二十一世纪课程立体化系列教材

高等学校理工类专业

高等数学讲义

GAO DENG SHU XUE

主编 吴赣昌
陈 怡

上册

海南出版社

二十一世纪课程立体化系列教材

高等数学（理工类）立体化教材之

高等数学讲义

上册

主编　吴赣昌

陈　怡

海南出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学讲义．理工类．上册 / 吴赣昌，陈怡编．
海口：海南出版社，2005.8
ISBN 7-5443-1312-3

I．高... II．①吴...②陈... III．高等数学－高等
学校－教材 IV．O13

中国版本图书馆 CIP数据核字（2005）第042331号

高等数学讲义（上册）

主　　编：吴赣昌　陈　怡
责任编辑：武　铠
出版发行：海南出版社
电　　话：0898－66814101　　邮政编码：570216
地　　址：海口市金盘开发区建设三横路2号
印　　刷：广东省佛山市汾江印刷厂有限公司
开　　本：850×1168 mm 1/32
印　　张：22.75　　字数：60万字
版　　次：2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5443-1312-3/G・555
定　　价：43.00元（上、下册）

内 容 提 要

本书参照教育部颁发的高等学校本科理工类专业高等数学课程教学大纲和考研大纲编写，在教学内容和符号表示上都与这两类大纲相适应.

本书分上、下两册出版. 上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等七章. 书末还附有预备知识、几种常用曲线、几种常用曲面、积分表.

本书的编写具有以下特点：(1) 书中融入了数学历史与数学文化的教育，使读者能在学习的过程中，窥探微积分这一近代数学中最伟大科学成就的形成、发展的概貌，领略数学文化的丰富多彩; (2) 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想; (3) 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出进一步的总结; (4) 充分考虑教学的需要，选编了题型较为丰富的例题，除精选部分例题放入本书外，其余放入了配套的教学（学习）系统光盘中，供师生选用. 此外，还在每小节后配有课堂练习，供教师教学选用.

高等数学立体化教材是在面向21世纪课程的教改实践中产生的，它在教育技术与信息技术相结合方面具有突出的特点，本书是高等数学立体化教材之讲义部分，与《高等数学多媒体学习系统》和《高等数学习题集》组成整套立体化教材，配合使用，互为补充. 其内容涵盖了课堂教学、习题课教学、数学实验教学、自学辅导、综合提高等方面，形成教与学的有机结合.

本书可作为高等院校理工类专业的教材或参考书.

目　录

第四章　不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章　定积分的应用

第七章　空间解析几何与向量代数

附录

第一章 函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

§1.1 函数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海问题等）的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的二百多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性．

一、集合

1. 集合的概念

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**．组成这个集合的事物称为该集合的**元素**．通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合的元素．

若元素 a 是集合 M 的元素，则记为 $a \in M$，读作 a 属于 M；若元素 a 不是集合 M 的元素，则记为 $a \notin M$，读作 a 不属于 M；

由无限个元素组成的集合称为**无限集**；由有限个元素组成的集合称为**有限集**．

下面是几个集合的例子：

(1) 2005 年在广东地区出生的人构成一个集合（有限集）.

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成一个集合（有限集）.

(3) 全体奇数构成一个集合（无限集）.

(4) 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点构成一个集合（无限集）.

2. 集合的表示

列举法　即在{ }中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素.

(1) 若 M 仅由有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成，可记为

$$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

(2) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合，可记为

$$A=\{1,2\}.$$

描述法　若 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，则可记为

$$M=\{x\,|\,x\text{所具有的特征}\}.$$

(3) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合，可记为

$$M=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}.$$

(4) 全体奇数的集合，可记为

$$M=\{x\,|\,x=2n+1,\ n\text{为整数}\}.$$

3. 集合之间的关系.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如图 1-1-1

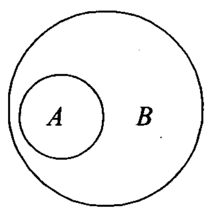


图 1-1-1

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就称集合 A 和 B **相等**，记为 $A=B$.

例如，设 $A=\{1,2\}$，$M=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$，则

$$A=M.$$

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**. 记为 S. 全集是相对

的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集．例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；当讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集．

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

例如，$\{x \mid x\text{为实数}, x^2+1=0\}=\varnothing$.

规定 空集为任何集合的子集．

本书今后用到的集合主要是**数集**，即元素都是数的集合．下面是几个常用的数集：

自然数集（记为 $\mathbf{N}$） 整数集（记为 $\mathbf{Z}$）

有理数集（记为 $\mathbf{Q}$） 实数集（记为 $\mathbf{R}$）

数集间的关系

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

注：今后如无特别说明，本课程中提到的数都是实数．

4. 集合的基本运算

定义 1 设 A 和 B 是两个集合，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$，如图 1–1–2. 即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

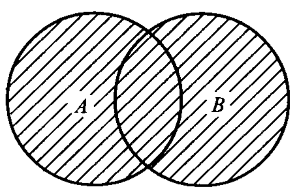


图 1–1–2

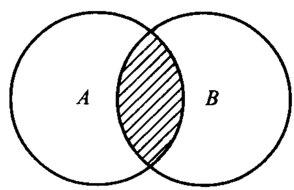


图 1–1–3

定义 2 设 A 和 B 是两个集合，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交**，记为 $A\cap B$，如图 1–1–3. 即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

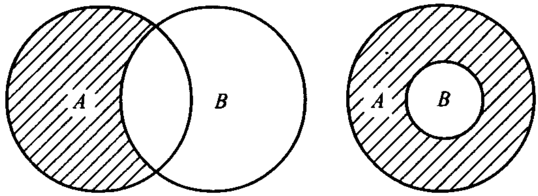


图 1-1-4

定义 3　设 A 和 B 是两个集合，由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，如图 1-1-4. 即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\};$$

定义 4　全集 S 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的**余集**或**补集**，记为 $\overline{A}$. 如图 1-1-5. 即

$$\overline{A}=S-A.$$

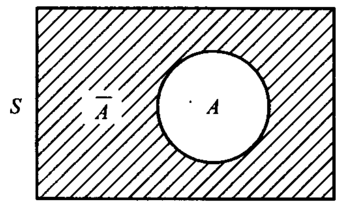


图 1-1-5

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x \mid 0<x\le 1\}$ 的余集就是

$$\overline{A}=\{x \mid x\le 0 \text{ 或 } x>1\}.$$

注: 本课程中用到的有关集合的内容，在中学课程中已经学过，这里只作简单介绍.

二、区间

定义 5　介于某两个实数之间的全体实数称为**区间**. 这两个实数称为区间的**端点**. 两端点间的距离 (线段的长度) 称为区间的**长度**.

区间是高等数学中常用的实数集，包括有四种**有限区间**和五种**无限区间**.

有限区间

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间:

$$[a,b]=\{x\,|\,a\le x\le b\}$$

$$[a,b)=\{x\,|\,a\le x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\le b\}$$

无限区间

引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间. 例如

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\le x\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1–1–6 所示.

$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\le x\}$; (a)　　$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$; (b)

图 1–1–6

特别地，全体实数的集合 **R** 也可表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

注: 在本课程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为“区间”，并常用 I 表示之.

三、邻域

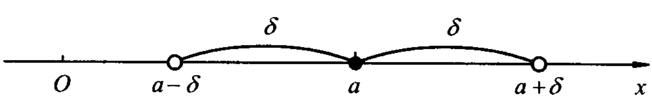
定义 6 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**. 记为

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中，点 a 叫做这**邻域的中心**，δ 叫做这**邻域的半径**. 如图(1–1–7).



$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$.

图 1–1–7

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$, 因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心**的 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

四、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量(变量)，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则. 本节我们先讨论两个变量的情形(多于两个变量的情形将在第八章再讨论).

例如，在自由落体运动中. 设物体下落的时间为 t, 落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定. 其中 g 是重力加速度.

定义 7 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x), \quad x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f, 即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$, 按照对应法则 f, 总有确定的值 y_0 (记为 $f(x_0)$) 与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体

组成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

注：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素．两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同．

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定．如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**．

例如，函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

的(自然)定义域即为开区间 $(-1,1)$．

函数的图形

对函数 $y=f(x)$，$x \in D$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点 (x,y)，当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**（如图 1-1-8）．

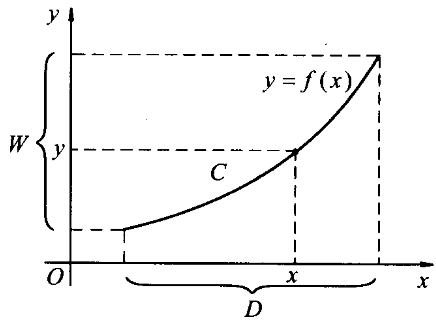


图 1-1-8

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**．否则称为**多值函数**．

例如，方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数．对每一个 $x \in (-a,a)$，都有两个 y 值 $(\pm\sqrt{a^2-x^2})$ 与之对应，因而 y 是多值函数．

注：今后，若无特别声明，函数均指单值函数．

函数的常用表示法

1. 表格法　自变量的值与对应的函数值列成表格的方法；

2. 图像法 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法;

3. 公式法(解析法) 自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法. 根据函数的解析表达式的形式不同, 函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种:

(1) 显函数 函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如,

$$y=x^2+1;$$

(2) 隐函数 函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程

$$F(x,y)=0$$

来确定. 例如, $\ln y=\sin(x+y)$;

(3) 分段函数 函数在其定义域的不同范围内, 具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$. 图形如图 1-1-9 所示.

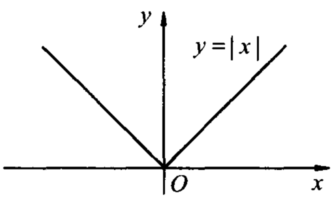


图 1-1-9

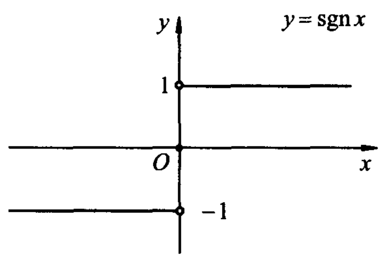


图 1-1-10

例 2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{-1,0,1\}$, 图形如图1-1-10所示.

例 3 取整函数

$$y=[x],$$

其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．例如，

$$[\pi]=3,\quad [-2.3]=-3,$$
$$[\sqrt{3}]=1.$$

易见，取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，图形如图 1-1-11 所示．

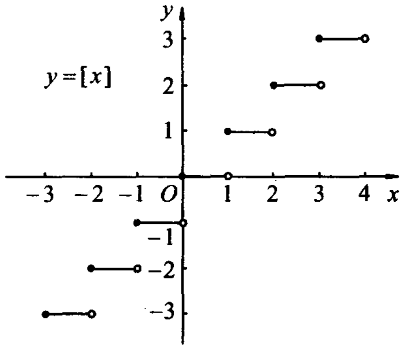


图 1-1-11

例 4 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

易见，该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$，但它没有直观的图形表示．

五、函数关系的建立

为解决实际应用问题，首先要将该问题量化，从而建立起该问题的**数学模型**，即建立**函数关系**．

要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，首先应分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域．

例 5 某工厂生产某型号车床，年产量为 a 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元，设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，即平均库存量为批量的一半．设每年每台库存费为 c 元．显然，生产批量大则库存费高；生产批量少则批数增多，因而生产准备费高．为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系．

解 设批量为 x，库存费与生产准备费的和为 $f(x)$．因年产量

为 a，所以每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$（设其为整数）. 于是，生产准备费为 $b\cdot\frac{a}{x}$，因库存量为 $\frac{x}{2}$，故库存费为 $c\cdot\frac{x}{2}$. 由此可得

$$f(x)=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{cx}{2}.$$

$f(x)$ 的定义域为 $(0,a]$，注意到本题中的 x 为车床的台数，批数 $\frac{a}{x}$ 为整数，所以 x 只取 $(0,a]$ 中的正整数因子.

例 6 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意，可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\le a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & a<s \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的，定义域为 $(0,+\infty)$.

六、函数特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\le M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 或称 $f(x)$ 是 X 上**有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M，都是该**函数的界**.

若具有上述性质的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\le 1$. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.