

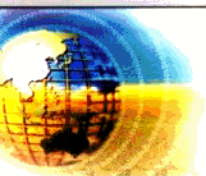
五四制 鲁教版

龙门

学生专用版

# 新教案

在线课堂



## 九年级数学 (上)

● 本册主编 李霞



龍門書局  
[www.Longmenbooks.com](http://www.Longmenbooks.com)



## 策划者语

### 学会学习，轻松考高分



#### 你会学习吗？

在学习中，你是否存在以下问题：

♪你上课会不会经常走神？老师讲课有些内容你没有听懂怎么办？

如果你上课经常走神，或者没有听懂老师的讲解，而你又不喜欢问老师问题，那你学习的过程中就会有不懂的问题，一个个不懂的问题积攒在一起，形成一片片知识空白，长此以往，你的成绩能提高吗？

因此，你需要一个能够像播放 DVD 一样将老师讲解再现的“纸上课堂”。

♪你在家学习，有问题不会怎么办？

老师不在身边，家长帮不上你的忙，问题不会，无处可问，成绩怎样，可想而知。

所以，你需要一个可以随时提问、不受约束的“便携式纸上教练”。

♪你有一套自己的学习方法吗？

教材你理解透彻了吗？你是不是比较喜欢做有难度的题目，而对那些看似简单的问题不屑一顾呢？这是大多数学生的通病——不会走，怎么能够跑呢？即便可以，肯定会摔跤。

记住，在你开始大量做题之际，别忘了先问一下自己：教材我理解透了吗？以上只是你在学习过程中遇到的问题中很小的部分，但这些都会导致你的成绩老是徘徊不前。我们策划这套书的初衷，就是为了解决大家在学习中的这些问题——你可以在较短的时间内学得更多，记得更牢，练得更精。



#### 如何利用这套书迅速提高学习成绩？

本套丛书是龙门书局针对山东省新课标中考现状，专门为那些渴望成为优等生的同学设计的，它可以用于预习、上课、课后作业时。栏目设计新颖别致，有自己独特的功能，你在使用时一定要特别留心以下几个栏目：

##### 问题探究

在新课标的新考试形势下，“着重考查学生运用知识分析和解决实际问题的能力”明确写入中高考考试大纲，研究性学习的内容成为考试热点。

为了从一开始就培养你的创新能力和研究性学习的能力，本书特别设计了“问题探究”这一栏目。学会如何思考、搜集信息、获得答案，应对考试不再困难。你可一定要特别注意哦！

##### 教材全解

你必须完全掌握教材的重要知识点，这是你解决一切题目的基础，也是前提。千万不要教材知识点还没搞明白就去追难题！

这一部分就像老师上课一样，帮你透彻理解教材知识点，在此基础上匹配典型例题，加深你对该知识点的理解。老师还为你总结了解题规律、方法技巧、易错误区等，然后通过一两道随堂练习，检测你是否真正理解和掌握了该知识点。

##### 主干知识梳理

##### 中考试题链接

为了帮助你更好地复习应考，本书在每一单元的后面特别增设了“单元小结与复习”一节，其中的几个栏目对于正面临考试的你，非常实用：

1. 所谓“磨刀不误砍柴工”，这就是说，如果你的刀快，那么砍起柴来肯定既多又快还省劲。可是如何让刀快呢？很简单，就是对教材中的各知识考点了然于心，面对考题也就能很快找对思路，难题也就迎刃而解。“主干知识梳理”将该单元中你最需要掌握的问题全部归纳在一起，尤其是在期中、期末复习时，只要你完全记在心里，相信你一定能取得满意的成绩！

2. 在你身边，肯定有很多同学特别喜欢做题，以为做题是取得好成绩的“法宝”。可是当你筋疲力尽地做了一天的题却发现毫无成效时，你一定很困惑吧？其实你是没有找到使用“法宝”的奥秘，练错了题，白做功！力气要花在刀刃上，这刀刃就是中考真题。

“中考试题链接”遵循山东省新课标中考出题思路，精选各地最新中考真题，而且配备了详细的解题思路导引。它帮助你在最短的时间内练到位，获得事半功倍的效果。只要你是聪明人，就一定能品出其中的妙处！

总而言之，本套丛书既是一本可以随时播放的“纸上课堂”，又是一位可以随时交流的“纸上教师”，其中“宝藏多多”，善于发掘者自会“满载而归”。

“世上无难事，只怕有心人。”渴望成为优等生的你，一定要做生活的有心人，那么，还不赶快行动起来！

《龙门新教案·在线课堂》  
丛书策划组

# 目 录

龙门新教案

九年级数学(上)

## 第一章

### 解直角三角形

第一节 锐角三角函数	1
第一讲	1
第二讲	5
第二节 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角函数值	8
第三节 用计算器求锐角的三角函数值	11
第四节 解直角三角形	14
第五节 解直角三角形的应用	17
第一讲	17
第二讲	20
第六节 测量物体的高度	23
第七节 单元小结与复习	27
第八节 创新能力综合测试	32

## 第二章

### 二次函数

第一节 对函数的再认识	34
第二节 二次函数	38
第三节 二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质	41
第一讲	41
第二讲	44
第四节 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象和性质	47
第一讲	47
第二讲	50
第五节 用三种方式表示二次函数	54
第六节 确定二次函数的表达式	58
第七节 二次函数与一元二次方程	61
第一讲	61
第二讲	65
第八节 二次函数的应用	68
第一讲	68
第二讲	73
第九节 单元小结与复习	77
第十节 创新能力综合测试	83

## 第三章

### 圆

第一节 圆	86
第二节 圆的对称性	90
第一讲	90

第二讲 .....	93
第三讲 .....	97
<b>第三节 圆周角</b> .....	101
第一讲 .....	101
第二讲 .....	104
<b>第四节 确定圆的条件</b> .....	108
<b>第五节 直线和圆的位置关系</b> .....	111
第一讲 .....	111
第二讲 .....	114
第三讲 .....	118
<b>第六节 圆和圆的位置关系</b> .....	122
<b>第七节 弧长及扇形的面积</b> .....	126
<b>第八节 圆锥的侧面积</b> .....	130
<b>第九节 单元小结与复习</b> .....	133
<b>第十节 创新能力综合测试</b> .....	139

**第四章****统计与概率**

<b>第一节 从统计图表中获取信息</b> .....	142
第一讲 .....	142
第二讲 .....	146
<b>第二节 概率与平均收益</b> .....	149
<b>第三节 概率与公平性</b> .....	152
<b>第四节 单元小结与复习</b> .....	155
<b>第五节 创新能力综合测试</b> .....	160

附赠: 参考答案提示与点拨

# 第一章 解直角三角形

## 第一节 锐角三角函数

### 第一讲

脚踏楼梯步步高, 楼梯是一种攀高的工具.

如图 1-1-1 甲, 树上有一鸟窝, 一位小学生想借用梯子攀上树, 端下鸟窝, 但由于力气太小, 将梯子摆放成如图 1-1-1 乙的形状, 只能望鸟兴叹了. 一位路过的叔叔帮忙将梯子摆成如图 1-1-1 丙的形状, 够着了鸟窝, 你能解释这一现象吗? 你能用数学知识来解释这一现象吗?



图 1-1-1

### 问题探究

[问题]

1. 在图 1-1-2 中, 梯子  $AB$  和  $EF$  哪个更陡, 你是怎样判断的? 你有几种判断方法?

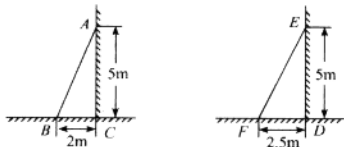


图 1-1-2

2. 在图 1-1-3 中, 梯子  $AB$  和  $EF$  哪个更陡? 你是怎样判断的?

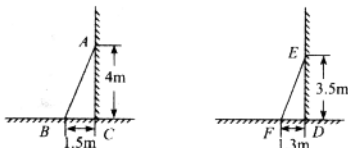


图 1-1-3

[探究点拨]

1. 要判断哪个梯子更陡, 由于它们的高度相同, 显然离墙脚较近的梯子更陡, 即比较  $BC$  与  $FD$  的大小.

2. 由于它们的高度和离墙脚的远近都不相同, 联想图 1-1-1, 应从角的大小或从  $AC$  与  $BC$  的比值和  $DE$  与  $DF$  的比值来判断.

[发现知识]

比较两个梯子哪个更陡可以从两个方面来比较: 一是比较梯子与地面的夹角的大小, 夹角越大, 梯子越陡, 夹角越小, 梯子越趋于平缓; 二是比较梯子搭够的高度与梯子离墙脚的距离的比的大小.

### 教材全解

#### 重点 1 正切

如图 1-1-4, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 如果锐角  $\angle A$  确定, 那么  $\angle A$  的对边与邻边的比便随之确定, 这个比叫做  $\angle A$  的正切, 记作  $\tan A$ . 即

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}}$$

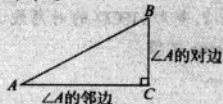


图 1-1-4

(1) 正切是在直角三角形中定义的, 其本质是两条线段的比值, 它只是一个数值, 没有单位, 其大小只与这个角的大小有关, 而与所在的三角形无关.

(2)  $\tan A$  是一个完整的符号, 不能写成  $\tan \cdot A$ , 当用三个大写字母表示一个角, 并表示它的正切时, 角的符号“ $\angle$ ”不能省略.

(3) 直角三角形中, 锐角  $A$  固定, 则它的正切值也固定, 与  $\angle A$  的两边的长度无关.

(4) 直角三角形中, 各边长都是正数, 所以  $\tan A > 0 (0^\circ < A < 90^\circ)$ .

(5) 如果用字母  $a, b, c$  分别表示  $\text{Rt}\triangle ABC$  的边  $BC, AC, AB$ , 那么  $\tan A = \frac{a}{b}$ , 显然  $\tan A = \frac{a}{b}$  是一个等式, 可变形为  $a = b \tan A$  或  $b = \frac{a}{\tan A}$ .

[例 1] (1) 如图 1-1-5, 平面直角坐标系中点  $P(3, -4)$ ,  $OP$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ , 求  $\tan \alpha$  的值.

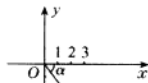


图 1-1-5



图 1-1-6

(2) 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 3BC$ , 求  $\tan A$  的值. (如图 1-1-6)

**思维** (1) 首先构造含  $\alpha$  角的直角三角形, 然后才能利用正切的定义, 求出  $\tan \alpha$  的值.

(2)  $\because \tan A = \frac{BC}{AC}, \therefore$  只要找出  $BC, AC$  之间的关系即

可,  $\because AB=3BC$ , 因此, 可由勾股定理求出  $AC$  用  $BC$  表示即可.

解: (1) 过  $P$  作  $PA \perp x$  轴, 垂足为  $A$ .

则  $|OA|=3, |PA|=|-4|=4$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{|PA|}{|OA|} = \frac{4}{3}$$

(2) 设  $BC=k$ , 则  $AB=3k$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(3k)^2 - k^2} = 2\sqrt{2}k$$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

**题解** (1) 求锐角的正切值, 就是根据正切的定义求锐角所在直角三角形的两直角边之比.

(2) 如果只知三角形的三边关系(或两边)关系时, 用设辅助未知数的方法求解, 可设一辅助未知数表示三角形的各边长, 再根据正切的定义, 求其锐角的正切值.

(3) 在平面直角坐标系中, 由点的坐标, 求有关角的正切值时, 一要先构造直角三角形, 二要求边长时坐标要加绝对值.

**随堂练习**

1. 如图 1-1-7, 菱形  $ABCD$  的对角线  $AC=6, BD=8$ ,  $\angle ABD=\alpha$ , 试求  $\tan \alpha$  的值.

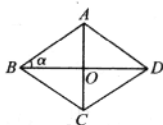


图 1-1-7

2. 如图 1-1-8, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ, CD \perp AB$  于  $D$ . 若  $BD:AD=1:4$ , 求  $\tan \angle BCD$  的值.

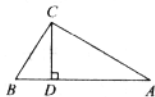


图 1-1-8

**重点 2 坡度(坡比)**

如图 1-1-9, 我们把坡面的铅直高度  $h$  和水平宽度  $l$  的比叫做坡度(也叫坡比); 坡面与水平面的夹角叫做坡角(用  $\alpha$  表示)则

$$\tan \alpha = \frac{h}{l}$$

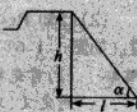


图 1-1-9

(1) 坡度是坡上任一点铅直距离与水平距离的比, 而不是斜面距离与水平距离(或铅直距离)的比.

(2) 任意一个斜坡坡面长与它的水平距离和铅直距离是一个直角三角形的三边长. 解决此类问题通常就是构造这个直角三角形.

**[例 2]** (2004·江苏扬州) 如图 1-1-10, 一个小球由地面沿着坡度  $i=1:2$  的坡面向上前进 10m, 此时小球距离地面的高度为

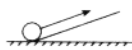


图 1-1-10

- ( )  
A. 5m    B.  $2\sqrt{5}$ m    C.  $4\sqrt{5}$ m    D.  $\frac{10}{3}$ m

**题解** 由坡度  $i=1:2$  可知, 小球沿坡面向上前进时, 铅直高度与水平距离的比为  $1:2$ , 设小球沿坡面向上前进 10m 时, 铅直高度上升了  $x$ m, 则水平移动的距离为  $2x$ m, 则利用勾股定理求解.

$$\text{即 } x^2 + (2x)^2 = 10^2, \therefore x = 2\sqrt{5}.$$

解: \_\_\_\_\_

**题解** 理解清楚坡度的意义是解决此类问题的前提, 同时应学会将斜面问题转化为直角三角形中的边角关系问题, 因此正确地画出示意图又是解题的关键所在.

**随堂练习**

3. 某人沿坡角为  $30^\circ$  的斜坡前进 100m, 则他上升的最大高度是多少? 它前进的水平距离是多少?

4. 如图 1-1-11, 在坡度为  $1:2.5$  的山坡上种树, 要求株距为 5.5m, 试求斜坡上相邻两树间的坡面距离是多少?



图 1-1-11

## 研讨应用

我们知道正切是在直角三角形中定义的,因此解题时切勿忽视在直角三角形中的前提.

【例3】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,且 $a:b:c=9:40:41$ ,求 $\tan A + \frac{1}{\tan A}$ 的值.

甲生

$$\therefore a:b:c=9:40:41$$

$$\therefore \tan A = \frac{a}{b} = \frac{9}{40}, \frac{1}{\tan A} = \frac{40}{9}$$

$$\therefore \tan A + \frac{1}{\tan A} = \frac{9}{40} + \frac{40}{9} = \frac{1681}{360}$$

乙生

$$\text{设 } a=9k, b=40k, c=41k \text{ 则}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{9k}{40k} = \frac{9}{40}, \frac{1}{\tan A} = \frac{40}{9}$$

$$\therefore \tan A + \frac{1}{\tan A} = \frac{9}{40} + \frac{40}{9} = \frac{1681}{360}$$

丙生

$$\text{设 } a=9k, b=40k, c=41k.$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (9k)^2 + (40k)^2 = 1681k^2 = (41k)^2 = c^2$$

$\therefore \triangle ABC$  为直角三角形,且 $\angle C=90^\circ$

$$\therefore \tan A = \frac{9k}{40k} = \frac{9}{40}, \frac{1}{\tan A} = \frac{40}{9}$$

$$\therefore \tan A + \frac{1}{\tan A} = \frac{9}{40} + \frac{40}{9} = \frac{1681}{360}$$

你对他们三人的求解有什么看法?

诊断



## 随堂练习

5. 如图 1-1-12, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$ ,  $AB=13$ ,  $AC=5$ .

- (1) 试求  $\tan A$ 、 $\tan B$  及  $\tan A \cdot \tan B$  的值.
- (2) 你从结果中发现了什么规律? 请用语言叙述出来.
- (3) 你所发现的规律, 对任意直角三角形都成立吗? 请说明理由.

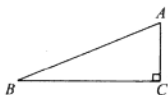


图 1-1-12

## 课堂小结

## 1. 知识点:

(1) 正切的定义: 在直角三角形中, 一个锐角的对边与这个角的邻边的比叫做这个角的正切.

(2) 坡度: 坡面的铅直高度与水平宽度的比叫做坡度(也叫做坡比).

2. 易错点: 正切是在直角三角形中定义的, 对不同的锐角来说其正切值是不同的, 即  $\tan A = \frac{a}{b}$  中  $a$  边必须是 $\angle A$ 的对边,  $b$ 边必须是 $\angle A$ 的邻边, 顺序不能颠倒.

## 3. 解题规律与方法:

(1)  $\tan A = \frac{a}{b}$  是一个等式, 在这个等式中, 已知其中的两个量即可求出第三个量;

(2) 对斜面而言,  $\tan A$  的值越大, 坡面越陡;

(3) 求  $\tan A$  的值就是求 $\angle A$ 所在直角三角形中 $\angle A$ 的对边与邻边的比. 因此必须已知直角三角形的两边或两边的关系, 再利用勾股定理求第三边或寻求三边的关系. 注意适当地引入辅助未知数.

## 心悟笔记

【例2】选 B

【例3】诊断: 本题运用的  $\tan A = \frac{a}{b}$  是在 $\triangle ABC$ 的 $\angle C=90^\circ$ 的前提下, 而题设中并未给出 $\angle C=90^\circ$ 这一条件, 因此直接利用正切的定义是错误的, 应先证明 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 然后再运用定义求解. 所以说甲生和乙生的解答是错误的, 丙的解答是正确的.



## 课后作业

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 分数 \_\_\_\_\_

## [基础演练]

1. 如图 1-1-13, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $CD \perp AB$ , 则  $\tan \angle BCD =$  \_\_\_\_\_.

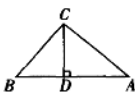


图 1-1-13

2. 若某人沿坡度  $i = 3:4$  的斜坡前进 10m, 则他所在的位置比原来的位置升高 \_\_\_\_\_ m.

3. 菱形的两条对角线长分别是 16 和 12, 较长一条对角线与菱形一边的夹角为  $\theta$ , 则  $\tan \theta =$  \_\_\_\_\_.

4. 如图 1-1-14,  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CD \perp AB$  于  $D$ ,  $BC = 3$ ,  $AC = 4$ , 设  $\angle BCD = \alpha$ , 则  $\tan \alpha$  的值为 ( )

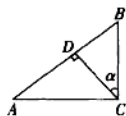


图 1-1-14

A.  $\frac{3}{4}$

B.  $\frac{4}{3}$

C.  $\frac{3}{5}$

D.  $\frac{4}{5}$

5. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 若各边长都扩大 10 倍, 则它们的正切值 ( )

A. 扩大 10 倍

B. 缩小 10 倍

C. 没有变化

D. 以上答案都不对

6. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ , 则  $\tan A$  等于 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 如图 1-1-15,  $D$  是  $\triangle ABC$  的边  $AB$  上的点, 且  $BD = 2AD$ , 已知  $CD = 10$ ,  $\tan \angle BCD = \frac{3}{4}$ , 那么  $BC$  边上的高  $AE$  等于 ( )

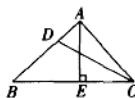


图 1-1-15

A. 9

B. 8

C. 12

D. 6

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 2\sqrt{5}$ ,  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于  $D$ , 且  $AD = \frac{4}{3}\sqrt{15}$ , 则  $\tan \angle BAC$  的值为 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.  $\sqrt{3}$

D. 以上都不对

9. 在平面直角坐标系中, 有一点  $P(-3, -6)$ ,  $OP$  与  $y$  轴的夹角为  $\beta$ , 则  $\tan \beta$  等于 ( )

A.  $-\frac{1}{2}$

B.  $-2$

C.  $\frac{1}{2}$

D. 2

## [综合测试]

10. 如图 1-1-16, 已知在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 斜边的中线  $AD = 6$ ,  $AC = 4\sqrt{3}$ , 求  $\angle BAD$  的正切值.

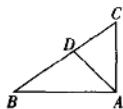


图 1-1-16

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $AD \perp BC$  于  $D$ , 若  $\angle C = 30^\circ$ ,  $BC = 2 + \sqrt{3}$ ,  $\tan B = \frac{1}{2}$ , 求  $AD$  的长.

12. 为防水患, 在漓江上游修筑了防洪堤, 其横截面为一梯形 (如图 1-1-17 所示). 堤的上底宽  $AD$  和堤高  $DF$  都是 6m, 其中  $\angle B = \angle CDF$ .

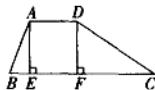
(1) 求证:  $\triangle ABE \sim \triangle CDF$ ;(2) 如果  $\tan B = 2$ , 求堤的下底  $BC$  的长.

图 1-1-17

## [探究升级]

13.  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 8\text{cm}$ ,  $\tan B = \frac{3}{4}$ , 一只蜜蜂从点  $B$  开始沿  $BC$  向点  $C$  以  $2\text{cm/s}$  的速度移动, 另一只蜜蜂从点  $C$  开始沿  $CA$  边向点  $A$  以  $1\text{cm/s}$  的速度移动, 如果两只蜜蜂分别从  $B$ 、 $C$  点同时出发各自运动到  $P$ 、 $Q$ , 如图 1-1-18, 第几秒时  $PQ \parallel AB$ ?

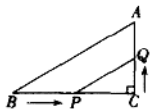


图 1-1-18

## 第一节 锐角三角函数

## 第二讲

1884年,瑞士的一个中学教师巴尔末夸口说:“我能用公式把任意4个数字有规律地联系起来。”于是有人把已知的氢光谱中红、绿、蓝、紫4条谱线的波长数据给了他,他竟顺利地用一个公式——巴尔末公式:  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ ,把这些谱线的波长联系起来,在当时的物理界引起了轰动。

你能用公式把  $\sin A$ ,  $\cos A$ , 1 这三个数有规律地连接起来吗?

## 问题探究

## 【问题】

如图 1-1-19, 当  $\text{Rt}\triangle ABC$  中的锐角  $A$  确定时,  $\angle A$  的对边与邻边的比便随之确定, 那么其他边之间的比确定了吗?

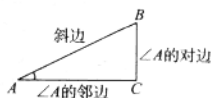


图 1-1-19

## 【探究点拨】

当  $\angle A$  确定时,  $\angle A$  的正切值,

即  $\angle A$  的对边与邻边之比也随之确定, 不妨设比值为  $m:n$  ( $m, n$  为定值), 由勾股定理不难推出斜边与其他各边的比值也是定值。

## 【发现知识】

当直角三角形的一个锐角确定之后, 则此三角形中任意两边的比值也随之确定。

## 教材全解

## 重点 1 正弦、余弦的定义

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , 如图 1-1-20.

$\angle A$  的对边与斜边的比叫做  $\angle A$  的正弦, 记作  $\sin A$ , 即

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$$

$\angle A$  的邻边与斜边的比叫做  $\angle A$  的余弦, 记作  $\cos A$ , 即

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$$

## 重点 2 锐角三角函数的定义

锐角  $A$  的正弦、余弦和正切都是  $\angle A$  的三角函数。

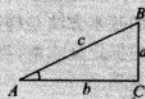


图 1-1-20

(1) 正弦和余弦类似于正切, 是在直角三角形中定义的, 其本质是两条线段的比, 它们只是一个数值, 没有单位, 其大小只与这个角的大小有关, 而与所在的三角形无关。

(2)  $\sin A$ ,  $\cos A$  都是整体符号, 不能看成  $\sin \cdot A$ ,  $\cos \cdot A$ 。

(3) 当  $\angle A$  一定时,  $\sin A$ ,  $\cos A$  也是一定值, 与  $\angle A$  两边的长短无关。

(4) 当一个角用三个字母表示时, 角的符号“ $\angle$ ”不能省略。

(5) 由于在直角三角形中, 斜边长大于直角边长且均为正

数, 所以  $0 < \frac{a}{c} < 1$ ,  $0 < \frac{b}{c} < 1$ , 因此可以得到结论:  $0 < \sin A < 1$ ,  $0 < \cos A < 1$ 。

(6)  $\sin A = \frac{a}{c}$  和  $\cos A = \frac{b}{c}$  都是等式, 都可进行等式的变形。

(7) 锐角三角函数是正弦、余弦和正切的一个统称。

【例 1】在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  所对的边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 。

(1) 已知  $b = 5$ ,  $c = 13$ , 求  $\angle A$  的三个三角函数值。

(2) 已知  $2a = 3b$ , 求  $\angle B$  的三个三角函数值。

**思路** (1) 由勾股定理求出  $a$ , 再由锐角三角函数的定义求解;

(2) 由  $2a = 3b$ , 可知  $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ , 则不妨设  $a = 3k$ ,  $b = 2k$  ( $k > 0$ ), 再由勾股定理求出  $c$  边即可。

**解:** (1) 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 由勾股定理得

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{12}{13}, \cos A = \frac{b}{c} = \frac{5}{13}, \tan A = \frac{a}{b} = \frac{12}{5}$$

(2) 由  $2a = 3b$ , 可得  $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ , 不妨设  $a = 3k$ ,  $b = 2k$  ( $k > 0$ )。

0). 根据勾股定理, 得

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13}k$$

$$\therefore \sin B = \frac{b}{c} = \frac{2k}{\sqrt{13}k} = \frac{2}{13}\sqrt{13}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{3k}{\sqrt{13}k} = \frac{3}{13}\sqrt{13}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$$

**思路** 求锐角三角函数值的实质就是求直角三角形的两边的比, 因此求值的关键是求出三角形的三边长。

## 随堂练习

1. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a = 7$ ,  $b = 24$ , 求  $\sin A$  和  $\cos A$ 。

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  的对边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 且  $a:b:c = 3:4:5$ , 试求  $\sin A + \sin B$  的值。

3. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 9$ ,  $BC = 12$ , 分别求出  $\angle A$ ,  $\angle B$  的三个三角函数值, 并从计算的结果中猜想它们之间有什么样的关系, 并证明你的猜想。

## 重点 3 同角三角函数间的关系

$$(1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1;$$

$$(2) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

(1) 关系式  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  可用正弦、余弦的定义推证。

(2)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  是一个等式, 可以变形为: ①  $1 = \sin^2 A + \cos^2 A$ ; ②  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ ; ③  $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ 。

(3)关系式  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  表明任意锐角的正切值等于同角的正弦值除以余弦值的商.

**【例 2】** 已知  $\alpha$  为锐角.

(1)若  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 求  $\cos \alpha, \tan \alpha$  的值.

(2)若  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ , 求  $\sin \alpha, \cos \alpha$  的值.

**思路** (1)、(2)根据三角函数的定义, 可将  $\angle \alpha$  放在直角三角形中, 利用直角三角形的三边长求锐角的三角函数, 也可利用同角三角函数关系求解.

**解:** (1)解法 1: 用定义构造直角三角形.

如图 1-1-21,  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$

$\therefore \sin \alpha = \frac{3}{5}, \therefore$  设  $BC = 3r, AB = 5r$

( $r > 0$ ), 由勾股定理得  $AC =$

$$\sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25r^2 - 9r^2} = 4r$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5},$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3r}{4r} = \frac{3}{4}.$$

解法 2: 用同角三角函数间的关系.

$$\because \alpha \text{ 为锐角}, \therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

(2)解法 1: 用定义构造直角三角形.

如图 1-1-22,  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C =$

$90^\circ, \therefore \tan \alpha = \frac{3}{4}, \therefore$  设  $BC = 3r, AC =$

$4r$  ( $r > 0$ ) 由勾股定理得  $AB =$

$$\sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{9r^2 + 16r^2} = 5r.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}.$$

解法 2: 用同角三角函数间的关系.

$$\because \tan \alpha = \frac{3}{4}, \therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \sin \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha$$

$$\text{又 } \because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \therefore \left(\frac{3}{4} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\because \alpha \text{ 为锐角}, \therefore \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}.$$

**思维** 已知一个锐角的某个三角函数值, 求其他的三角函数值, 方法有二: 一是将该角放入某一直角三角形中, 利用已知三角函数值找出三边之间的关系, 再利用三角函数定义求其他三角函数值; 二是利用同角三角函数间的关系  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  求其他三角函数的值.

### 随堂练习

4. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ, \sin A = \frac{2}{3}$ , 求  $\cos A, \tan A$ .

### 随堂练习

5. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ, \tan B = 2$ . 求  $\sin B, \sin C$ .

### 综合延伸

**【例 3】** 已知  $\alpha$  为锐角,  $\tan \alpha = 2$ .

求: (1)  $\frac{3\sin \alpha + \cos \alpha}{4\cos \alpha - 5\sin \alpha}$  的值; (2)  $\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha}$ .

**思路** (1)由已知  $\tan \alpha$  的值及式子中所含函数为  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$ , 我们很容易想到由  $\tan \alpha$  求出  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的值后代入式子求值的方法, 而通过进一步分析我们发现, 由于  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , 若把分式中的分子、分母同时除以  $\cos \alpha$ , 则原式中只含有  $\tan \alpha$  和常数, 这样就可以把  $\tan \alpha = 2$  直接代入求原式的值. (2)可仿照(1)解决.

**解:**

### 课堂小结

1. 知识点: 正弦和余弦的定义, 同角三角函数间的关系.

2. 易错点: 利用三角函数的定义解题时, 应先判断所给的三角形是否为直角三角形.

3. 解题规律与方法: 对于锐角三角函数的求值问题的基本方法是构造直角三角形, 寻求三边长的关系, 再根据定义求解, 当然不同的问题也有不同的技巧, 应注意掌握.

### 心悟笔记

$$\text{【例 2】 (1) } \frac{AC}{AB} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}, \frac{BC}{AC} = \frac{3r}{4r} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}; \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{(2) } \frac{BC}{AB} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}, \frac{AC}{AB} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}, \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

**【例 3】** (1)解法 1: 由  $\tan \alpha = \frac{a}{b} = 2$ ,  $\therefore$  设  $a = 2k, b = k, \therefore c = \sqrt{5}k$ ,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
 代入求值.

解法 2: 由  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \therefore \sin \alpha = 2\cos \alpha$  代入即可.

$$\text{解法 3: 分子、分母同除以 } \cos \alpha \text{ 得 } \frac{3\tan \alpha + 1}{4 - 5\tan \alpha} = \frac{3 \times 2 + 1}{4 - 5 \times 2} = -\frac{7}{6}.$$

$$\text{(2) } -\frac{7}{5}.$$

课后作业

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 分数 \_\_\_\_\_

[基础演练]

1. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{4}{5}$ , 则  $\cos B =$  \_\_\_\_\_.
2. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cos B = \frac{3}{4}$ , 则  $\sin B =$  \_\_\_\_\_.
3. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\tan A = 2$ , 则  $\sin A + \cos A =$  \_\_\_\_\_.

4. 如图 1-1-23 所示,  $P$  是  $\angle \alpha$  的边  $OA$  上一点, 且  $P$  点的坐标为  $(2, 3)$ , 则  $\sin \alpha =$  \_\_\_\_\_,  $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_.

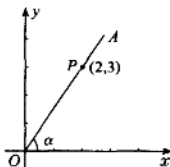


图 1-1-23

5. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a, b, c$  分别是  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边, 则  $a^3 \cos A + b^3 \cos B =$  \_\_\_\_\_.

6. 已知  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{3 \sin \alpha - \tan \alpha}{4 \sin \alpha + 2 \tan \alpha}$  的值等于 \_\_\_\_\_ ( )

- A.  $\frac{4}{7}$     B.  $\frac{1}{2}$     C.  $\frac{1}{3}$     D. 0

7. 等腰梯形的上底为 2cm, 下底为 4cm, 面积为  $3\sqrt{3}\text{cm}^2$ , 则下底角的余弦值为 \_\_\_\_\_ ( )

- A.  $\frac{1}{2}$     B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     D.  $\sqrt{3}$

8. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a, b$  分别是  $\angle A, \angle B$  的对边, 如果  $\sin A : \sin B = 2 : 3$ , 那么  $a : b$  等于 \_\_\_\_\_ ( )

- A. 2:3    B. 3:2    C. 4:9    D. 9:4

[综合测试]

9. 分别求出图 1-1-24 和图 1-1-25 中  $\angle A, \angle B$  的三个三角函数值.

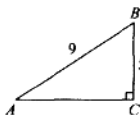


图 1-1-24

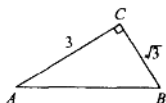


图 1-1-25

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ , 两直角边  $a, b$  满足  $a^2 - 5ab + 6b^2 = 0$ . 求  $\sin A, \cos A, \tan A$  的值.

11. (开放题) 如图 1-1-26, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC - BC = 2\sqrt{3} - 2$ ,  $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 求 \_\_\_\_\_.

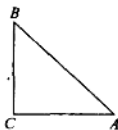


图 1-1-26

- ①  $\triangle ABC$  的周长; ②  $\triangle ABC$  的面积; ③  $\tan B$ ; ④  $AB$  的长.

将题目从以上四个选项中选择一个补充完整后再做.

12. 已知  $\tan \alpha = 3$ ,

求 (1)  $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}$  的值.

(2)  $\frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$  的值.

13. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ . 两直角边的和为 12, 且  $\tan \beta = 2$ , 求  $AB$ .

[探究升级]

14. (1) 如图 1-1-27(1)、(2) 所示, 锐角的正弦值和余弦值都随着锐角的确定而确定, 亦随其变化而变化. 试探索随着锐角度数的增大, 它的正弦值和余弦值变化的规律;

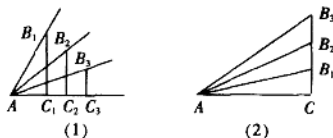


图 1-1-27

(2) 根据你探索到的规律, 试比较  $18^\circ, 34^\circ, 50^\circ, 62^\circ, 88^\circ$ , 这些锐角的正弦值的大小和余弦值的大小;

(3) 比较大小, 在空格处填写“<”“>”或“=”号:

若  $\alpha = 45^\circ$ , 则  $\sin \alpha$  \_\_\_\_\_  $\cos \alpha$ ; 若  $\alpha < 45^\circ$ , 则  $\sin \alpha$  \_\_\_\_\_  $\cos \alpha$ ; 若  $\alpha > 45^\circ$ , 则  $\sin \alpha$  \_\_\_\_\_  $\cos \alpha$ ;

(4) 利用互为余角的两个角的正弦和余弦的关系, 试比较下列正弦值和余弦值的大小:

$\sin 10^\circ, \cos 30^\circ, \sin 50^\circ, \cos 70^\circ$ .



## 30°, 45°, 60° 角的 三角函数值

### 第二节

我们学习了已知一个直角三角形的三边或三边之间的关系,求各锐角的三角函数值.若已知一锐角,你能求其三角函数值吗?

### 问题探究

[问题]

(1)观察一副三角尺,如图 1-2-1,其中有几个锐角?它们分别等于多少度?

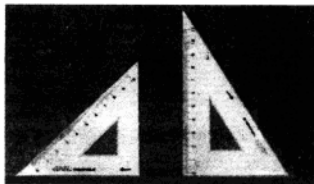


图 1-2-1

(2)你能根据三角尺求出  $\sin 30^\circ$  的值吗?

(3)三角尺中的所有锐角的三角函数你都能求出来吗?

[探究点拨]

1. 由  $30^\circ$  角直角三角形的性质可知  $30^\circ$  角的对边等于斜边的一半,再由勾股定理则不难推出此直角三角形的三边之比,即求出  $30^\circ$  角的三角函数值,据此可求得  $60^\circ$  角的三角函数值.

2. 对含有  $45^\circ$  角的直角三角形,利用等腰三角形的性质和勾股定理,则不难推出三边之比.

[发现知识]

当直角三角形的一个锐角确定,其函数值也随之确定,并且每一个锐角的三角函数都是惟一确定值.

### 教材全解

#### 重点 30°, 45°, 60° 角的三角函数值

三角函数 角 $\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

(1)  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  是特殊角,其函数值是利用特殊三角形的三边关系推导出来的.

(2) 特殊角的三角函数值应熟记,可按如下方法记忆:

① 三角尺记忆法(如图 1-2-2):



图 1-2-2

② 数字规律记忆法:

角 $\alpha$ 三角函数	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{\sqrt{27}}{3}$

③ 口诀记忆法:

由于  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  的正弦、余弦值可以看作是“ $\frac{\sqrt{\quad}}{2}$ ”,只是被开方数不同,而正弦的被开方数是按 1、2、3 的顺序,余弦的被开方数是按 3、2、1 的顺序.

对于  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  的正切值,关键是记住  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,为了记忆方便,可写成  $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,这样分数  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  是  $30^\circ$  的正切,而分子 1 是  $45^\circ$  的正切,分母  $\sqrt{3}$  是  $60^\circ$  的正切,于是可归纳为如下口诀:

一、二、三、三、二、一、

根三分之一、一、根三.

[例 1] 求下列各式的值:

(1)  $\frac{\tan 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} - \tan 60^\circ$ ;

(2)  $\cos^2 45^\circ + \tan 60^\circ \cos 30^\circ - 3 \tan^2 30^\circ$ ;

(3)  $\sqrt{\tan^2 60^\circ - 4 \tan 60^\circ + 4} - \frac{2\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}$ .

**思路** (1) 首先要记准各个特殊角的三角函数值.

(2) 先代入再求值,最后结果必须是最简形式.

解: (1) 原式 =  $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{3}$

=  $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{3}$

(2) 原式 =  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

=  $\frac{2}{4} + \frac{3}{2} - 3 \times \frac{3}{9}$

(3) 原式 =  $\sqrt{3 - 4\sqrt{3} + 4} - \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} - 1}$

=  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

**思路** 三角函数值的计算是中考必考内容.一般地,解这类问题一般是先将三角函数值代入,再按式子所指定的运算顺序计算,最后结果必须是最简形式.

#### 随堂练习

1. 求值:  $\frac{1}{2} \sin 60^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$ .

2. 求值:  $\frac{\sin 45^\circ + \cos 30^\circ}{3 - 2 \cos 60^\circ} - \sin 30^\circ \tan 30^\circ$ .

【例 2】 求适合下列各式的锐角:

(1)  $2\sin\alpha = 1$ ;

(2)  $\tan^2\alpha - (1+\sqrt{3})\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$ ;

(3)  $\sqrt{3}\tan(\alpha - 10^\circ) = 3$ .

**思路** 此题考查特殊角的三角函数值的逆向应用,可把它看作关于这个角的三角函数求解.

解: (1)  $2\sin\alpha = 1, \therefore \sin\alpha = \frac{1}{2}$ .

$\therefore \alpha$  为锐角, 且  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 30^\circ$ .

(2)  $\therefore \tan^2\alpha - (1+\sqrt{3})\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$

即  $(\tan\alpha - 1)(\tan\alpha - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \tan\alpha = 1$  或  $\tan\alpha = \sqrt{3}$

$\therefore \alpha$  为锐角,  $\therefore \alpha =$  \_\_\_\_\_.

(3)  $\therefore \sqrt{3}\tan(\alpha - 10^\circ) = 3$

$\therefore \tan(\alpha - 10^\circ) = \sqrt{3}$ .

$\therefore \alpha$  为锐角,  $\therefore \alpha - 10^\circ =$  \_\_\_\_\_,

$\therefore \alpha =$  \_\_\_\_\_.

**总结** 解决此类问题的方法是把式子化成左边为某一个角的三角函数,右边为一常数的形式,再逆用特殊角的三角函数值,求出锐角的度数.

### 随堂练习

3. 已知  $\alpha$  为锐角, 且  $\tan\alpha = (\sqrt{3})^{-1}$ , 求  $\alpha$ .

4. 已知  $\sin\alpha = \cos 30^\circ$ , 求锐角  $\alpha$ .

5. 已知  $\tan^2\alpha + (3-\sqrt{3})\tan\alpha - 3\sqrt{3} = 0$ , 求锐角  $\alpha$ .

### 综合延伸

【例 3】  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  角是特殊角, 那么你能用这些角的三角函数值推出  $15^\circ$  角的三角函数值吗?

**思路** 运用三角函数定义求  $15^\circ$  角的三角函数值, 必须构造一直角三角形且有一锐角为  $15^\circ$ , 再找出这个三角形的三边关系.

解: 如图 1-2-3, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C$

$= 90^\circ, \angle ABC = 30^\circ$ , 延长  $CB$  到

$D$ , 使  $BD = BA$ , 则  $\angle ADB = 15^\circ$ ,  $D$

令  $AC = x$ , 则  $BC = \sqrt{3}x, AB =$

$2x, AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} =$

$\sqrt{x^2 + [(2+\sqrt{3})x]^2} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})x$

$\therefore \sin\angle ADB = \sin 15^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{x}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})x} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,

$\cos\angle ADB = \cos 15^\circ = \frac{DC}{AD} = \frac{(2+\sqrt{3})x}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})x} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ,

$\tan\angle ADB = \tan 15^\circ = \frac{AC}{DC} = \frac{x}{(2+\sqrt{3})x} = 2 - \sqrt{3}$ .

**总结** 求特殊角的三角函数值的关键是构造一个直角三角形, 使它的一个内角为所要求的角的度数, 再运用勾股定理或相似三角形推出三边关系, 利用定义求解.

### 随堂练习

6. 仿例 3 你能求出  $75^\circ$  角的三个三角函数值吗?

### 课堂小结

1.  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  角的三角函数值要熟记.

2. 计算有关特殊角的三角函数值, 先代值, 再化简.

3. 已知某些角的三角函数关系求角时, 一般是先求出这一角的某一三角函数值, 再求角.

### 心算笔记

【例 1】 (1)  $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$  (2) 1 (3)  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} + 4} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$ ,

$1 - 2\sqrt{3}$

【例 2】 (1)  $60^\circ$  (2)  $45^\circ$  或  $60^\circ$  (3)  $60^\circ, 70^\circ$

## 课后作业

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 分数 \_\_\_\_\_

## [基础演练]

1. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB:AC = 2:1$ , 则  $\angle A$  的度数为 ( )

A.  $30^\circ$     B.  $45^\circ$     C.  $60^\circ$     D.  $75^\circ$

2. 若  $\sqrt{3}\tan(\alpha + 10^\circ) = 1$ , 则锐角  $\alpha$  的度数是 ( )

A.  $20^\circ$     B.  $30^\circ$     C.  $40^\circ$     D.  $50^\circ$

3. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B$  为锐角, 且有  $|\tan B - \sqrt{3}| + (2\sin A - \sqrt{3})^2 = 0$ , 则  $\triangle ABC$  的形状是 ( )

A. 等腰三角形    B. 直角三角形

C. 等边三角形    D. 等腰直角三角形

4. 若菱形的边长为  $1\text{cm}$ , 其中一内角为  $60^\circ$ , 则它的面积为 ( )

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$     B.  $\sqrt{3}\text{cm}^2$     C.  $2\text{cm}^2$     D.  $2\sqrt{3}\text{cm}^2$

5. 若等腰三角形腰长为  $10\text{cm}$ , 顶角为  $60^\circ$ , 则三角形的面积为 ( )

A.  $25\text{cm}^2$     B.  $25\sqrt{3}\text{cm}^2$     C.  $50\sqrt{3}\text{cm}^2$     D.  $50\text{cm}^2$

6. (2004·江苏泰州) 下列各数  $\frac{22}{7}, \pi, \sqrt{8}, \sqrt[3]{64}, \sin 60^\circ$  中, 无理数共有 \_\_\_\_\_ 个.

7. 若  $3\tan^2\alpha - (3 + \sqrt{3})\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$ , 则锐角  $\alpha$  的度数为 \_\_\_\_\_.

8. 已知  $\alpha$  为锐角, 且  $\sin^2\alpha + \cos^2 35^\circ = 1$ , 则  $\alpha =$  \_\_\_\_\_.

## [综合测试]

9. 计算下列各题:

(1)  $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$ ;

(2)  $\frac{\sin 45^\circ + \cos 30^\circ}{3 - 2\cos 60^\circ} - \sin 60^\circ(1 - \sin 30^\circ)$ ;

(3)  $\frac{\cos 60^\circ}{1 + \sin 60^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}$ .

10. (2004·江苏泰州) 计算:  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3\tan^2 30^\circ + 2\sqrt{(\sin 45^\circ - 1)^2}$ .

11. (开放题) 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $a, b, c$  分别是  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边, 请你补足一条件后, 求  $\triangle ABC$  的周长.

12. 计算:  $\frac{\cos 45^\circ \cdot \tan 45^\circ - \sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \sqrt{3}}{\sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$\frac{\sqrt{4\cos^2 30^\circ - 4\cos 30^\circ + 1}}{\tan 30^\circ - \tan 45^\circ}$

13. 当  $x = \sin 60^\circ$ , 求代数式  $\frac{2x^2 - 4x}{x + 2} \times \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 4} + \frac{4x}{2 - x}$  的值.

14. 如图 1-2-4,  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ , 它的一个外角为  $80^\circ$ , 底角平分线长  $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ , 求腰上的高.

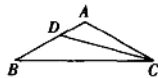


图 1-2-4

15. 试求  $\tan 18^\circ$  的值(不用计算器或查表, 结果用根号表示).

## 第三节 用计算器求锐角的三角函数值

“月亮走，我也走……”，听到这首民歌，大家一定会想起小时候，在皓月当空的夜晚，走在路上就会发现月亮随你往前走，当你停下时，它也停住不动，好像在等你；当你加快脚步时，月亮好似怕你丢下它，也加快速度。你一定感到奇怪：月亮为什么会跟着你“走”？你能用数学中的有关知识来解开你心中的谜吗？

(参考数据：月亮距离地球约 38 万千米， $\sin 0.00000015^\circ \approx 1.3 \times 10^{-9}$ )

### 问题探究

#### [问题 1]

我们利用三角尺并结合三角函数的定义求出了  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  角的三角函数值，也通过构造含特殊角的直角三角形求出了  $15^\circ$  角的三角函数值，当然还可以构造含有  $22.5^\circ$ 、 $18^\circ$  等角的直角三角形，求其三角函数值，那么对于任意角你能求出它的三角函数值吗？

#### [探究点拨]

对某些角可构造直角三角形，利用其三边关系求出函数值。 $22.5^\circ$  和  $18^\circ$  角可分别构造如图 1-3-1(1) 和图 1-3-1(2) 所示的直角三角形。

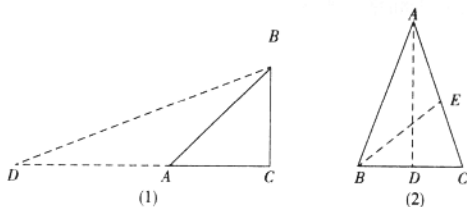


图 1-3-1

(1) 作  $\triangle ABC$  使  $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，延长  $CA$  到  $D$  点，使  $DA = BA$ ，则  $\angle D = 22.5^\circ$ ，由此可求其三角函数值。

(2) 作  $\triangle ABC$  使  $AB = AC$ ， $\angle BAC = 36^\circ$ ， $BE$  平分  $\angle ABC$  交  $AC$  于  $E$ ，则  $\triangle BCE \sim \triangle ABC$ 。由此可得  $\triangle ABC$  的底与腰长之比，再过  $A$  作  $AD \perp BC$  于  $D$ ，则  $\angle CAD = 18^\circ$ ，由此可求出  $18^\circ$  角的三角函数值。

(3) 对任意角不能寻出包含该角在内的直角三角形的三边关系。

#### [发现知识]

任意角的三角函数值不能利用定义求解，需借助(利用)计算器求解。

#### [问题 2]

几年前，国外有人传说：“从月亮上看地球，长城是用肉眼能一能看得见的建筑物。”

如果长城的宽度为 10m，人的正常视力能看清的最小物体所成的视角为 1 分，且已知月亮与地球之间的距离为 380000km，你能用学过的数学知识对这个传说进行明确地判断吗？

#### [探究点拨]

设  $O$  点为月亮， $AB$  为长城的宽度，如图 1-3-2， $\angle AOB$  为人在月球上看长城的视角，则判断传说的正确与否的关键是求出  $\angle AOB$  的大小，为此过  $O$  作  $AB$  的垂线，垂足为  $D$ ，则  $AD = 5m$ ， $OD = 380000000m$ ，在  $Rt\triangle AOD$  中

$$\tan \angle AOD = \frac{AD}{OD} = \frac{5}{380000000} \approx 1.3 \times 10^{-8}$$

于是问题转化为求一个角使它的正切值为  $1.3 \times 10^{-8}$ 。



图 1-3-2

#### [发现知识]

类似于求任意锐角的三角函数值一样，需利用计算器来求某些锐角的度数。

### 教材全解

#### 重点 1 用科学计算器求三角函数值

用科学计算器求三角函数值的顺序和步骤：

(1) 根据题目按  $\sin$ 、 $\cos$  或  $\tan$  键。

(2) 键入角度：①若以度为单位的，则直接键入各数据；

②若以度、分、秒为单位的，则先键入度插键  $\boxed{DMS}$  键，再键入分插键  $\boxed{DMS}$  键，最后键入秒，仍插键  $\boxed{DMS}$  键。

(3) 键入  $\boxed{=}$  即可得到结果。

(1) 用科学计算器求三角函数值必须遵循按键顺序。

(2) 计算器上显示结果均为十位数字，解题应注意根据要求进行四舍五入，取其近似数。

[例 1] 利用计算器求下列各式的值：

- (1)  $\sin 28^\circ$ ；(2)  $\cos 32^\circ 42'$ ；(3)  $\tan 72^\circ 54' 34''$ ；  
(4)  $\sin 14^\circ + \cos 18^\circ 49' + \tan 46^\circ 27' 28''$ 。

**思路** (1)、(2)、(3) 直接依据按键顺序键入各项，(4) 应按照题目的顺序依次键入，但应注意度、分、秒的键入。

**解**：(1)  $\sin 28^\circ = 0.469471562$ ；

(2)  $\cos 32^\circ 42' = 0.841510781$ ；

(3)  $\tan 72^\circ 54' 34'' = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(4)  $\sin 14^\circ + \cos 18^\circ 49' + \tan 46^\circ 27' 28''$

$= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**思维** 键入度、分、秒时不要忘记键入  $\boxed{DMS}$  键。

#### 随堂练习

1. 利用计算器计算下列各式的值：

(1)  $\sin 36^\circ 24' 31''$ ；

(2)  $\tan 75^\circ 36' 47'' + \cos 43^\circ 24' 54''$ ；



## 随堂练习

(3)  $289.4 \times \sin 47^{\circ} 34' 25''$ ;

(4)  $\frac{72.48}{\cos 42^{\circ} 36' 36''}$ .

**重点 2** 已知一个角的三角函数值,求这个角的方法与步骤

(1) 键  $\boxed{2ndf}$ .(2) 按题目的函数名称键  $\boxed{\sin}$  或  $\boxed{\cos}$  或  $\boxed{\tan}$ .

(3) 键入已知的函数值.

(4) 键  $\boxed{=}$  即得所求的角的度数(显示结果是以度为单位的,如果需化为度、分、秒,再按  $\boxed{2ndf}$  和  $\boxed{DMS}$  键).(1) 利用科学计算器由三角函数值求角时,必须首先按  $\boxed{2ndf}$ ,使其各键进入第二功能.(2) 需将度化为度、分、秒的应再键  $\boxed{2ndf}$  和  $\boxed{DMS}$ .

[例 2] 根据下列条件,求锐角的大小.

(1)  $\sin A = 0.675$ , 求  $\angle A$ .

(2)  $\cos B = 0.0789$ , 求  $\angle B$ .

(3)  $\tan C = 35.6$ , 求  $\angle C$ .

**思路** 由三角函数值,求角的大小,可直接利用计算器求解.

解: (1)  $\angle A = 42^{\circ} 27' 15''$ .

(2)  $\angle B =$  \_\_\_\_\_.

(3)  $\angle C =$  \_\_\_\_\_.

**提醒** 利用计算器按正确顺序按键,同时注意结果常化为以度、分、秒为单位.

## 随堂练习

2. 根据下列条件,求角的大小.

(1)  $\tan \alpha = 1.7344$ ;

(2)  $\tan \alpha = \frac{1}{2.1703}$ ;

## 随堂练习

(3)  $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ;

(4)  $\cos \beta = \tan 38^{\circ} 43' 27''$ .

## 课堂小结

1. 知识点: (1) 利用计算器可以求某些锐角的三角函数值.

(2) 已知一个锐角的某一个三角函数值利用计算器求出这一个角.

2. 解题规律与方法: 掌握计算器计算 1 中(1)、(2)两个问题的操作步骤.

## 心偶笔记

[例 1] (3) 3.252458337 (4) 2.240703476

[问题探究]  $\angle AOD = 0.00268' < 1'$ , 故在月球上根本不可能看见长城

[例 2] (2)  $85^{\circ} 28' 29''$  (3)  $88^{\circ} 23' 28''$