高职高专高等数学精品课程教材

高等数学

（经管类专业适用）

窦连江 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

高职高专高等数学精品课程教材

高 等 数 学

（经管类专业适用）

窦连江　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据“以服务为宗旨，以应用为目的，以实用为主，理论够用为度”的教学原则，结合高职高专经济管理类专业高等数学的教学实际而编写的。

本书具有以下特点：(1)适度淡化了数学理论，强化了数学概念的直观性，尽量作简单的几何解释或经济说明，同时简化了一般性的数学证明；(2)为了突出重点，强化对难点问题的理解、消化，对一些重点问题给出说明或注意；(3)为了突出数学应用，每章都编写了“应用与实践”一节，着重介绍在经济方面的应用和利用 Mathematica 软件包进行数学计算；(4)每章的“拓展与提高”一节主要是为了拓宽解题思路、介绍求解技巧、拓展学习内容，供学有余力的同学巩固知识、提高技能；(5)每节都精选了大量例题，节后都设有习题，以便学生复习巩固。

本书共分为十二章，主要内容包括一元函数微积分、常微分方程、偏导数与全微分、线性代数、线性规划、概率和数理统计等，书后还附有常用的数理统计数值表和习题参考答案。

本书可作为高职高专院校经济管理类专业的高等数学教材，也可供从事经济、管理工作的技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/窦连江主编. —北京：高等教育出版社，2006.9

经管类专业适用

ISBN 7-04-020106-2

Ⅰ. 高... Ⅱ. 窦... Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 091278 号

策划编辑 周先海 **责任编辑** 邓雁城 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 吴文信
版式设计 王艳红 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2006 年 9 月第 1 版
印 张	22.75	**印 次**	2006 年 9 月第 1 次印刷
字 数	550 000	**定 价**	28.40 元

物料号 20106-00

序 言

高等职业教育是我国高等教育体系的重要组成部分，也是我国职业教育体系的重要组成部分。伴随着我国高等职业教育的迅猛发展，天津市的高等职业教育取得了长足进步。

近年来，对高等职业教育的研究与实践都取得了丰硕的成果，但高等职业教育课程改革仍是我国高等职业教育面临的重点与难点。高等职业教育的核心是培养学生的实践能力和创新精神。如何使接受高等职业教育的学生体现出高职教育的特性，以获得必备的素质与技能而获得用人单位与社会的认可，一直是我们长期研究的课题。数学教育在这个方面更为突出，高等职业教育数学教学课程改革，迫在眉睫，任重而道远。

数学是一门基础科学，许多科学技术成果、技术领域的重大突破，数学在其间都起到了重要的支撑作用。数学、数字无处不在。在数学课程教学过程中展现数学在科学技术中的巨大作用和数学无处不在的巨大魅力，应是教学的重要目标之一。在教学过程中，应围绕着教学目的具体实施教学，不断修正教学活动中的表现方式、推理形式、教学技术乃至教学内容，充分展现高职教育的特色和优势。

数学不仅仅在理工学科领域中占有重要地位，在经济、管理、金融、人文科学等各个领域得到广泛的应用。通过该课程的教学，不但使学生具备学习所需要的基本数学知识，而且还使学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性方面受到必要的训练和熏陶，使他们具有理解和运用逻辑关系、研究和领会抽象事物、认识和利用数形规律的初步能力。因此，高等数学教学不仅关系到学生在整个学习期间的学习质量，而且还关系到学生的思维品质、思辨能力、创造潜能等科学和文化素养。高等数学教学既是科学的基础教育，又是文化基础教育，是素质教育的一个重要的方面。进入信息时代，数学日益渗透到经济生活的每一个领域，数学素质成为高技能人才的基本素质。

提高学生的实践能力和创新精神，对数学教学而言，就要培养学生具有较强的直觉思维能力和应用数学的意识。在2004年和2005年，天津工程职业技术学院和天津中德职业技术学院的“高等数学”课程先后被评为天津市高等职业教育精品课程，高等数学的教育教学与改革有了进一步的提高。本着“必须、够用为度”的原则，在这两门精品课程的基础上，此套教材得以出版。该套教材尽量考虑到了各专业的不同特点，教学中需要针对不同专业的需要作一定的取舍；同时，也积极探索了通过数学实验来提高学生的实践能力和综合素质。

创新是民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力。胡锦涛同志指出：“建设创新型国家，关键在人才。要完善培养体系，从教育这个源头抓起，根据我国经济社会发展特别是科学技术事业发展的要求，继续深化教育改革，加强素质教育，努力建设有利于创新型科技人才生成的教育培养体系。”随着天津作为国家职业教育改革试验区建设的不断深入，天津市的高职

教育发展的形势越来越好，社会认同度越来越高，办学思路也越来越清晰。衷心地希望高职教育战线的教师，从实施人才强国战略高度，进一步认清面临的形势与任务，加快培养高素质高技能人才，抢抓机遇，为高等职业教育跨越式发展做出贡献。

龙德毅

2006年7月

前　言

随着我国高等职业教育的迅速发展和经济管理类相关专业改革的持续深化，高职高专类高等数学课程的教学改革也不断加速。首先从教学内容上，一是要贯彻“以服务为宗旨，以应用为目的，以实用为主，理论够用为度”的教学原则，使教学内容整体趋于简单化；二是因为该课程作为一门基础课，所涉及的内容多是经典的理论和方法，所以要适度注意数学学科自身的系统性与逻辑性；三是注意满足模块化教学的需要，使其适应不同专业对高等数学课程的要求；四是注意满足分层教学的需要，使该课程在广度和深度上适应不同层次学生的学习需求；五是将高等数学精品课程建设的成果具体反映到教学上，使其发挥更有效的作用。为了适应上述新需求，非常有必要编写适用的、具有特色的高等数学教材。本书正是在这个背景下筹划并编写的。

本书具有以下特点：(1)适度淡化了数学理论，强化了数学概念的直观性，尽量作简单的几何解释或经济说明；同时简化了一般性的数学证明；(2)为了突出重点，强化对难点问题的理解、消化，对一些重点问题给出说明或注意；(3)为了突出数学应用，每章都编写了“应用与实践”一节，着重介绍在经济、管理方面的应用和利用 Mathematica 软件包进行数学计算；(4)每章的“拓展与提高”一节主要是为了拓宽解题思路、介绍求解技巧、拓展学习内容，供学有余力的同学巩固知识、提高技能；(5)每节都精选了例题，节后都专设了习题，以便学生复习巩固，例题的选择做到既结合重点、难点，又突出教学中的思维方法。

另外，本书的一个显著特色是它紧密结合了高职高专经济管理类专业高等数学的教学实际，在各章节的知识体系中融入了一些经济管理类专业的知识，这种有针对性的安排融会了编者多年来从事高等数学课程教学的经验。

全书共分为十二章，主要内容包括一元函数微积分、常微分方程、偏导数与全微分、线性代数、线性规划、概率论和数理统计等，书后还附有常用的数理统计数值表和各章节的习题参考答案。

本书建议总学时为 124 学时左右，其中第 1 章至第 9 章为经济管理类各专业必修内容，建议学时为 80 学时，第 10 章(14 学时)、第 11 章(16 学时)和第 12 章(14 学时)不同专业可根据需要进行有选择的学习。每章的“拓展与提高”一节不作为教学基本要求的内容，可供学生在教师的指导下进行自学。

本书的编写是在天津市教委领导下、部分高职高专院校的教师通力协作的结果。本书由窦连江担任主编，林漪担任副主编。天津电子信息职业技术学院孙晓晔编写了第 1 章、陈凤英编写了第 2 章；天津中德职业技术学院吴洁、张雅琴、任晓华编写了第 3 章、第 4 章和第 6 章；天津工程职业技术学院的窦连江编写了第 5 章，贺静编写了第 7 章，李英编写了第 8 章，崔西玲编写了全书的利用 Mathematica 软件进行数学计算的内容；天津机电职业技术学院的王仲翔

编写了第 9 章，林漪编写了第 11 章；天津交通职业技术学院的杜庆、陆玉新编写了第 10 章；天津对外经济贸易职业学院的黎雁编写了第 12 章。全书的结构安排、统稿、定稿工作由窦连江承担。

本书的编写得到了天津市教委高职高专处叶庆、杨荣敏老师的大力支持和热情帮助，他们对本书的编写进行指导，提出了宝贵的意见。本书承蒙南开大学陈吉象教授作为主审提出了许多保贵意见。天津工程职业技术学院的刘荣旺老师也对本书的编写提出许多建设性意见，并参与了部分校对工作。高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢。

限于我们的水平和经验，书中定有不少缺误，我们诚恳地希望读者批评指正。

编者

2006 年 7 月

目录

1 函数

函数是一个广泛存在、经常用到的重要概念，也是高等数学研究的主要对象．本章将介绍函数的概念、性质以及初等函数和建立函数模型等有关知识．

1.1 函数及其性质

本节将在中学所学的有关函数知识的基础上复习函数的概念并讨论函数的特性．

1.1.1 函数的概念

我们在观察一个现象或一个过程时，往往会遇到几个变量，这些变量之间并不是独立变化的，而是相互联系的．按照一定的规律变化，这种相互之间的关系就是函数关系．看下面的例子：

例 1.1　半径为 r 的圆面积 S 与 r 的关系为 $S=\pi r^2$．

当半径 r 在 $(0,+\infty)$ 内取定某一值时，由上式可确定面积 S 的值．

例 1.2　将 1 000 元本金存入银行，定期一年，年利率 2%，到期时把全部本金和利息继续存入银行，每年如此，则本利和 F 与存款年限 t 的关系为

$$F=1\,000(1+2\%)^t \quad (t=1,2,3,\cdots).$$

以上两个例子中，各有两个变量，且每个例子中的变量之间都有确定的对应关系，当一个变量在一定范围内取定一个值后，由某种对应关系便能得到另一变量对应的值．对于两个变量间的这种关系，我们有如下的定义：

定义 1.1　设 x，y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个 $x\in D$，按照某种对应法则，y 总有惟一确定的值与它对应，则称 **y 是 x 的函数**，记作 $y=f(x)$．

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**，定义域常用区间或集合表示．当 x 取定 D 中的值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值．记作

$$f(x_0) \text{或} y\big|_{x=x_0}.$$

对应于自变量 $x\in D$ 的函数值的全体称为函数的**值域**，用集合表示是

$$\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

在例1.1中，S是r的函数，其定义域是$r\in(0,+\infty)$；在例1.2中，F是t的函数，其定义域是$t\in\{1,2,3,\cdots\}$.

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素，因此**两个函数相同是指这两个函数的定义域和对应法则都相同**，而不在于函数与函数中的自变量用什么字母表示.

例如$S=\pi r^2$，$r\in(0,+\infty)$和$y=\pi x^2$，$x\in(0,+\infty)$表示同一个函数.

通常函数有三种表示方法，即解析法、表格法和图形法.

例1.3 判断下列各组中的两个函数是否相同，并说明理由.

(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$和$y=x-2$；

(2) $y=\sin x$和$y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(3) $y=f(x)$和$x=f(y)$.

解 (1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$的定义域为$x\neq -2$，而$y=x-2$的定义域为$x\in\mathbf{R}$，由于定义域不同，所以，这两个函数不同.

(2) $y=\sin x$和$y=\sqrt{1-\cos^2 x}$的定义域都是$x\in\mathbf{R}$，但它们的对应法则不同，因为$y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$；例如，当$x=\dfrac{7\pi}{6}$时，$y=\sin x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\sqrt{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}$，因此这两个函数不同.

(3) 虽然表示$y=f(x)$和$x=f(y)$的自变量和因变量的字母不同，但它们的定义域都是D_f，对应法则都是f，因此这两个函数相同.

例1.4 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求$f(0)$；$f(1)$；$f(-1)$；$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ $(a\neq 0)$.

解
$$f(0)=\sqrt{1+0^2}=1;$$
$$f(1)=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2};$$
$$f(-1)=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2};$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{1+a^2}.$$

例1.5 求函数$y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{4}$的定义域.

解 要使函数y有意义，自变量x须同时满足：
$$\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{x}{4}\right|\leqslant 1.\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2,\\ -4\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$
故函数的定义域为$[-4,-2]\cup[2,4]$.

1.1.2 分段函数

在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.

例如：绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

和符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

都是定义域为$(-\infty,+\infty)$的分段函数，如图1－1、图1－2所示.

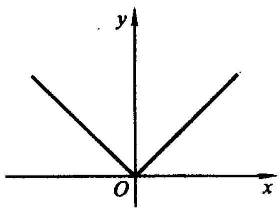

图1－1

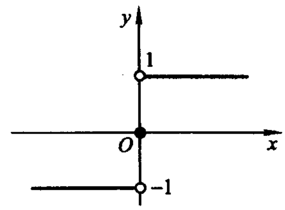

图1－2

注意 分段函数在其整个定义域内是一个函数，而不是几个函数，因此，分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例1.6 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -1\leqslant x<0,\\ -x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

求$f(x)$的定义域及函数值$f(-1)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$，并作出该函数的图形.

解 $f(x)$的定义域为$[-1,0)\cup[0,1]=[-1,1]$.

因为$-1\in[-1,0)$，所以$f(-1)=1-(-1)^2=0$；

因为$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

按照函数$f(x)$在各段定义域上相应的表达式分别作图，即可得到该函数的图形，如图1－3所示.

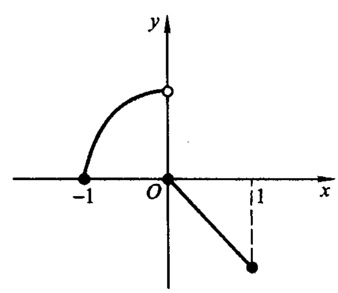

图1－3

1.1.3 反函数

在例1.1中，圆的面积S是半径r的函数，且$S=\pi r^2$，这时对于自变量$r\in(0,+\infty)$内的每一个值，都可以由$S=\pi r^2$计算出面积S. 如果研究相反的问题，由圆的面积计算圆的半径，就应该把面积S看成自变量，而把r看成因变量，即r是S的函数，并且

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\quad S\in(0,+\infty)$$

我们称$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$为函数$S=\pi r^2$的反函数. 一般地，反函数的定义是：

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值，在 D 中有惟一确定的 x 值与之对应，则 x 是定义在 M 上的以 y 为自变量的函数，称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)\ (y\in M)$.

习惯上，总用 x 表示自变量，y 表示函数，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常写成 $y=f^{-1}(x)\ (x\in M)$.

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.7 求函数 $y=2x+3$ 的反函数，并在同一直角坐标系中作出它的图形.

解 由 $y=2x+3$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y-3),$$

将 x 与 y 互换，得函数 $y=2x+3$ 的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x-3).$$

函数 $y=2x+3$ 和反函数 $y=\frac{1}{2}(x-3)$ 的图形如图 1－4 所示.

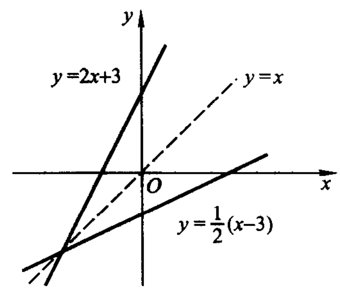

图 1－4

根据反函数的定义可知，函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是 x 与 y 的取值是一一对应的，即对于任何的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$.

利用这种方法，可以判断一个函数是否存在反函数.

例 1.8 讨论函数 $f(x)=x^2$ 的反函数.

解 函数 $f(x)=x^2$ 的定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域为 $y\in[0,+\infty)$，显然，当 x_1，x_2 取定定义域内两个相反的数时，$f(x_1)=f(x_2)$，所以函数 $f(x)=x^2$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数.

但是，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x^2$ 有反函数 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$；当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f(x)=x^2$ 有反函数 $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

1.1.4 函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，若对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加**的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少**的.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数. 从图形上看，单调增加函数的图形是沿 x 轴正方向上升的曲线，如图 1－5(a) 所示，单调减少函数的图形是沿 x 轴正方向下降的曲线，如图 1－5(b) 所示.

例如，函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内是单调减少的，在 $(1,+\infty)$ 内是单调增加的. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是单调减少的.

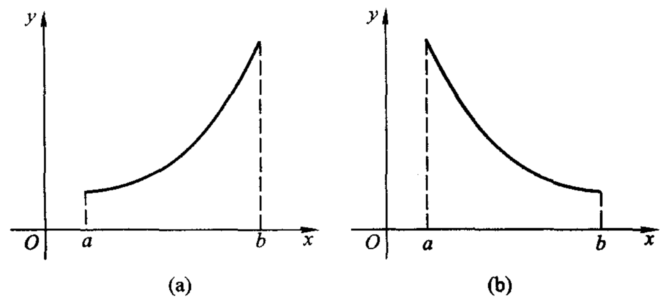

图 1－5

2. 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称.

(1) 如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

(2) 如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

从图形上看，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1－6(a) 所示；奇函数的图形关于原点对称，如图 1－6(b) 所示.

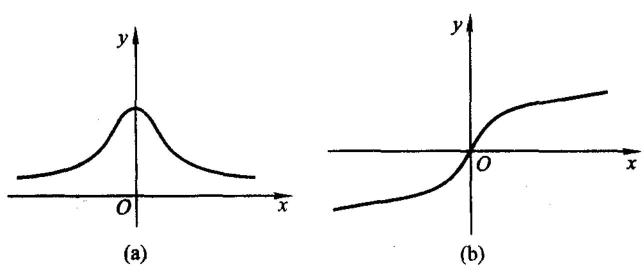

图 1－6

例 1.9 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=|x|(x^2+1)$；(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $f(x)$ 的定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$ 关于原点对称，且

$$f(-x)=|-x|[(-x^2)+1]=|x|(x^2+1)=f(x),$$

所以 $f(x)=|x|(x^2+1)$ 是偶函数.

(2) $f(x)$ 的定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$ 关于原点对称，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{-x^2+(\sqrt{1+x^2})^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是奇函数.

3. 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x\in D$ 和 $x+T\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，且 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

显然，如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 nT 也是函数 $f(x)$ 的周期（$n=\pm1,\pm2,\cdots$），通常周期函数的周期指的是**最小正周期**.

例如，$y=\sin x$ 的周期是 $T=2\pi$，$y=\tan x$ 的周期是 $T=\pi$.

从图上看，周期为 T 的函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴相隔 T 个单位重复一次，如图 1－7 所示.

4. 函数的有界性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 内**有界**，否则 $y=f(x)$ 在区间 I 内**无界**.

例如：函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有界，而在 $(0,1)$ 内无界.

由此可见，函数是否有界，不仅与函数有关，而且还与给定的区间有关.

从图形上看，在区间 I 内有界的函数 $y=f(x)$ 的图形在 $y=-M$ 和 $y=M$ 的一个带形区域内，如图 1－8 所示.

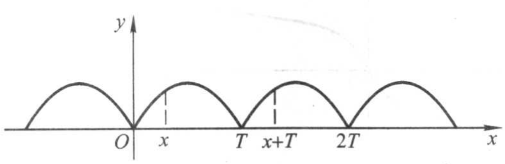

图 1－7

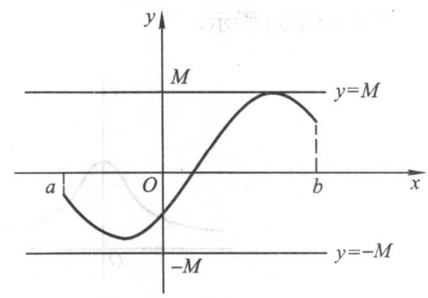

图 1－8

练习题 1.1

1. 下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一函数，为什么？

(1) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$；

(3) $f(x)=2\ln x$，$g(x)=\ln x^2$；

(4) $f(x)=x-1$，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2+x}}{\lg(1-x)}$；　　(4) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0,\\ \sqrt{3-x}, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$

3. 求函数值.