教育部职业教育与成人教育司推荐教材
（五年制）高等职业教育电子信息类教学用书

21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

（理工类）

主　编　王仲英　王冬琳
副主编　张万琴　郭振海

北京师范大学出版社

高等数学

教育部职业教育与成人教育司推荐教材

21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

（理工类）

主　编　王仲英　王冬琳

副主编　张万琴　郭振海

编　者　王仲英　张万琴

　　　　郝祥晖　高育晓

北京师范大学出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材，是作者根据教育部新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合多年教学经验和目前高职高专教育现状而编写的《高等数学》教材。

本书的主要内容有极限与连续、微分、积分、常微分方程、级数、积分变换、线性代数、概率与数理统计初步、图论等。书后附有基本初等函数的图形、初等数学常用公式、常用函数的拉普拉斯变换表、标准正态分布数值表、习题答案与提示等供读者参考。

本书可作为高职高专理工科各专业通用数学教材，也可作为相关技术人员和其他大专类学生的学习参考书和教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类/王仲英，王冬琳编著．—北京：北京师范大学出版社，2005.8
(21世纪高职高专系列规划教材)
ISBN 7-303-07657-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①王…②王…　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第086363号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街19号　邮政编码：100875)
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：185mm×260mm　印张：15.25　字数：350千字
2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷
印数：1～5 000　定价：20.00元

出 版 说 明

随着我国经济建设的发展，社会对技术型应用人才的需求日趋紧迫，这也促进了我国职业教育的迅猛发展，我国职业教育已经进入了平稳、持续、有序地发展阶段。为了适应社会对技术型应用人才的需求和职业教育的发展，教育部对职业教育进行了卓有成效的改革，职业教育与成人教育司、高等教育司分别颁布了调整后的中等职业教育、高等职业教育专业设置目录，为职业学校专业设置提供了依据。教育部连同其他五部委共同确定数控技术应用、计算机应用与软件技术、汽车运用与维修、护理等四个专业领域为紧缺人才培养专业，选择了上千家高职、中职学校和企业作为示范培养单位，拨出专款进行扶持，力争培养一批具有较高实践能力的紧缺人才。

职业教育的快速发展，也为职业教材的出版发行迎来了新的春天和新的挑战。教材出版发行为职业教育的发展服务，必须体现新的理念、新的要求，进行必要的改革。为此，在教育部高等教育司、职业教育与成人教育司、北京师范大学等的大力支持下，北京师范大学出版社在全国范围内筹建了“全国职业教育教材改革与出版领导小组”，集全国各地上百位专家、教授于一体，对中等职业、高等职业文化基础课、专业基础课、专业课教材的改革与出版工作进行深入地研究与指导。2004 年 8 月，“全国职业教育教材改革与出版领导小组”召开了“全国有特色高职教材改革研讨会”，来自全国 20 多个省、市、区的近百位高职院校的院校长、系主任、教研室主任和一线骨干教师参加了此次会议。围绕如何编写出版好适应新形势发展的高等职业教育教材，与会代表进行了热烈的研讨，为新一轮教材的出版献计献策。这次会议共组织高职教材 50 余种，包括文化基础课、电工电子、数控、计算机教材。其特点如下：

1. 紧紧围绕教育改革，适应新的教学要求。教育部等六部委联合发文确定紧缺型人才培养战略，并明确提出了高等职业教育将从 3 年制逐渐向 2 年制过渡。过渡时期具有新的教学要求，这批教材是在教育部的指导下，针对过渡时期教学的特点，以 2 年制为基础，兼顾 3 年制，以“实用、够用”为度，淡化理论，注重实践，消减过时、用不上的知识，内容体系更趋合理。

2. 教材配套齐全。将逐步完善各类专业课、专业基础课、文化基础课教

材，所出版的教材都配有电子教案，部分教材配有电子课件和实验、习题指导。

3. 教材编写力求语言通俗简练，讲解深入浅出，使学生在理解的基础上学习，不囫囵吞枣，死记硬背。

4. 教材配有大量的例题、习题、实训，通过例题讲解、习题练习、实验实训，加强学生对理论的理解以及动手能力的培养。

5. 反映行业新的发展，教材编写注重吸收新知识、新技术、新工艺。

北京师范大学出版社是教育部职业教育教材出版基地之一，有着近 20 年的职业教材出版历史，具有丰富的编辑出版经验。这批高职教材是针对 2/3 年制编写的，同时也向教育部申报了“2004－2007 年职业教材开发编写规划”，部分教材通过教育部审核，被列入职业教育与成人教育司 5 年制高职推荐教材。我们还将开发电子信息类的通信、机电、电气、计算机等其他专业，以及工商管理、财会等方面教材，希望广大师生积极选用。

教材建设是一项任重道远的工作，需要教师、专家、学校、出版社、教育行政部门的共同努力才能逐步获得发展。我们衷心希望更多的学校、更多的专家加入到我们的教材改革出版工作中来，北京师范大学出版社职业与成人教育事业部全体人员也将备加努力，为职业教育的改革与发展服务。

全国职业教育教材改革与出版领导小组
北京师范大学出版社

参加教材编写的单位名单

（排名不分先后）

沈阳工程学院
山东劳动职业技术学院
济宁职业技术学院
辽宁省交通高等专科学校
浙江机电职业技术学院
杭州职业技术学院
西安科技大学电子信息学院
西安科技大学机械学院
天津渤海职业技术学院
天津渤海集团公司教育中心
连云港职业技术学院
景德镇高等专科学校
徐州工业职业技术学院
广州大学科技贸易技术学院
江西信息应用职业技术学院
浙江商业职业技术学院
内蒙古电子信息职业技术学院
济源职业技术学院
河南科技学院
苏州经贸职业技术学院
浙江工商职业技术学院
温州大学
四川工商职业技术学院
常州轻工职业技术学院
河北工业职业技术学院
太原理工大学轻纺学院
浙江交通职业技术学院
保定职业技术学院
绵阳职业技术学院
北岳职业技术学院
天津职业大学
北京轻工职工职业技术学院
石家庄信息工程职业学院
襄樊职业技术学院
九江职业技术学院
青岛远洋船员学院
无锡科技职业学院
广东白云职业技术学院
三峡大学职业技术学院
西安欧亚学院实验中心
天津机电职业技术学院
漯河职业技术学院
济南市高级技工学校
沈阳职业技术学院
江西新余高等专科学校

前　言

高等数学是高职高专院校理工科各专业必修的一门重要的基础课程，它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了适应迅速发展的高等职业教育的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，根据高等职业教育数学教学的特点和需求，我们组织编写了这本教材。

本书编写具有以下几个特点：

1. 提纲挈领地指出了每一章教材的学习要点，使读者学习时做到心中有数，有的放矢。

2. 采用案例驱动的思想，编入了大量具有理工科类专业背景的例题和习题。

3. 内容结合专业、突出培养专业人才的能力，以强化概念、淡化计算、注重应用为重点，充分体现了"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，在保留高等数学传统教材主要内容的同时，精简了一些烦琐的证明和计算。

4. 本书学习内容根据专业特点而有弹性，分为两大模块：基础模块和提高模块，供各专业根据专业特色和学时的不同而选学。

5. 每章小结较详细地介绍了学习的主要内容，重、难点知识和公式等。

本书的主要内容有极限与连续、微分、积分、常微分方程、级数、积分变换、线性代数、概率与数理统计初步、图论等。书后附有基本初等函数的图形、初等数学常用公式、常用函数的拉普拉斯变换表、标准正态分布数值表、习题答案与提示等供读者参考。

本书可作为高职高专理工科各专业通用数学教材，也可作为相关技术人员和其他大专类学生的学习参考书和教师的教学参考书。

本书第 1、3、4、5 章及附录由王仲英编写，第 6、9 章由张万琴编写，第 7、8 章由郝祥晖编写，第 2 章由高育晓编写。全书框架结构安排、统稿和定稿由王仲英、王冬琳、郭振海承担。参加编写工作的还有段志霞、燕春霞等。

本书的编写和出版，自始至终得到了北京师范大学出版社的大力支持和帮助，责任编辑周光明先生为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动，并提出诸多好的建议，在此一并致以诚挚的谢意。

限于编者的水平，书中一定存在缺点和不足之处，敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编者

2005 年 3 月

目录

第1章 极限与连续

本章要点

1. 函数的概念,复合函数的分解,数列极限、函数极限和单侧极限的理解,无穷小和无穷大。
2. 极限的运算法则和两个重要的极限。
3. 函数的连续性与间断点。

高等数学与初等数学一样,函数仍然为其研究的主要对象,不同的是初等数学研究的是常量,高等数学研究的是变量。高等数学的研究工具是极限,并以极限为工具对函数的基本性态进行了准确地描述——函数的连续性。

1.1 函数的极限

本节先介绍函数的概念,然后介绍数列的极限、函数的极限,再研究两个重要的量——无穷小量和无穷大量。

1.1.1 函数的概念

1. 函数的概念

[案例 1.1] 种田要施肥,施肥量和产量当然有关系。但是,知道一亩小麦施用 15 千克尿素,却无法确定它究竟会产多少千克小麦。

长方形的周长和面积是有联系的。可是知道了周长,却无法确定它的面积。

一个题目里,未知数应当和已知数有联系。可是光有联系还不够,还应当有确定性的联系,有制约关系。这才可能从已知数出发找到未知数。施肥量不能制约产量,矩形周长也不能制约面积。

一枝铅笔 2 角,三枝 6 角,x 枝便是 $0.2x$ 元。铅笔的枝数 x 制约了钱数 y,表示为 $y=0.2x$。

正方形的周长 l 给定了,面积 S 也定了,l 可以制约 S,表示为 $S=\left(\frac{l}{4}\right)^2$。

如果变量甲可以制约变量乙,甲定了,乙也定了,就说乙是甲的函数。甲叫做主变量(或自变量),乙叫做从变量(或因变量)。

买铅笔的例子里,钱数 y 是铅笔数 x 的函数,函数关系可以用 $y=0.2x$ 表示;正方形的面积 S 是周长 l 的函数,函数关系可以用 $S=\left(\frac{l}{4}\right)^2$ 表示。

在函数关系中,主变量变化的范围叫做函数的定义域,函数值当然也有一定的范围。

定义 1.1 设 D 是一个非空数集，如果对于 D 中变量 x 的每一个确定的数值，按照一定的规律，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

其中，D 为该函数的定义域；x 为自变量；y 为因变量。

函数是变一个数为另一个数的法则。例如，法则'加 3'是一个函数。函数常用字母 f, g, F, G 来代表。设用字母 f 代表函数'加 3'，则 f 是加 3 到一个已知数的法则：

f 变 3 为 $3+3$

f 变 4 为 $4+3$

f 变 5 为 $5+3$

…

一般地，f 变 x 为 $x+3$，这可以写成 $f: x \to x+3$，简单写成 $f(x)=x+3$。

例 1.1 已知 $f(x)=3x^2+4x-7$，计算 $f(5)$ 和 $f(-2)$ 的值。

解：以 5 代替函数 $f(x)=3x^2+4x-7$ 中的 x，得到：$f(5)=3\times5^2+4\times5-7=88$

注意：$f(5)$ 称为当 $x=5$ 时的函数值。

$f(-2)=3\times(-2)^2+4\times(-2)-7=-3$

函数 $f(x)=x+3$ 也可以用映射图来说明：

$$x \to x+3$$
$$1 \to 1+3$$
$$2 \to 2+3$$
$$3 \to 3+3$$

这个"f"如同一台加工机器，x 放进去，加工后变出一个 y 来。

2. 函数的性态

[案例 1.2] 谈到一个人，常常能用几句话简单地概括他的特征。是高个子还是矮个子？胖子还是瘦子？圆脸还是长方脸？爱动还是爱静？沉稳还是活泼？上学还是工作？

拿到一个函数，也常常从几个方面看它的总特征。知道了总特征，更细致地了解它会比较方便。

(1)有界性

例如：$\sin x$，$\cos x$ 是有界的，它上不超过 1，下不超过 -1；x^2 有下界而无上界；$\tan x$ 没有上界也没有下界。

(2)单调性

像 $f(x)=x^3$，x 越大，$f(x)$ 也越大，$f(x)=[x]$（$[x]$表示 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数，例如$[\pi]=3$），x 变大，$f(x)$ 不会变小，这些都是单调递增函数。反过来，x 变大时 $f(x)$ 只会变小或保持不变，就是单调递减函数。常见的函数把定义域分成几段后，每段总是单调的。

(3)奇偶性

若 $f(x)=f(-x)$,叫偶函数。$f(-x)=-f(x)$,叫奇函数。$|x|,x^2,x^4,\cos x$ 是偶函数。$x,x^3,x^5,\sin x$ 是奇函数。对于奇函数或偶函数,只要研究 $x\geqslant 0$ 的情形就够了。一个函数可以既不是奇的,也不是偶的,但是它总能表示成奇函数与偶函数之和,因为对于任意的 $f(x)$,$\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$总是偶的,$\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$总是奇的,而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

(4)周期性

如果 $T\neq 0$,使 $f(x+T)=f(x)$对定义域中的任何 x 均成立,T 就叫做 $f(x)$的一个周期。通常说的周期,是指函数的最小正周期。例如,$f(x)=\sin x$,周期是 2π,$f(x)=\tan x$,周期是 π。知道了 $f(x)$是周期函数,只要研究它一个周期的性质就够了。

3. 复合函数

[案例 1.3] 某商店经营一种价格允许浮动的商品,营业额 y 是价格 u 的函数,而价格 u 又是货源 x 的函数,那么营业额 y 是货源 x 的函数。

[案例 1.4] 在自由落体运动中,动能 E 是速度 v 的函数:$E=\frac{1}{2}mv^2$,速度 v 是时间 t 的函数:$v=gt$,用 gt 去代替第一个式子中的 v,得动能与时间的函数关系式:$E=\frac{1}{2}mg^2t^2$。

对于这种在一个变化过程中有着确定对应关系的 3 个变量,我们有如下的定义:

定义 1.2 设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,而 u 是 x 的函数,$u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$的值全部或部分落在 $f(u)$的定义域内,则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,称此函数是由 $y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

式中,x 为自变量,u 为中间变量。

由此定义,当里层函数的值域不同于外层函数的定义域时,只要两者有公共部分,这时就可以限制里层函数的定义域,使其对应的值域不大于外层函数的定义域,就可以构成复合函数了。

函数 $y=2^{\sin x}$是由 $y=2^u$,$u=\sin x$ 复合而成的复合函数;函数 $y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数;函数 $y=\cos^2\frac{x}{2}$是由 $y=u^2$,$u=\cos v$ 及 $v=\frac{x}{2}$复合而成的复合函数;函数 $y=\arcsin u$,$u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的。

4. 初等函数

我们在中学里已经学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反

三角函数都是最常见、最基本的一类函数，称为基本初等函数。

由六个基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成，且可用一个解析式表示的函数，叫做初等函数，否则就是非初等函数。

例如，函数 $y=1+\sqrt{x}$，$y=2\sin\dfrac{x}{2}$，$y=x\ln x$，$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$等都是初等函数，而$y=\begin{cases}2x, x<0\\ e^{x}, x\geqslant 0\end{cases}$则是非初等函数。

1.1.2 函数的极限

1. 数列的极限

[案例 1.5] 下列的数从$\dfrac{1}{2}$开始，用规则“分子增加 1，分母就增加 1”得到下一个数：

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}\cdots$$

这种用某一规则联系起来的一列有序的数，就叫数列或序列。

[案例 1.6] 数列 1.9，1.99，1.999，1.9999…的项越来越接近数 2。

我们说数列收敛到极限 2。

如果一个数列是收敛的，则相邻项的差越来越小。

例如：

1.9 1.99 1.999 1.9999 …

0.09 0.009 0.0009

差越来越小

一个数列不收敛则说是发散的，下面是两个例子：

2 4 6 8 10 …

2 2 2 2

差不是越来越小

1 −1 1 −1 1 …

数在 1 和 −1 之间摆动

例 1.2 案例 1.5 所给出的数列收敛吗？如果收敛，它的极限是什么？

解：把每一项转换为小数，计算相邻项之间的差：

$$\frac{1}{2}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{4}{5}\quad \frac{5}{6}\quad \cdots$$

0.5 0.67 0.75 0.8 0.83

0.17 0.08 0.05 0.03

差越来越小

差越来越小，因此数列是收敛的。

为了看出极限，多算出数列的几项：

$\frac{31}{32}\approx0.97$　$\frac{46}{47}\approx0.98$　$\frac{98}{99}\approx0.99$　$\frac{999}{1000}\approx0.999$

可以看到项越来越接近1。因此，数列的极限是1。

2. 函数的极限

数列是定义域为自然数集合的函数。一般的函数的极限，也可以用类似数列极限的方式来引入。与数列极限稍不同的是，这次我们更多的用图形的方式来介绍函数的极限。

(1)当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

[案例1.7] 考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$（图1.1）的变化趋势。

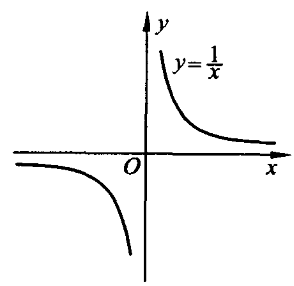

图1.1

从图1.1可以看出，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于零。即当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to0$。可记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

定义1.3　如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

[案例1.8] 考察当 $x\to\pm\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$（图1.2）的变化趋势。

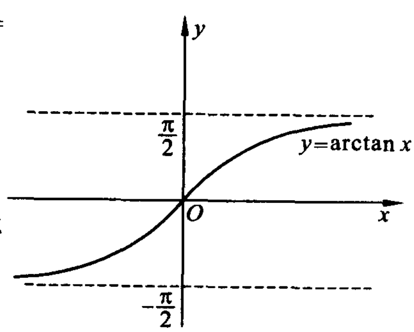

图1.2

从图像上可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 不是无限接近于同一个确定的常数，所以

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x \text{ 不存在}$$

定义1.4　如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A)$$

(2)当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

[案例1.9] 考察当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=x+1$（图1.3）和 $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$（图1.4）的函数值的变化趋势。

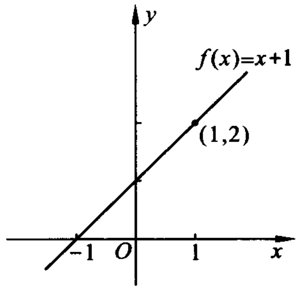

图 1.3

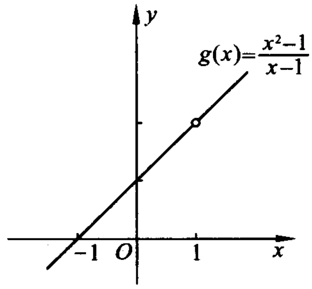

图 1.4

设 x 从 1 的左侧无限接近于 1，即 x 取 0.9，0.99，0.999，0.9999…→1 时，对应的函数 $f(x)$ 从 1.9，1.99，1.999，1.9999…→2

设 x 从 1 的右侧无限接近于 1，即 x 取 1.1，1.01，1.001，1.0001…→1 时，对应的函数 $f(x)$ 从 2.1，2.01，2.001，2.0001…→2

由此可知，当 $x\to1$ 时，$f(x)=x+1$ 的值无限接近于 2。同理：当 $x\to1$ 时，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限接近于 2。

定义 1.5 如果当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x\to x_0$（x 可以不等于 x_0）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

注意：从图像上可以看出，当 $x\to1$ 时，$f(x)=x+1$ 无限接近于 2；当 $x\to1$ 时，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2。函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是两个不同的函数，前者在 $x=1$ 处有定义，后者在 $x=1$ 处无定义。这就是说，当 $x\to1$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 的极限是否存在与其在 $x=1$ 处是否有定义无关。

3. 单侧极限

[案例 1.10] 如图 1.5 所示的函数 $f(x)$ 的解析表达式为 $f(x)=\begin{cases}x+1, x>1\\ x-1, x\leqslant1\end{cases}$，问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限是多少？

在函数极限的定义中，x 趋近于 x_0 的方式是任意的。此函数为分段函数，在 $x=1$ 的左右两侧，函数 $f(x)$ 的表达式不同，此时只能先对 $x=1$ 左右两侧分别进行讨论。

另外，我们有时还会遇到只需要考虑自变量 x 从 x_0 的某一侧趋近于 x_0 的函数极限问题。如函数 $y=\ln x$，只能考察 x 从 0 的右侧趋近于 0 的极限（如图 1.6 所示）。

定义 1.6 如果函数 $f(x)$ 当自变量 x 从 x_0 的左侧（右侧）无限趋近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左（右）极限，记作

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$），有时也简记为 $f(x_0-0)$[$f(x_0+0)$]