配全日制普通高级中学教科书使用

QIANTIWANG
JIEFADADIAN

千题王

解法大典

知识方法 分类全解

知识同步分类
方法要点剖析
诠释解题规律

高二数学

延边人民出版社

配全日制普通高级中学教科书使用

解法大典

知识方法 分类全解

主　编　魏烈斌

编　著　杨先义　魏士芳　魏烈斌

高二数学

延边人民出版社

责任编辑：张光朝
责任校对：袁明红

解法大典

高二数学

主编：魏烈斌

出　版　延边人民出版社　（吉林省延吉市友谊路363号，http://www.ybcbs.com）
发　行　延边人民出版社
印　刷　武汉市新华印务有限公司

890×1240毫米　32开　印张34.25　字数754千字
2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷

ISBN 7-80698-535-2 / G · 391
全套定价：39.00元（本册13.00元）

千锤百炼　解法大典

“学好数理化，走遍天下都不怕。”数理化一直是中学生学习中的难点，为了很好地解决“数理化难学”的问题，我们特邀国内多所名牌中学特级教师、教学专家，精心编写了大型系列丛书《解法大典》。

新颖　科学　精细

数理化具有很强的逻辑性、系统性，梳理知识尤为重要。作者将各学科基础知识、基本题型、基本方法按现行教材的章节顺序和最新《教学大纲》、《考试说明》、《课程标准》的精神进行了科学的概括、提炼、分类研究，既注重知识的系统性和完整性，又考虑到各类问题的特殊性和相对独立性，设计专题研究，专题解析。

精练　典型　实用

编者吸取百家之精华，知识提炼、例题选取改变目前某些教辅选题的随意性、杂乱性、重复性、跳跃性等问题，力求学科知识的系统性、典型性、针对性、技巧性、新颖性；并选入了一定数量与生产、生活、科技相结合的研究性例题；所选例题精练、典型，涵盖了高中（初中）阶段必须掌握的所有知识内容和基本方法。

引领思路 探求方法 点拨技巧

《解法大典》具有《题典》的所有功能，但它不同于一般的《题典》，《解法大典》除了对知识内容、典型例题进行精细的分类外，还有系统的方法指导；各类经典例题都有【解法指导】、【解法概要】或【解法总结】等，且编写形式灵活，其目的是为了使学生在系统地掌握基础知识的同时，创造性地领悟各类题型的分析方法与解题技巧，达到触类旁通、举一反三的学习效果。

本套书是我们挖掘近百位中学教学专家几十年来的教学成果与积累，倾情奉献给广大读者的最经典、最新颖、最实用的数理化学法、解法指导书，书中内容曾在全国各地重点中学交流试用，反响强烈，深受师生喜爱。我们坚信这套书的出版，定能受到广大中学师生的加倍青睐。

《解法大典编》写组

目录 MULU

高二数学

第 6 章 不等式

知识结构网络图

$$\text{不等式的性质}\left\{\begin{array}{l}\text{均值不等式}\\\text{不等式的证明}\\\text{不等式的解法}\end{array}\right\}\text{不等式的应用}$$

一 均值不等式

1 不等式的性质

【例 1】 适当增加条件，使下列命题成立

(1)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$　　(2)若 $a>b$，则 $-ac<-bc$

(3)若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(4)若 $a<b$，则 $a^2<b^2$

(5)若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

【解析】 1)由 $ac^2>bc^2$，知 $c\neq0$，即 $\frac{1}{c^2}>0$，对条件 $ac^2>bc^2$ 两端乘以正数 $\frac{1}{c^2}$，可得结论 $a>b$ 成立.

2)由 $a>b\Rightarrow-ac<-bc$ 成立，只需增加 $c>0$ 即可.

3)$a>b\Rightarrow a-b>0\Rightarrow b-a<0$，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$

$\therefore ab>0$.　$\because a>b$，　$\therefore$ 增加 $a>b>0$ 或 $b<a<0$.

4)增加 $a\geq0$

5)增加 $b\geq0$，$d\geq0$ 或 $a>0$，$d\geq0$ 或 $b\geq0$，$c>0$.

【解法指导】 熟练掌握不等式各性质成立的条件.

【例 2】 已知三个不等式：(1)$ab>0$；(2)$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$；(3)$bc>ad$. 以其中

两个作为条件，余下一个作为结论，则可以组成一个正确的命题.

【解析】 若(1)、(2)成立，则 $ab(-\frac{c}{a})<ab\cdot(-\frac{d}{b})$，即 $-bc<-ad$，$\therefore bc>ad$ 即(3)成立.

若(1)、(3)成立，则 $\frac{bc}{ab}>\frac{ad}{ab}$ 即 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，$\therefore -\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，那么(2)成立.

若(2)、(3)成立，则由(2)得 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$ 即 $\frac{bc-ad}{ab}>0$，$\because$(3)成立，即 $bc-ad>0$，则 $ab>0$ 即(1)成立. 故可组成三个正确的命题.

【解法指导】 共可组成三个命题，再逐一验证各命题正确与否.

【例3】 下面每组的四个结论中，有几个是正确的？说明理由.

$$(1)a<b<0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}>\frac{1}{b} & ①\\ |a|>|b| & ②\\ a^2>b^2 & ③\\ \sqrt{-a}>\sqrt{-b} & ④\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}a>b\\ c>d\\ cd\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-c>b-d & ①\\ \frac{a}{c}>\frac{b}{d} & ②\\ c-b>d-a & ③\\ ac>bd & ④\end{cases}$$

【解析】 (1)由 $a<b<0\Rightarrow -a>-b>0\Rightarrow -\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

$\therefore$①正确. 由绝对值的意义知，较小的负数的绝对值较大，故②正确. 由 $|a|>|b|\Rightarrow a^2>b^2$ 知③也正确. 由 $a<b<0\Rightarrow -a>-b>0\Rightarrow\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$，$\therefore$④正确.

(2)令 $a=5,b=4,c=3,d=2$，可以验算①②错误. 令 $a=6,b=1,c=-2,d=-3$ 可以验算④错误，由 $a>b$，$\therefore -b>-a$，又 $c>d$，$\therefore c-b>d-a$，$\therefore$③正确.

【解法指导】 说明其错误只需举一反例即可.

【例4】 设命题甲：x 和 y 满足 $\begin{cases}2<x+y<4,\\ 0<xy<3\end{cases}$，命题乙：$x$ 和 y 都满足 $\begin{cases}0<x<1\\ 2<y<3\end{cases}$，那么甲是乙的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】 若乙成立，即 $0<x<1,2<y<3$ 成立，由不等式的性质知 $2<x$

$+y<4,0<xy<3$，故甲成立，因此甲是乙的必要条件，反之，若甲成立，取 $x=\frac{1}{2}$，$y=3$，满足 $2<x+y<4,0<xy<3$，但不满足乙中 $2<y<3$，故甲不是乙的充分条件，故选 B.

【解法指导】 依据充要条件的判断方法来判断.

【例 5】 设实数 a、b、c 满足 $\begin{cases} b+c=6-6a+3a^2 & ① \\ c-b=4-4a+a^2 & ② \end{cases}$

则 a、b、c 的大小关系是____.

【解析】 可利用判断 $c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2$ 的符号来比较 b 与 c 的大小. 将①、②两式相加或相减可将 b 或 c 用 a 的函数表达式表示出来，从而可将 $a-b$ 或 $a-c$ 用 a 的表达式表示出来，再判断其符号即可比较出 a 与 b 和 a 与 c 的大小关系.

$\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0 \qquad \therefore c\geqslant b$

又 $b-a=\frac{1}{2}[(b+c)-(c-b)]-a=1+a^2-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

$\therefore b>a \qquad \therefore c\geqslant b>a$

【解法概要】 1. 在本题的解答过程中，根据问题的特点运用了 $b=\frac{1}{2}[(b+c)-(c-b)]$ 这一变形技巧.

2. 由 $c\geqslant b,b>a$ 得 $c\geqslant b>a$，利用了不等式的传递性这一性质.

【例 6】 已知 $y=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant 1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

【解析】 本题常出现如下的错误解法：

由 $\begin{cases} -4\leqslant f(1)=a-c\leqslant 1 \\ -1\leqslant f(2)=4a-c\leqslant 5 \end{cases}$ 解得 $\begin{matrix} -\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 3 \\ -\frac{5}{3}\leqslant c\leqslant 7 \end{matrix}$

$\therefore -13\leqslant f(3)=9a-c\leqslant -28\frac{2}{3}$

错在哪里？错就错在多次运用同向不等式叠加这一性质，因 $f(1)$，$f(2)$ 所表示的区域不相同，不等式成立的条件不相同，致使 $f(3)$ 的范围扩大了. 因为 $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，而 $-4\leqslant a-c\leqslant 1$，$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5$，而 $a-c$，$4a-c$ 中的 a、b 不是相互独立的，而是互相限制的，大家不妨分别取 a 的两个值，如 $a=1$ 与 $a=2$，可发现 $a=1$ 与 $a=2$ 时 c 的范围是不同的. 那么，这类题究竟怎样求解呢？由 $M_1<f_1(a,b)<N_1$ 和 $M_2<f_2(a,b)<N_2$，求 $g(a,b)$ 的取值范围，固然要将两个已知不等式相加减，但不等式相加减的次数应尽可能少，以免将取值范围扩大. 这时可以用所谓的"线性相关值"令 $g(a,b)=pf_1(a,b)+$

$qf_2(a,b)$用恒等定理求出待定系数 p、q，再用一次加减，便可求得所需要求的范围.

令 $f(3)=9a-c=p(a-c)+q(4a-c)=(p+4q)a-(p+q)c$

$\therefore\begin{cases}p+4q=9\\p+q=1\end{cases}$　　解得：$p=-\frac{5}{3}$，$q=\frac{8}{3}$

$\therefore f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)\in[-\frac{13}{3},20]$

【例7】 求证：若 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$ 且 $abc>0$，则 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

【解析】 由 $abc>0$ 知，a，b，c 中至少有一个是正数，不妨设 $a>0$，假设 b、c 不全为正，则 $b<0$，$c<0$，$\because a+b+c>0$　$\therefore a>-b-c>0$，从而 $ab<b(-b-c)=-b^2-bc$，即 $ab+bc<-b^2$，$\therefore ab+bc+ca<-b^2+ac<0$ 与 $ab+bc+ca>0$ 矛盾. 故 b、c 全为正，于是 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

【解法指导】 先利用 $abc>0$ 及其对称性，不妨设 $a>0$，然后由于 $bc>0$，分 bc 同正、同负两种情况讨论.

【例8】 使不等式 $a^2>b^2$，$\frac{a}{b}>1$，$\lg(a-b)>0$，$2^a>2^{b-1}$ 都成立时，a 与 b 应满足的条件是____.

【解析】 $\because \lg(a-b)>0\Leftrightarrow a-b>1\Leftrightarrow a>b+1$，从而 $b>0$，否则由 $\frac{a}{b}>1$ 导致 $a<b$ 或 $\frac{a}{b}$ 无意义，显然当 $a>b+1$ 且 $b>0$ 时，$a^2>b^2$，$2^a>2^{b-1}$ 都成立.

【解法指导】 此题结论不唯一，是一道探索性问题.

【解法综述】 利用不等式的性质时，掌握各性质成立的条件是前提. 一定要在理解的基础上，记准、记熟不等式的八条性质，并注意在解题中，灵活、准确的加以应用，对不等式性质的掌握是本章的根本，解不等式及证明不等式都是运用不等式的性质来变形的，每一步变形所运用的性质都应准确把握，抓住不等式性质的前提条件，否则若在某一步上出现问题将会导致全局大错. 同时，也要注意赋值法在解选择题中的应用.

2　实数比较大、小

【例1】 已知 $x\neq y$，将下列两式用不等号连接：

$$x^4+y^4\ \_\_\_\_\ x^3y+xy^3$$

【解析】 本题考查比较法和基本运算能力.

$\because x\neq y$，　$\therefore x-y\neq 0$，　　作差

$$x^4+y^4-x^3y-xy^3=x^3(x-y)+y^3(y-x)$$

$=(x-y)(x^3-y^3)=(x-y)^2(xy+x^2+y^2)$

$=(x-y)^2[(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2]>0$　故答案为“>”.

【例 2】 设 $a>0,b>0,m>0,n>0$,则 $\frac{b}{a},\frac{a}{b},\frac{b+m}{a+m},\frac{a+n}{b+n}$,由大到小的顺序是____________________________.

【解析】 可由赋值法确定四数的大小,也可先确定四数与 1 的大小关系再分类比较大小.

可令 $a>b>0$,$\therefore \frac{b}{a}<1<\frac{a}{b}$,$\therefore a+m>b+m,a+n>b+n$,

$\therefore \frac{a+n}{b+n}>1>\frac{b+m}{a+m}$

又$\because \frac{a+n}{b+n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bn-ab-an}{b(b+n)}=\frac{n(b-a)}{(b+n)n}<0$

$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{ab+am-ab-bm}{a(a+m)}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0$

$\therefore \frac{a}{b}>\frac{a+n}{b+n}>\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$

【例 3】 已知 $a<0,-1<b<0$,则(　　)

A. $a>ab>ab^2$　　B. $ab^2>ab>a$　　C. $ab>a>ab^2$　　D. $ab>ab^2>a$

【解析】 观察各选择支,此问题是比较 a,ab,ab^2 的大小. 由于各式中都含有 a,所以实际上是比较 1、b、b^2 的大小. 由 $-1<b<0$ 可得 $b<b^2<1$,又 $a<0$,$\therefore ab>ab^2>a$　$\therefore$应选 D.

【例 4】 实数 a,b,c,d 满足条件 $\begin{cases} d>c & ① \\ a+b=c+d & ② \\ a+d<b+c & ③ \end{cases}$,将 a、b、c、d 按照从小到大的次序排列起来.

【解析】 三个、四个(或多个)实数比较大小,需找到一个合理的程序,可减少解题的过程,变繁难为简单. $a+d<b+c\Rightarrow d-b<c-a=b-d$,即 $d-b<b-d$,$\therefore d<b$④　由②④得 $a<c$.⑤　由①④⑤得 $a<c<d<b$.

【例 5】 设 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,试比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

【解析】 可用作商法. $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=(\frac{a}{b})^{a-b}$

当 $a>b>0$ 时,$\frac{a}{b}>1,a-b>0$,则$(\frac{a}{b})^{a-b}>1$,于是 $a^ab^b>a^bb^a$.

当 $b>a>0$ 时,$0<\frac{a}{b}<1,a-b<0$,则$(\frac{a}{b})^{a-b}>1$,于是 $a^ab^b>a^bb^a$. 综上所述,对于不相等的正数 a、b,都有 $a^ab^b>a^bb^a$.

【例 6】 已知 $a>0,a^2-2ab+c^2=0,bc>a^2$,试比较 a、b、c 的大小.

【解析】　因 $bc>a^2>0$，故 b、c 同号，依题设，有 $b=\frac{a^2+c^2}{2a}>0$，所以 $c>0$，注意到 $(a-c)^2=2ab-2ac=2a(b-c)>0$，有 $b-c>0$，即 $b>c$，又 $bc=\frac{a^2+c^2}{2a}\cdot c>a^2$，即 $a^2c+c^3>2a^3\Leftrightarrow a^3-c^3+a^3-a^2c<0\Leftrightarrow(a-c)(a^2+ac+c^2)+a^2(a-c)<0\Leftrightarrow(a-c)(2a^2+ac+c^2)<0$，而 $2a^2+ac+c^2=(a+\frac{1}{2}c)^2+a^2+\frac{3}{4}c^2>0$，故 $a<c$，综上，$a<c<b$.

【例7】　设 $a>0$，且 $a\neq1$，$t>0$，比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小.

【解析】　作差，利用对数性质，变换为两数之比，再与1进行比较，这里的底的情况不明，应分类讨论. $\because\log_a\frac{t+1}{2}-\frac{1}{2}\log_a t=\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}$，又 $t>0$，$t+1\geqslant2\sqrt{t}$，$\therefore\frac{t+1}{2\sqrt{t}}\geqslant1$

$\therefore$ ①当 $0<a<1$ 时，$\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}\leqslant\log_a1=0$，$\therefore\log_a\frac{t+1}{2}\leqslant\frac{1}{2}\log_a t$

②当 $a>1$ 时，$\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}\geqslant\log_a1=0$，$\therefore\log_a\frac{t+1}{2}\geqslant\frac{1}{2}\log_a t$

【解法综述】　实数大小的比较问题常常利用不等式的基本性质或“$\frac{a}{b}>1$ 且 $b>0\Rightarrow a>b$”来解决，即采用作差法或作商法比较大小. 其步骤为：作差（商）—变形—判断. 此比较法的关键是第二步的变形，通常是进行因式分解或变成能明确判断符号或商与1的大小关系的形式. 一般来说，变形越彻底（使用已知条件、使用已知定理、定义最方便），越有利于下一步的判断.

3　均值不等式

【例1】　已知 a、b 是正数，试把 $\sqrt{ab}$，$\frac{a+b}{2}$，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 按从大到小的顺序排列起来.

【解析】　这四个数的大小经常在不等式中出现，我们必须非常熟悉. $\because$ $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$，又 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}(a,b>0)$

$\because 0<\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{ab}}$，又 $2ab>0$，$\therefore\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$

即 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$ $\because(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}})^2-(\dfrac{a+b}{2})^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}=$

$\dfrac{a^2+b^2-2ab}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4}\geqslant0$ $\therefore\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）

【例 2】 若直角△ABC 斜边 $c=1$，那么它的内切圆的半径 r 的最大值为____.

【解析】 设直角△ABC 的两直角边长为 a,b，则 $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{a+b-1}{2}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{2}$.

$\because a^2+b^2\geqslant2ab$ $\therefore2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$

即 $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{c^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore r\leqslant\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，$r=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

【例 3】 已知 $x>0,y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值.

【解析】 本题的困难在于如何使用条件 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，如果从中解出 x 或 y，再代入 $x+y$ 转化成为一元函数的最值问题，显然是比较复杂的. 这时，我们可以设法整体地使用条件，下面给出两种方法，此题还可用三角换元法、判别式法、数形结合法求解，请读者自己去探索.

方法一：$\because x>0,y>0,\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$

$\therefore x+y=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y})(x+y)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{9x}{y}+10\geqslant6+10=16$

当且仅当 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{9x}{y}$，又 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，即 $x=4,y=12$ 时，上式等号成立. 故当 $x=4,y=12$ 时，$(x+y)_{\min}=16$.

方法二：由 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$ 知，$(x-1)(y-9)=9$（定值）

又知 $x>1,y>9$，$\therefore$ 当且仅当 $x-1=y-9=3$ 即 $x=4,y=12$ 时，$(x+y)_{\min}=16$.

此外，请读者分析下面解法错在何处.

$\because x>0,y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，

$\therefore x+y=(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})(x+y)\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{9}{xy}}\cdot 2\sqrt{xy}=12$，故$(x+y)_{\min}=12$.

【例4】 若正数a、b满足$ab=a+b+3$，则ab的取值范围是____.

【解析】 求ab的取值范围，应考虑到将ab表示成某个变量的函数或寻求含有ab的不等式.

由$ab=a+b+3$，得$b=\frac{a+3}{a-1}=1+\frac{4}{a-1}$

$\therefore ab=a+\frac{4a}{a-1}=a+4+\frac{4}{a-1}=a-1+\frac{4}{a-1}+5$

又由$ab=a+b+3$，得$b(a-1)=a+3>0$ $\therefore a-1>0$

$\therefore a-1+\frac{4}{a-1}+5\geqslant 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}+5=9$，当且仅当$a=3$时取"="号，所以$ab$的取值范围是$[9,+\infty)$

或 $\because ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$

$\therefore(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$ $\therefore(\sqrt{ab}-3)(\sqrt{ab}+1)\geqslant 0$

$\because\sqrt{ab}+1>0$ $\therefore\sqrt{ab}-3\geqslant 0$ $\therefore ab\geqslant 9$ 当且仅当$a=b=3$时取等号，所以ab的取值范围是$[9,+\infty)$.

【例5】 设$a>b>c$，$n\in N^*$，且$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$，则$n$的最大值为( ).

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【解析】 此题可用分析法或利用公式求解.

$\because\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}\Leftrightarrow(a-c)(b-c)+(a-b)(a-c)\geqslant n(a-b)(b-c)$

$\Leftrightarrow(a-c)^2\geqslant n(a-b)(b-c)$

$\Leftrightarrow(a-c)^2-2(a-b)(b-c)\geqslant(n-2)(a-b)(b-c)$

$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2\geqslant(n-2)(a-b)(b-c)$

$\therefore n$的最大值是4.

当$a,b\in R^+$时，$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 4$， 且$a>b>c$

$\therefore(a-b+b-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\geqslant 4$

$\therefore(a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\geqslant 4$

$\therefore\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$ $\therefore n$的最大值为4.

【例6】 已知$a>2$，求证：$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.

【解析】 两个对数的积较难进行变形，但注意到它们的底相同，可以利用

算术平均数与几何平均定理转化为和，然后再利用对数和的运算法则进行变形，可使问题得到解决.

$\because a>2$，$\therefore \log_a(a-1)>0$，$\log_a(a+1)>0$

又 $\log_a(a-1)\neq\log_a(a+1)$

$\therefore \sqrt{\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)}<\dfrac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}=\dfrac{1}{2}\log_a(a^2-1)$

$<\dfrac{1}{2}\log_a a^2=1$ $\therefore \log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.

【例 7】 求函数 $y=x^2+2x+\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ 的最小值.

【解析】 注意均值定理求最值时必须满足的条件.

$y=x^2+2x+\dfrac{1}{x^2+2x+3}=x^2+2x+3+\dfrac{1}{x^2+2x+3}-3$

设 $t=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$，则 $t\geqslant2$

$y=t+\dfrac{1}{t}-3=\dfrac{3}{4}t+(\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{t})-3\geqslant\dfrac{3}{4}\times2+2\sqrt{\dfrac{t}{4}\cdot\dfrac{1}{t}}-3=-\dfrac{1}{2}$

当且仅当 $t=2$ 且 $\dfrac{t}{4}=\dfrac{1}{t}$ 时，即 $t=2$ 时取“＝”号.

$\therefore y_{\min}=-\dfrac{1}{2}$.

【解法综述】 1. 用算术平均数与几何平均数定理求最值的约束条件可归纳为“两个条件”和“一个定值”（即“一正、二定、三相等”）即不等式成立的条件和等号成立的条件，以及求和的最值时积为定值或求积的最值时和为定值. 正是由于受到上述条件的限制，在求最值时常需对解析式进行合理的变形，但有时变形的技巧性很强，学生不易掌握，必须在平时的学习中不断地总结和积累方法、技巧，同时也要吸取经验和教训.

2. 在应用最值定理求最值时，若遇到等号取不到的情况，应结合函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的单调性，使解题完善、准确.

4 重要不等式的应用

【例 1】 糖水加糖会变甜. 如：b 克糖水中有 a 克糖（$b>a>0$），若再添加 m 克糖（$m>0$），则糖水变甜了. 试根据这个事实提炼一个不等式__________.

【解析】 $\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$，提炼的不等式即 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+m}{b+m}$. 本题系根据数学课本改编. 同学们一定要引起对数学课本上的例、习题重视，勿必过关.

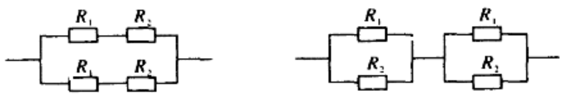
【例 2】 甲、乙两人在每个月里，总是相约到一家小铺里去买两次食盐，

假设食盐的价格是变化的，而他们的购买方式又不一样，甲每一次总是买1千克盐，乙每次只拿1元钱来买食盐，而不管买多少，试问两种买盐的方式哪一种合算？

【解析】 设甲、乙两人两次购买每千克食盐的价格分别为 a_1 元、a_2 元，则甲共花去 a_1+a_2 元，共买2千克食盐，每千克食盐平均价格为 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 元. 乙共花去2元，共买 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$ 千克食盐，每千克食盐平均价格为 $\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$ 元，∵ $\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\leqslant\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$，∴乙的购买方式合算.

【例3】 已知 R_1 和 R_2 是阻值不同的两个电阻，现按图中的(1)和(2)连结，相应的总阻值分别为 R_A 和 R_B，则它们的大小关系为(　　).

A. $R_A>R_B$　　B. $R_A=R_B$　　C. $R_A<R_B$　　D. 不确定



【解析】 由电学知识知：$R_A=\frac{R_1+R_2}{2}$，$R_B=\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$

而 $R_B<\frac{2\times(\frac{R_1+R_2}{2})^2}{R_1+R_2}=\frac{1}{2}(R_1+R_2)=R_A$

应用不等式性质与实数大小比较的理论建立数学模型，然后用不等式的知识加以求解.

【例4】 建造一容积为 $8m^3$，深为 $2m$ 的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元，那么水池的最低总造价为____元.

【解析】 池底面积为 $4m^2$ 是一定的(因而其造价是480元，也是一定的)，但池壁的面积随池长、池宽的尺寸不同而变化(因而造价也是变化的). 如果设池底一边长为 xm，则另一边长为 $\frac{4}{x}m$，列出水池总造价关于 x 的函数表达式 $f(x)=480+80(2x+2\times\frac{4}{x})\times2=480+320(x+\frac{4}{x})$. 问题转化为求 $f(x)$ 的最小值，应用均值定理，$x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$ 即 $x=2$ 时取"="号，从而 $f(x)$ 的最小值为 $480+320\times4=1760$ 元.

【解法概要】 求解数学应用题，关键是建立数学模型，而本题的数学模型是：总造价＝池底单价×池底面积＋池壁面积×池壁单价，只要把模型中的量