$ 必在抛物线上. 因而有

结论1-2-4 抛物线的离心率  $e = 1$ .

这是抛物线的特征性质.

3. 当  $0 < \beta < \alpha$  时,  $\Gamma$  是双曲线. 在这种情形下, 因为  $\cos \beta > \cos \alpha$ , 所以

$$\frac{|MF|}{|MA|} = e > 1. \quad (1-2-9)$$

反过来, 定理1-2-1、结论1-2-3和结论1-2-4证明了具有性质(1-2-9)的点 $M$ 必在双曲线上. 这样, 我们又得到了双曲线的特征性质, 即

结论1-2-5 双曲线的离心率是大于1的常数.

若  $\beta = 0$ , 则表示截平面  $\Sigma$  平行于  $S$  的锥轴.

三、圆锥曲线作为动点的轨迹

上述讨论, 使我们可以抽去圆锥曲线作为平面截线的几何

意义，而从运动学的观点来研究它，即把它看作动点的轨迹。将结论1-2-3、1-2-4和结论1-2-5合起来，我们得到

**定理1-2-2** 在一平面上，若动点到一定点的距离，与它到不过该定点的定直线的距离之比为正常数 $e$ ，则该动点的轨迹是圆锥曲线 $\Gamma$ 。当 $e < 1$ 时 $\Gamma$ 为椭圆；当 $e = 1$ 时 $\Gamma$ 为抛物线；当 $e > 1$ 时 $\Gamma$ 为双曲线。

这个定理阐明了三类圆锥曲线共有的特征性质，因而，通常就把它作为椭圆、抛物线和双曲线的统一定义。据此，选取适当的极坐标系，就可以得到这三类曲线统一的极坐标方程。其形式之一为

$$\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}. \quad (1-2-10)$$

式中 $(\rho, \theta)$ 为动点的极坐标， $p$ 为定点 $F$ 到定直线 $l$ 的距离， $e$ 是相应的离心率<sup>①</sup>。对应着 $e < 1$ 、 $e = 1$ 、 $e > 1$ 方程(1-2-10)分别表示椭圆、抛物线、双曲线。

这些在平面解析几何中都是熟知的。

此外，定理1-2-2还指出了，圆锥曲线的形状完全依赖于正常数 $e$ 的取值。对于平面 $\Sigma$ 上给定的点 $F$ 和直线 $l$ ，以及给定的 $e$ 值，总可以找到前述的角 $\alpha$ 和 $\beta$ ，使式(1-2-3)成立。依照这样的 $\alpha$ 和 $\beta$ 作出类似于图1-2-1的图来，所得平面与圆锥的交线当然是圆锥曲线。而当 $e$ 通过大于零的任意值时，这样的作图便产生了对应于 $e$ 的一切可能的曲线。所有这些曲线都是圆锥曲线。

<sup>①</sup>若将过点 $F$ 平行于 $l$ 的直线被 $\Gamma$ 所截的线段长的一半记为 $p$ ，则 $\Gamma$ 在极坐标系下方程的统一形式为

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (1-2-10)'$$

式中 $p$ 称为圆锥曲线的焦参数，或称半正焦弦。

又由结论1-2-3下面的叙述可见，除圆外一切非退化的圆锥曲线均有准线，而它与准线有关的性质构成了圆锥曲线希腊名称的依据。希腊名称就是根据曲线对于准线的关系而来的：椭圆的  $e$  不足1 ( $\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\acute{\iota}\pi\epsilon\upsilon\nu$ )，抛物线的  $e$  正好是1 ( $\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\upsilon\nu$ )，双曲线的  $e$  则超过1 ( $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\upsilon\nu$ )。

### § 3 圆锥曲线的性质

#### 一、椭圆的性质

##### 1. 几何特征

由定义1-1-1，当  $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  时，圆锥曲线  $\Gamma$  是椭圆。这时截面  $\Sigma$  与圆锥  $S$  的一叶相截，且将这一叶分为两部分。如图1-3-1，在这两部分的腔内各作球  $O_1$  和  $O_2$ ，分别与  $\Sigma$  切于点  $F_1$  和  $F_2$ ，与圆锥  $S$  内切于圆  $C_1$  和  $C_2$ 。设圆  $C_1$  和  $C_2$  所在的平面相应为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ，由于  $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ ，故  $\Sigma$  与  $\omega_1$  和  $\omega_2$  必相交。相应

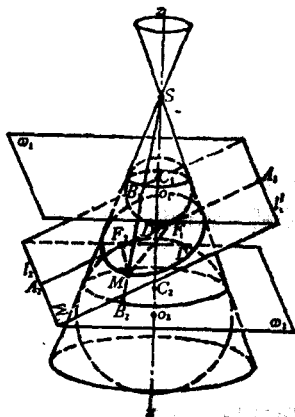


图1-3-1

的交线记为  $l_1$  和  $l_2$ 。若我们在  $\Gamma$  上任取一点  $M$ ，则连线  $SM$  为圆锥  $S$  的母线，它与  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  的交点  $B_1$ 、 $B_2$  必在相应的圆  $C_1$ 、 $C_2$  上。再因为连线  $MF_1$  和  $MB_1$ 、连线  $MF_2$  和  $MB_2$  分别是点  $M$  到球  $O_1$ 、 $O_2$  的切线，所以  $|MF_1| = |MB_1|$ 、 $|MF_2| = |MB_2|$ ，从而  $|MF_1| + |MF_2| = |MB_1| + |MB_2|$ 。又从图1-3-1可见， $|MB_1| + |MB_2| = |B_1B_2|$  是圆锥  $S$  的母线在圆  $C_1$  和  $C_2$  间的



长. 对于给定的  $\Sigma$ , 因为圆  $C_1$  和  $C_2$  的位置都唯一确定, 且所在的平面  $\omega_1 \parallel \omega_2$ , 于是  $S$  的母线在  $C_1$  和  $C_2$  间的长处处相等, 而与  $M$  在  $\Gamma$  上的位置无关. 若记  $|B_1B_2| = 2a$ , 则有

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a, \quad (1-3-1)$$

式中  $a$  为正常数, 且  $2a > |F_1F_2|$ .

又因为当  $\Sigma$  给定后,  $\Sigma$  与球  $O_1, O_2$  的切点  $F_1, F_2$  也随着确定, 所以从(1-3-1)我们得到

**结论1-3-1** 椭圆  $\Gamma$  上任意一点  $M$  到两定点  $F_1, F_2$  的距离之和等于定长  $2a(a > 0)$ , 且  $2a > |F_1F_2|$ .

反过来, 可以证明

**结论1-3-2** 平面  $\Sigma$  上到两定点  $F_1$  与  $F_2$  的距离之和等于正常数  $2a (> |F_1F_2|)$  的点  $M$  必在椭圆  $\Gamma$  上.

**证明** 若点  $M$  在  $\Gamma$  外, 由于  $\Gamma$  是封闭曲线, 所以线段  $MF_2$  与  $\Gamma$  必相交, 设交点为  $M'$ , 如图1-3-2, 我们有  $|MF_2| = |MM'| + |M'F_2|$ . 因为  $M'$  在  $\Gamma$  上, 所以从结论1-3-1 可得  $|M'F_2| + |M'F_1| = 2a$ . 但从已知条件有  $|MF_2| +$

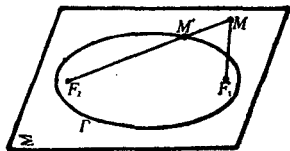


图1-3-2

$|MF_1| = 2a$ . 将以上三式合起来可得  $|MF_1| = |M'F_1| - |MM'|$ , 这与三角形两边之差小于第三边矛盾. 因此  $M$  必在  $\Gamma$  上.

若点  $M$  在  $\Gamma$  内, 我们可进行类似的证明. 若点  $M$  与  $F_1, F_2$  共线, 则也不难证得  $M$  在  $\Gamma$  上.

结论1-3-1和1-3-2揭示了椭圆的几何特征, 即

**定理1-3-1** 椭圆是平面上到两定点距离之和为常数  $2a$  (大于两定点间的距离) 的动点轨迹.