与普通高中现行教材配套

淘宝e线

导学精练

学科主编 / 陈子俊
本册主编 / 肖述友

湖北省28所名校联袂推出

数学

DAOXUE JINGLIAN

高一

(上)

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

DAOXUE JINGLIAN

与普通高中现行教材配套

导学精练

数学

高一

（上）

学科主编/陈子俊

本册主编/肖述友

副主编/冯　钢　邹振斌

编　委/（以姓氏笔画为序）

文昌明　冯　钢　刘荣显　李家才

李　兵　吴祥成　肖述友　张　强

邹振斌　郭　松　潘大勇

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

导学精练:数学 . 高一 . 上册/学科主编:陈子俊;本册主编:肖述友 . —武汉:武汉大学出版社,2006.9

ISBN 7-307-05186-9

Ⅰ.导… Ⅱ.①陈… ②肖… Ⅲ.数学课—高中—习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095776 号

责任编辑:郭志安　　责任校对:王　建　　版式设计:杜　枚

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:武汉中远印务有限公司

开本:880×1230　1/16　印张:6.5　字数:269 千字

版次:2006 年 9 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-05186-9/G · 861　　定价:12.80 元

DAOXUE JINGLIAN

出版前言

“惟楚有才，于斯为盛”，历年来，湖北省高考成绩始终为全国“鹤冠”。

自湖北省高考自主命题改革开始，武汉大学出版社按照全日制普通高中教学大纲和考试大纲要求，组织了湖北省28所重点高中近200名特、高级教师编写了《导学精练》高中同步系列与高考总复习系列丛书。该丛书覆盖了高中各学习阶段与各复习进程的各个科目，栏目新颖、版式美观、体例科学、目标清晰、讲解透彻、题量适中、解题灵活，真正体现了名师“导学”、学生“精练”的理念。《导学精练》将揭示高考高升学率的奥秘。

《导学精练》高中同步系列设如下栏目：

新课导学——把本章（或单元）的内容提纲挈领地串起来。即名师认为的“串珍珠”。

目标导航——简明扼要地列出学习本节（或框）的内容后应达到的目标。即名师认为的“指方向”。

知识梳理——把本节（或框）的全部知识概括性地总结复习。即名师认为的“放电影”。

名师点拨——对本节（或框）中的重点、难点、疑点，由老师给出启发性的阐释。即名师认为的“捉虱子”。

典例解析——针对本节（或框）中的学习内容，选择典型例子或经典考题进行解答与分析，起到举一反三的作用。即名师认为的“示范工程”。

同步精练——按基础、综合、拓展的层次，精选适量的练习题提供给学生解答，达到巩固所学知识、拓展学生思维的目的。即名师认为的“深耕细作”。

本章（单元）知识回顾——对本章（或单元）的知识点进行归纳，形成知识结构图或表格描述。即名师认为的“神经网络”。

本章（单元）检测题——精心设计了一套全面反映本章（或单元）所学内容的综合试题，检查测试学生学习的效果，以达到进一步提升的目的。即名师认为的“好钢是炼出来的”。

另外，书中还编写了期中测试题、期末测试题各一套。全书的所有练习题、检测题与测试题，在书后都给出了详尽的解答。

《导学精练》面向中等以上成绩的学生使用。

在本丛书即将付梓之时，我们感谢省教育厅、省教育考试院专家的指导，感谢各地市教研院、各县教研室领导的支持，感谢华师一附中、武汉外国语学校、水果湖高级中学、武钢三中、武汉市第二中学、武汉市第六中学、武昌实验中学、黄陂第一中学、黄冈中学、荆州中学、沙市三中、潜江中学、孝感市高级中学、鄂南高级中学、襄樊市第四中学、仙桃中学、荆门市第一中学、天门中学、监利一中、洪湖市第一中学、公安县第一中学、江陵县第一中学、松滋县第一中学、石首市第一中学、赤壁市一中、黄石市二中、宜昌市一中、随州市一中等28所重点中学编写老师的辛勤劳动，我们也感谢武汉鸣凤文化传播有限公司全体员工的大力协助。他们的鼎力支持，使这套丛书具有了权威性、前瞻性、科学性、实用性、新颖性与互动性。我们衷心期望《导学精练》使所有学生的成绩更上一层楼，在高考中实现心中的理想。

本丛书虽经老师多次修改、出版社三审三校一通读一质检，但肯定仍会有疏漏之处，我们诚恳地希望各位老师和同学谅解。也希望各位老师和同学能发现问题，指出编校错误，我们将竭尽全力使《导学精练》充实、完善、提高。

我们与您同行，共同承袭湖北高考的传奇！

《导学精练》编委会

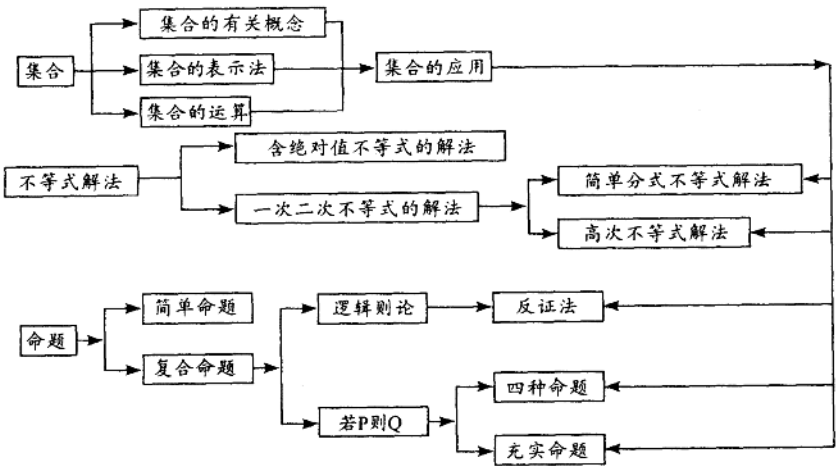
2006年8月20日

Contents

目　录

第一章 集合与简易逻辑

新课导学



1.1 集合的概念

知识梳理

(一)集合的有关概念

①一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合.

②集合中每一个指定的对象叫做这个集合的一个元素.

(二)集合中元素的性质

由集合的含义可知:集合中元素具备确定性、互异性和无序性三大性质.

①确定性:存在一个明确的判定标准,对任意一个对象,可以说明该对象是符合其标准,还是不符合其标准;二者必具其一,且二者只具其一.

②无序性集合中的元素没有先后顺序的差异.如$\{a,b,c\}$,$\{b,c,a\}$,$\{c,a,b\}$均表示同一个集合.

③互异性:集合中的元素不能重复出现,各元素互不相同.

(三)集合的表示法

①一般集合可用列举法和描述法两种方法表示.

②特殊集合可用专用大写字母表示.

Z→整数集　　R→实数集

Q→有理数集　　N→自然数集

N'→正整数集(N^+)

∅→空集

(四)集合的分类

按集合中元素个数,集合可分为有限集与无限集两类.

(五)两种集合符号

①元素与集合间关系用"∈"或"∉"表示.

②集合与集合间关系用"⊆"或"⊈"表示.

名师点拨

1.注意"元素的确定性"的含义,以此判断一些对象是否可构成集合.

2.研究集合中元素时,千万不要忽视"元素的互异性",特别是含字母元素的问题.

3.正确理解集合的含义,是研究集合运算的前提;特别是描述法表示的集合,应明确其"代表元素",弄清楚集合中对象的类别.

4.正确区分元素与集合,集合与集合两类关系,合理选择相应的集合符号解决问题.

高考试题主要为填空题、选择题,属容易题,涉及集合与元

素、集合与集合间关系判定以及集合的运算两大类；主要数学方法有分类讨论方程法、数形结合法.

典例解析

【例 1】 (1)考查以下各对象能否构成一个集合，其中构成集合的有________

A. 非常小的数

B. 高一年级的高个子学生

C. $\sqrt{2}$的近似数

D. 方程 $x^2+1=0$ 的实数根

E. 不超过 10 的非负数

F. 平面内，到一个定点和一条定直线距离相等的点

(2)方程 $x^2+(b+2)x+b+1=0(b\in\mathbf{R})$的所有实根构成一个集合 A，A 中所有元素之和为________

(3)$M=\{1,a,b\}$，$N=\{a,a^2,ab\}$，且 $M=N$，则有 $a+b=$________

解析 (1)根据元素的确定性，是否构成集合，主要看对于那些对象是否存在一个明确的标准，用以判断那些对象是否符合标准. 答案为D、E、F.

(2)集合中元素不能重复，故不能简单用韦达定理求两根之和. 元素的互异性往往是集合中一个容易被疏忽的隐含条件.

$\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2\geqslant 0$.

当 $b=0$ 时，$x_1=x_2=-1$ 但 $A=\{-1\}$.

$b\neq 0$ 时，$x_1=-1$，$x_2=-b-1$ $A=\{-1,-b-1\}$.

故答案为：$b=0$ 时，-1；$b\neq 0$ 时，$-b-2$

(3)由元素的无序性有：$\begin{cases}1+a+b=a+a^2+ab,\\ 1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab\end{cases}$

$\Rightarrow a=-1,b=0$，故 $a+b=-1$.

点评 元素三大性质是集合的本质属性，各自的含义应弄清楚，概念要明晰.

【例 2】 用适当的方法表示下列集合.

(1)大于 0 且小于 12 的奇数.

(2)绝对值小于 3 的数.

(3)方程 $x^2-1=0$ 的根.

(4)$y=\sqrt{x-1}$中 x 的取值范围.

(5)$y=\sqrt{x-1}$中 y 的取值范围.

(6)直线 $y=x-1$ 上的点.

解析 集合中元素有限时，一般用列举法；集合中元素共同特征比较清楚，有一般规律时，用描述法，描述法应尽可能简洁. 描述法表示集合的一般格式要正确，特别是"代表元素"应写清楚.

(1)$\{1,3,5,7,9,11\}$.

(2)$\{x\mid |x|<3,x\in\mathbf{R}\}$.

(3)$\{x\mid x^2-1=0\}$或$\{1,-1\}$.

(4)$\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$或$\{x\mid x\geqslant 1\}$.

(5)$\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$或$\{y\mid y\geqslant 0\}$.

(6)$\{(x,y)\mid y=x-1\}$.

点评 同一个集合可用不同方式表示；注意"代表元素"的重要地位，它是理解描述法含义的关键，如(3)(4)(5)的区别，以此加深理解.

【例 3】 化简下列集合.

(1)$A=\{x\mid (x-1)(2x+1)(x^2-1)=0,x\in\mathbf{Z}\}$.

(2)$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in N\right\}$.

(3)$C=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\right\}$.

(4)$D=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|ab|}{ab},ab\neq 0\right\}$.

(5)$E=\{x\mid y=(x-1)^2+1\}$，$F=\{y\mid y=(x-1)^2+1\}$，$G=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-2)^2=0\}$.

解析 (1)$A=\{1,-1\}$.

(2)$B=\{5,4,2,1\}$.

(3)$C=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{n+1},n\in\mathbf{N}^*\right\}$.

(4)$D=\{3,-1\}$.

(5)$E=\mathbf{R}$，$F=\{y\mid y\geqslant 1\}$，$G=\{(1,2)\}$.

点评 关键弄清"代表元素"的属性，确定集合研究的对象.

【例 4】 用恰当的集合符号填空.

(1)$\varnothing$____$\{0\}$.

(2)0 ____$\varnothing$.

(3)$\{0\}$____$\{\varnothing\}$.

(4)x^2+4x+5 ____$\{f(x)\mid f(x)>0,x\in\mathbf{R}\}$.

(5)$\{x\mid y=x^2\}$____$\{y\mid y=3x-1\}$.

(6)A ________$\{x\mid x\subseteq A\}$.

解析 正确区分两类关系，选择相应的集合符号.

(1)$\subseteq$ (2)$\notin$ (3)$\subsetneq$ (4)$\in$ (5)$=$ (6)$\in$

点评 关系类型的界定是关键，也是解题突破口，研究具体问题，要用辩证观念去看待，如(6).

【例 5】 集合 $M=\{f(x)\}$，其中 $f(x)$满足条件：$|x_1|\leqslant 1$，且$|x_2|\leqslant 1$，恒有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$成立.

(1)试判断 $g(x)=-x^2-2x+a$ 与 M 的关系.

(2)若 $H(x)=x^2-ax+1$，且 $H(x)\in M$，求 a 的取值范围.

解析 M 为一函数集合，$g(x)$、$H(x)$均有一函数，故$g(x)$，$H(x)$与 M 间只能为"$\notin$"或"$\in$"关系，故只须判断 $g(x)$、$H(x)$是否符合函数的条件.

(1)$|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}|g(x_1)-g(x_2)|&=|-x_1^2-2x_1+x_2^2+2x_2|\\&=|x_1-x_2||x_1+x_2+2|\\&\leqslant|x_1-x_2|\cdot(|x_1|+|x_2|+2)\\&\leqslant 4|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

故 $g(x)\in M$.

(2)同理知：$|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$时，

$|H(x_1)-H(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-a|\leqslant 4|x_1-x_2|$恒成立.即$|x_1+x_2-a|\leqslant 4$恒成立$\Leftrightarrow -4\leqslant x_1+x_2-a\leqslant 4\Rightarrow a\leqslant x_1+x_2+4$且$a\geqslant x_1+x_2-4$恒成立.

故$a\leqslant 2$且$a\geqslant -2$，

从而$2\geqslant a\geqslant -2$.

同步精练

一、选择题

1. 下列各式中正确的为(　　)

A. $a=\{a\}$　　B. $\{1,2\}=\{(1,2)\}$

C. $2\in\{(1,2)\}$　　D. $\{x|y=x+1\}=\{a|a-b=1\}$

2. 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\2x-y=2\end{cases}$的解集为(　　)

A. $\{1,0\}$　　B. $\{x=1,y=0\}$

C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(x,y)|(1,0)\}$

3. 集合$A=\{2a,a^2-3\}$，关于x的方程$(a+1)(a-2)x+3-a=0$的解的情况为(　　)

A. 一解　　B. 无解

C. 无解或惟一解　　D. 无解或惟一解或无数解

4. $M=\left\{x\left|x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$P=\left\{x\left|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则$M,N,P$间关系为(　　)

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq N\subsetneqq M$

5. $A=\{$不超过10的自然数$\}$，$B=\{$小于9的质数$\}$.

$C=\{$奇数$\}$，设$M=\{y|y\in A$且$y\in C\}$，

$N=\{x|x\in B$且$x\notin M\}$，则$N=$(　　)

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{3,5,7\}$

6. 定义集合A与B的一种运算：$A*B=\{x|x=x_1+x_2$，其中$x_1\in A,x_2\in B\}$，若$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，则$A*B$中所有元素之和为(　　)

A. 9　　B. 14

C. 18　　D. 21

7. 已知集合$A=\{y|y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$，集合$B=\{t|t=mx^2-2x+4m,x\in\mathbf{R}\}$，且$A\subseteq B$，则实数$m$的取值范围为(　　)

A. $0<m\leqslant 1$　　B. $m\geqslant 1$

C. $0\leqslant m\leqslant 1$　　D. $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{3}$

二、填空题

8. 集合$M=\{x|mx^2+2x-1=0,m\in\mathbf{R}\}$中至多只有一个元素，则$m$的取值范围为________

9. 集合$N=\left\{(x,y)\left|\frac{y-2}{x-1}=1\right.\right\}$，$M=\{(x,y)|y=2x^2\}$，$T=\{A|A\in N$且$A\in M\}$，则$T=$________

10. 已知$M=\left\{1,\frac{a}{b},b\right\}$，$N=\{0,a+b,b^2\}$，且$M=N$，则$a^{2005}+b^{2006}=$________

11. 已知$\frac{1}{2}\in\{x|2x^2-ax-2=0\}$，则$\{x|x^2-2ax+9=0\}$中所有元素之积为________

三、解答题

12. 对于一集合M和一种运算$*$，若任意$x_1\in M$，$x_2\in M$时均有$x_1*x_2\in M$，则称M对$*$是封闭的.现已知$M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，

(1)$s=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，$t=4$，$u=2\sqrt{2}$，$v=\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$中是$M$的元素的有几个？

(2)求证M对于乘法具有封闭性.

(3)M对于除法是否具有封闭性？说明理由.

13. 实数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in A(a\neq 1)$.

(1)已知 $\frac{1}{2}\in A$，求 A.

(2)求集合 A 中元素的个数.

14. 设 $f(x)=x^2+mx+n$，$A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f(f(x))=x\}$.

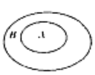
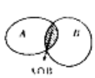
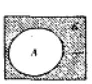
(1)求证：$A\subseteq B$.

(2)若 A 为单元素集，求证 $A=B$.

1.2 子集、交集、并集和补集

知识梳理

(一)子集、交集、并集和补集的概念

	子集	交集	并集	补集
语言表述	①两个集合 A 和 B，若 A 中的元素均是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集记为 $A\subseteq B$ $(B\supseteq A)$. ②若 $A\subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$.	两个集合 A 和 B，由既在 A 中又在 B 中的所有元素构成的集合叫 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$ 也可称两集合的公共元素的集.	两集合 A 和 B，由所有在 A 中或在 B 中的元素构成的集合叫 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$. 即两集合中的各元素合在一起(公共元素只取一遍).	若 A 是 S 的一个子集，由所有属于 S 但又不属于 A 的元素构成的集合叫 A 在 S 中的补集记为 $\complement_S A$，也称 A 对于 S 中的剩余集.
符号表述	任意 $x\in A$ 均有 $x\in B$ 则 $A\subseteq B$ $(B\supseteq A)$ $A\subseteq B$ 且存在 $y\in B$，但 $y\in A$ 则 $A\subsetneqq B$.	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.	$\complement_S A=\{x\mid x\in S$ 且 $x\notin A\}$.
图形表述				

(二)相关性质

1. 子集性质：

①$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$　$\varnothing\subsetneqq A$(非空).

②$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

③$A\subsetneqq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subsetneqq C$.

④$A\subsetneqq B$ 则 $A\subseteq B$，反之不然.

⑤$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

(两集合相等的证明方法)

2. 交集性质：

①$A\cap B=B\cap A$.

②$A\cap B\subseteq A$ 且 $A\cap B\subseteq B$.

③$A\cap\varnothing=\varnothing$.

④$A\subseteq B$ 则 $A\cap B=A$，反之亦然.

3. 并集性质：

①$A\cup B=B\cup A$.

②$A\cup B\supseteq A$ 且 $A\cup B\supseteq B$.

③$A\cup\varnothing=A$.

④$A\subseteq B$ 则 $A\cup B=B$.

4. 补集性质：

$\complement_S(A\cup B)=\complement_S A\cap\complement_S B$，

$\complement_S(A\cap B)=\complement_S A\cup\complement_S B$.(摩根定律)

(三)集合的运算方法

可数数集间运算用定义法；描述数集一般用数轴法；

点集间运算用方程法或数形结合法；抽象集合间运算多用文氏图法(韦恩图法).

名师点拨

1. 集合运算是高考考查集合的重点内容；要正确区分集合中元素的不同种类，并根据元素的种类选择与各自相应的运算方法进行相关运算.

2. 研究集合运算时要注意使用相关的性质和运算律，特别不要忽视$\varnothing$的特殊性.

3. 常见的方法有分类讨论，数形结合法，方程和不等式法；常见的错误有两类：一是元素种类判断错误，选择的计算方法不符；二是忽视一些极端情形(空集、端点取舍符).

典例解析

下列四个命题：(1)空集没有子集；(2)空集是任一集合的真子集；(3)任何一个集合必有两个或两个以上的子集；(4)若M是$\{a,b,c\}$的所有子集的集合，$N=\{a,c\}$，则$N\subsetneqq M$. 其中正确命题个数为________

空集是任意集合的一个子集，是任意非空集合的真子集，故(1)，(2)，(3)均不正确. 又M中的元素为“集合”，N是$\{a,b,c\}$的一个子集，故N是M中的一个元素，$N\in M$，(4)也不正确. 从而正确命题个数为0个.

子集与真子集的含义要理解透彻，同时分析解决集合问题时不要忽视“空集”这一种情形.

【例1】 (1)写出集合$M=\{a,b,c,d\}$的子集及真子集.

(2)已知$\{a,b\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c,d\}$，求$M$的个数.

(3)已知$A=\{a,b,c\}$，若$M\cup N=A$，则称(M,N)为集合A的一个“理想配集”. 求A的理想配集的个数.

解析 (1)子集有$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{b,d\}$，$\{b,c\}$，$\{c,d\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,b\}$，$\{b,c,d\}$，$\{a,b,c,d\}$.

真子集为前15个集合.

点评 (1)含n个元素的集合的子集共有2^n个；非空子集有(2^n-1)个；真子集有(2^n-1)个；非空真子集有(2^n-2)个.

(2)由条件知：M中必有a和b，同时还可以有c或d，也可以无c和d，但不能同时有c,d，故M的个数即为$\{c,d\}$的真子集的个数，即3个.

(3)分类讨论，仿(2)将问题转化.

$M=\varnothing$，$N=\{a,b,c\}$中共有1个.

$M=\{a\}$或$\{b\}$或$\{c\}$，N中必有另两个元素，前一个元素可有可无，此时N有2个.

$M=\{a,b\}$或$\{a,c\}$或$\{b,c\}$，N中必有一个元素，前两个元素可有可无，此时N有2^2个.

$M=\{a,b,c\}$时，N中共有2^3个.

综上所述知，理想配集共有：

$1+2\times2+3\times2^2+2^3=27$个.

符号语言表述相互融会，将问题转化为子集或真子集个数的求法. 此题推广一下，结论如何？请同学们自行解答.

(ⅰ)若$\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq M\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots,a_n\}$，则$M$的个数有______个.

(ⅱ)若$\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subsetneqq M\subsetneqq\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots,a_n\}$，则$M$的个数有________个.

(1)已知$A=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}\}$，

$B=\{y|y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}\}$，求证：$A=B$.

(2)求证：$\complement_U(A\cup B)=\complement_UA\cap\complement_UB$.

解答：

(1)紧扣定义，说明$A=B$只须说明两条：A中元素都在B中即$A\subseteq B$且B中元素又均在A中，即$A\supseteq B$.

设x为A中一元素，则$x=a^2+1,a\in\mathbf{N}$，

令$a=b-2$，即$b=a+2,b\in\mathbf{N}$，

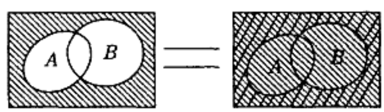
此时$x=(b-2)^2+1=b^2-4b+5$，即$x\in B$.

又设y为B中任一元素，则$y=(b-2)^2+1$，令$|b-2|=a$，由$b\in\mathbf{N}$知

$a\in\mathbf{N}$，故$y\in A$，

从而$A=B$.

(2)仿(1)用语言表述方式可证明，也可用以下文氏图加以说明：



$\complement_U(A\cup B)$ (阴影部分)　　$\complement_UA\cap\complement_UB$ (二次画线部分)

集合间关系界定的两种常见方式是定义法和图形表述法，故集合中相关概念的文字表述、符号表述、图形表述三种方式要融会贯通并能相互转化.

【例2】 设$U=\{x|x^2<121,x\in\mathbf{N}\}$，$A=\{$不大于8的正偶数$\}$，$B=\{x|x=3n-1,n\in\mathbf{N}_+$且$n<4\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_UA)\cap B$，$\complement_U(A\cup B)$以及$\complement_U(A\cap B)$.

解析 首先应根据集合的含义将已知集合化简，再由交集、并集和补集的定义进行相关运算.

$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{2,5,8\}$，

$\complement_UA=\{0,1,3,5,7,9,10\}$，

$\complement_UB=\{0,1,3,4,6,7,9,10\}$，

故$A\cup B=\{2,4,5,6,8\}$，$A\cap B=\{2,8\}$，

$(\complement_UA)\cap B=\{5\}$，

$\complement_U(A\cup B)=\{0,1,3,7,9,10\}$，

$\complement_U(A\cap B)=\{0,1,3,4,5,6,7,9,10\}$.

点评 元素的互异性决定公共元素在$A\cup B$中只能出现一次. 另外运算过程中请注意使用相关的运算性质，简化运算.

【例3】 求下列各题中两集合的交集：

(1)$A=\{y|y=x+1\}$，$B=\{y|y=x^2+1\}$.

(2)$A=\{(x,y)|y=x+1\}$，$B=\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

(3)$A=\{y=x+1\}$，$B=\{y=x^2+1\}$.

解析　(1)典型错误做法为:联立$\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2+1,\end{cases}$

解之得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$…

A、B均为一函数的值域,并不是点集,故并非求交点!

正确为$A=\mathbf{R}$,$B=\{y|y\geqslant1\}$.

从而$A\cap B=\{y|y\geqslant1\}$.

(2)A、B均为点集,$A\cap B$应为“交点”的集合,故由

$\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2+1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore A\cap B=\{(0,1),(1,2)\}$.

(3)错误解法:由$\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2+1\end{cases}$解方程组……

正确解法:A中只有一个元素为一次函数$y=x+1$,

B中也只有一个元素为二次函数$y=x^2+1$,

故$A\cap B=\varnothing$.

点评　以上三例很典型,是集合运算中常犯的错误类型.可见进行集合的有关运算时首先应弄清楚集合中元素的种类,不要将各类问题混为一体.

【例4】　计算.

(1)$A=\left\{x\,\middle|\,y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{2-x}\right\}$,

$B=\{y|y=-x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$,

求$A\cap B$,$A\cup B$.

(2)$A=\{(x,y)|y=x^2\}$,$B=\{(x,y)|y=2^x\}$,求$A\cap B$.

(3)S,T为两非空集合,且$S\not\subseteq T$,$T\not\subseteq S$,令$X=S\cap T$,求$S\cup X$.

(4)M,N是U的两个子集,且$M\cup N=U$,求$(\complement_UM)\cap N$.

(5)设$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

且$A\cap B=\{2\}$,$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\{1,9\}$,

$(\complement_UA)\cap B=\{4,6,8\}$,求集合$A$及B.

解析　(1)$A=\{x|x\geqslant1$且$x\neq2\}$,

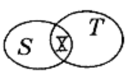
$B=\{y|y\leqslant2\}$,将它们在数轴上表示出来.利用图形可见:

$A\cap B=\{x|1\leqslant x<2\}$,$A\cup B=\mathbf{R}$.

(2)由$\begin{cases}y=x^2,\\y=2^x,\end{cases}$得$x^2=2^x$,亦得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=16.\end{cases}$

从而$A\cap B=\{(2,4),(4,16)\}$.

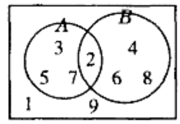
(3)画出文氏图,可见$S\cup X=S$.



(4)同上画文氏图,可见$(\complement_UM)\cap N=\complement_UM$.

(5)画文氏图,根据条件将已知元素填入相应的位置,再将U中剩余元素填入“剩余”位置.由图可见$A=\{2,3,5,7\}$,$B=\{2,4,6,8\}$.

点评　集合运算的一般方法可归纳为:



①集合为可列举数集时,用定义法.

②集合为不等式解集(不可数数集)时用数轴法.

③集合为点集时,用方程组法或数形结合法.

④抽象集合的运算用文氏图法.

画文氏图时应注意代表性.

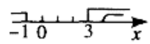
【例5】　(1)已知$A=\{x|x\leqslant-1$或$x\geqslant3\}$,$B=\{x|x>2a-1\}$且有$B\subseteq A$,求a的取值范围.

(2)已知$A=\{(x,y)|y=x^2-1\}$,$B=\{(x,y)|y=2x-a\}$,且$A\cap B\supsetneqq\varnothing$,求实数$a$的取值范围.

(3)已知$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$,$B=\{x|x<2a-1$或$x>b+1\}$,$A\cup B=\mathbf{R}$且$A\cap B=\{x|-1\leqslant x<0\}$,求$a$和$b$的值.

(4)$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-2}{x-1}=1\right\}$,$B=\{(x,y)|y=(a+1)x-1\}$,若$A\cap B=\varnothing$,求实数$a$的值.

解析　(1)



由图知:$2a-1\geqslant3$,

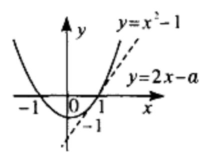
即$a\geqslant2$.

(2)方法一:联立$\begin{cases}y=x^2-1,\\y=2x-a,\end{cases}$消去$y$得:

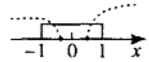
$x^2-2x+a-1=0$.

由$\Delta=4-4a+4\geqslant0\Rightarrow a\leqslant2$.

方法二:当$y=2x-a$与$y=x^2-1$相切时有$a=2$,故$-a\geqslant-2$,即$a\leqslant2$时必有$A\cap B\neq\varnothing$.



(3)如图,



由条件即得:

$\begin{cases}2a-1=0,\\b+1=1,\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$且$b=0$.

(4)当直线$y-2=x-1$平行于$y=(a+1)x-1$时,$A\cap B=\varnothing$.此时有$a+1=1\Rightarrow a=0$

当$y-2=x-1$与$y=(a+1)x-1$相交时,交点必为点$(1,2)$才能使$A\cap B=\varnothing$.

此时$2=(a+1)\cdot1-1\Rightarrow a=2$.

故当$a=0$或2时,$A\cap B=\varnothing$.

点评　①利用图形直观分析解决代数问题，是数学中常见的一种重要方法，应学会运用.

②在研究集合之间的关系时，端点处“等号”取舍要特别细心处理.

【例 6】　已知 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，

(1)若 $A\cap B=B$，求 a 的取值范围.

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的取值.

解析　$A\cap B=B$，即 $B\subseteq A$，

$A\cup B=B$，即 $A\subseteq B$.

(1)由 $B\subseteq A$ 知 $B=\varnothing$，$\{0\}$，$\{-4\}$ 或 $\{0,-4\}$，

$B=\varnothing$ 时，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0\Rightarrow a<-1$.

$B=\{0\}$ 时，有 $\Delta=0$ 且 $x_1=x_2=0\Rightarrow a=-1$.

$B=\{-4\}$ 时，有 $\Delta=0$，有 $x_1=x_2=-4\Rightarrow a$ 不存在.

$B=\{0,-4\}$ 时，$\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1=0,\\ x_2=-4\end{cases}\Rightarrow a=1$.

综上所述知 $a\leqslant-1$ 或 $a=1$ 时，$A\cup B=B$.

(2)由 $A\subseteq B$ 且 B 中最多只能有二元素，

故 $A=B$，即 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1=0,\\ x_2=-4\end{cases}\Rightarrow a=1$，即当 $a=1$ 时，$A\cup B=B$.

点评　分类讨论的原则为不重不漏，$B=\varnothing$ 是 $B\subseteq A$ 中一种情形，不容忽视.

【例 7】　某班共 48 人，参加语文兴趣小组的有 18 人，参加数学兴趣小组的有 24 人，参加英语兴趣小组的有 24 人，既参加语文又参加数学者 10 人，既参加数学又参加英语者 13 人，既参加语文又参加英语者 8 人，三者均参加者 3 人，问此班有几人三者均没参加？

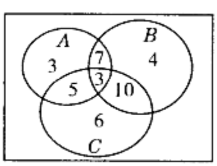
解析　数值中有重叠，不易直接计算，可视三小组为三集合，用文氏图去求集合中元素中数.

记 $A=\{$参加语文兴趣小组者$\}$

$B=\{$参加数学兴趣小组者$\}$

$C=\{$参加英语兴趣小组者$\}$

画出文氏图如图所示：可见：



参加了兴趣小组的人共有 $3+5+3+7+4+10+6=38$ 人.

从而均没参加者有 10 人.

点评　求集合中元素的个数，可参看课本阅读材料，用容斥原理解决.

同步精练

一、选择题

1. 已知 $B=\{a,b,c,d,e\}$，$C=\{a,c,e,f\}$，集合 A 满足 $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$，则 A 的个数为(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 7　　D. 5

2. 已知 $A=\{x|x^2+mx+12=0,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0,x\in\mathbf{N}\}$，全集 $U=\mathbf{N}$ 且 $(\complement_UA)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_UB)=\{4\}$，则 $m+q$ 的值为(　　)

A. -1　　B. -4　　C. 13　　D. 6

3. 设 A、B 为两非空集合，规定 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，则 $A-(A-B)$ 等于(　　)

A. B　　B. A　　C. $A\cap B$　　D. $A\cup B$

4. 全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，则 $(\complement_UM)\cap(\complement_UN)$ 等于(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

5. 集合 A、B、C 满足关系 $A\cup B=A\cup C$，则下列结论中正确的为(　　)

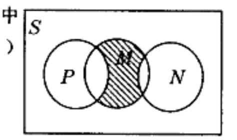
A. $B=C$

B. $A\cap B=A\cap C$

C. $A\cap(\complement_UB)=A\cap(\complement_UC)$

D. $(\complement_UA)\cap C=(\complement_UA)\cap B$

6. 集合 S、M、N、P，如图所示，则图中阴影部分表示的集合可以为(　　)



A. $M\cap(N\cup P)$

B. $M\cap\complement_S(N\cap P)$

C. $M\cup\complement_S(N\cap P)$

D. $M\cap\complement_S(N\cup P)$

7. 已知 $P=\{x|x^2+x-6=0\}$，$Q=\{x|mx-1=0\}$，且 $Q\subsetneqq P$，则 m 的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{3}$　　D. 以上均不对

8. 设 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，若 $\complement_UA=\{5\}$，则实数 a 的值为(　　)

A. -4　　B. 2

C. -2　　D. -4 或 2

9. $A=\{x|-3<x-1<3\}$，$B=\{x|x-a>0\}$，若 $A\cap B\neq A$，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $a\leqslant-2$　　B. $a>-2$

C. $a\geqslant4$　　D. $a<4$

二、填空题

10. 集合 A，B 分别有元素 8 个和 13 个，$A\cap B$ 中有元素 6 个，

则 $A\cup B$ 中元素个数为________

11. 下列命题：(1)$a\in(A\cup B)\Rightarrow a\in(A\cap B)$.

(2)$a\in(A\cap B)\Rightarrow a\in(A\cup B)$.

(3)$A\cap B=\varnothing\Rightarrow(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=U$.

(4)$A\cap B=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$或 $B=\varnothing$.

(5)$A\cup B=U\Rightarrow(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$.

(6)$A\cap(\complement_U B)=\varnothing\Rightarrow A\subsetneqq B$.

其中正确的有__________

12. 已知 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap R^+=\varnothing$，则实数 m 的取值范围为________

三、解答题

13. 全集 $U=\{x||x|\leqslant 4$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$，$A=\{-3,a^2,a+1\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 $\complement_U(A\cup B)$.

14. 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，是否存在实数 a，使得 $A\cap C=\varnothing$ 且 $A\cap B\neq\varnothing$. 若存在则求出 a 的值，若不存在请说明理由.

15. 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x-a\}$，$B=\{(x,y)|y=|x^2-1|\}$

(1)若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

(2)若 $A\cap B$ 中有且只有两个元素，求实数 a 的取值范围.

1.3 绝对值不等式

知识梳理

1. 实数的绝对值的意义及性质:

①$|a|=\begin{cases} a, & (a\geqslant 0) \\ -a. & (a\leqslant 0) \end{cases}$

②$|a|$表示"数轴上点 a 到原点的距离".

③$|a|\geqslant 0,|a|\geqslant a,|a|\geqslant -a$ 恒成立.

④$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$且$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$,当 ab 异号或其中有零时,前式左端等号成立,a、b 同号或其中有零时,前式右端等号成立.

2. "$|x|>a$"及"$|x|<a$"型不等式的解集:

①$a>0$ 时,$|x|>a$ 的解集为$\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$,

$|x|<a$ 的解集为$\{x|-a<x<a\}$.

简称:"大于在两边,小于在中间".

②$a=0$ 时,$|x|>0\Rightarrow x\neq 0$,

$|x|<0\Rightarrow x\in\varnothing$.

③$a<0$ 时,$|x|>a$ 的集为 $\mathbf{R}$,

$|x|<a$ 的集为$\varnothing$.

3. "$|ax+b|>c$"及"$|ax+b|<c$"型不等式可转化为上面两类加以解决.

4. 复杂绝对值不等式,则根据绝对值的意义采取分类讨论法或数形结合法解决.

名师点拨

1. 几类绝对值不等式的一般解法均是绝对值性质的运用,因此要深入、多层面、多角度理解实数绝对值的含义.

2. 绝对值不等式解法蕴含等价转化,分类讨论,数形结合等重要思想方法,因此通过此类不等式的解法要体会这些数学思想.

3. 绝对值不等式解法中要认真区分分段讨论解法与分类讨论法,解集间的交、并关系不能混淆.

典例解析

【例 1】 解不等式:

(1)$2(|x|+3)<3(4-|x|)$.

(2)$\sqrt{(3-2x)^2}\geqslant 4$.

(3)$\dfrac{3-|x|}{|x|+2}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

(4)$1\leqslant|3x-5|<9$.

解析 化绝对值不等式为一次不等式(组),再解之.

(1)原不等式为:$|x|<\dfrac{6}{5}\Rightarrow-\dfrac{6}{5}<x<\dfrac{6}{5}$,

故解集为$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{6}{5}<x<\dfrac{6}{5}\right\}$.

(2)不等式为:$|2x-3|\geqslant 4$,

即 $2x-3\geqslant 4$ 或 $2x-3\leqslant -4$,

故 $x\geqslant\dfrac{7}{2}$或 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

解集为$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{7}{2}\text{或 }x\leqslant-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(3)$\because|x|+2>0$,由不等式性质得:

$2(3-|x|)\geqslant|x|+2$,

$\Rightarrow|x|\leqslant\dfrac{4}{3}\Rightarrow-\dfrac{4}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}$,

故解集为$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{4}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}\right\}$.

(4)原不等式为$\begin{cases}|3x-5|\geqslant 1, & ① \\ |3x-5|<9. & ②\end{cases}$

①式:$3x-5\geqslant 1$ 或 $3x-5\leqslant -1$,

$\Rightarrow x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant\dfrac{4}{3}$.

②式$-9<3x-5<9\Rightarrow-\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{14}{3}$.

综合①②得:解集为$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{4}{3}<x\leqslant\dfrac{4}{3}\text{或 }2\leqslant x<\dfrac{14}{3}\right\}$.

解法二:利用绝对值性质,原不等式为:

$1\leqslant 3x-5<9$ 或 $-9<3x-5\leqslant -1$

$\Rightarrow 2\leqslant x<\dfrac{14}{3}$或$-\dfrac{4}{3}<x\leqslant\dfrac{4}{3}$(同上).

点评 含绝对值不等式的解法是先化简为$|ax+b|>c$,或$|ax+b|<c$ 型,进一步化为一次不等式(组).

【例 2】 解不等式(组):

(1)$|2x-1|>m+1(m\in\mathbf{R})$.

(2)$|3x-1|<x+3$.

(3)$\begin{cases}(x^2+3)(x-1)>0, \\ |2x-3|<x.\end{cases}$

(4)$|x-|2x+1||>1$.

解析 (1)考虑到 $m+1>0$ 时或 $m+1\leqslant 0$ 时情形不同,不能随便套公式,故分情形讨论.

当 $m+1>0$ 时,即 $m>-1$ 时,

$2x-1>m+1$ 或 $2x-1<-m-1$,

即 $x>\dfrac{m+2}{2}$或 $x<-\dfrac{m}{2}$.

当 $m=-1$ 时,$2x-1\neq 0\Rightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$.

当 $m<-1$ 时,$2x-1\in\mathbf{R}\Rightarrow x\in\mathbf{R}$.

故 $m>-1$ 时,解集为$\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{m+2}{2}\text{或 }x<-\dfrac{m}{2}\right\}$.

$m=-1$ 时,解集为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$.

$m<-1$ 时,解集为 $\mathbf{R}$.

点评　以上三种情形既不能求交集,亦不可求并集,随 m 的不同取值只能取其中之一.

(2)仿上题:

当 $x+3>0$ 时,即 $x>-3$ 时,有

$-x-3<3x-1<x+3 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<2$.

但此时应为 $\begin{cases} x+3>0, \\ -\frac{1}{2}<x<2, \end{cases}$ 即 $-\frac{1}{2}<x<2$.

当 $x+3=0$ 时,即 $x=-3$ 时有 $|3x-1|<0$,解集为 $\varnothing$.

当 $x+3<0$ 时,即 $x<-3$ 时,解集为 $\varnothing$.

以上三种情形求并集得 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2}<x<2\right\}$.

点评　此法称为分段讨论解法,各段的条件与相应的结论应同时成立,才不至于矛盾,故应求交集,各段之间又应求并集,与分类讨论的巨大区别应清晰.

再思考:若对"$x+3$"的符号不予分析,直接套公式得:

$-x-3<3x-1<x+3 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<2$ 结果与上解相同,是巧合吗?换几个试一下,可以发现:一般情形此法仍可行,当绝对值外部不含"别的字母",只是"未知数"时,可直接套两类情形对应的公式(理由今后可见).

$|f(x)|>g(x) \Rightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$.

$|f(x)|<g(x) \Rightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

(3)①式 $(x^2+3)(x-1)>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$.

②式 $-x<2x-3<x \Rightarrow 1<x<3$,

求交集得:$\{x|1<x<3\}$ 为解集.

(4)原不等式为:

$x-|2x+1|>1$ 或 $x-|2x+1|<-1$.

前式:$|2x+1|<x-1$,

$\Rightarrow -x+1<2x+1<x-1 \Rightarrow x\in\varnothing$.

后式:$|2x+1|>x+1$,

$\Rightarrow 2x+1>x+1$ 或 $2x+1<-x-1$,

即 $x>0$ 或 $x<-\frac{2}{3}$.

求并集,解集为 $\left\{x \,\middle|\, x>0 \text{ 或 } x<-\frac{2}{3}\right\}$.

【例 3】　解不等式:

(1) $|x-1|+|x-2|-|3x-1|>-1$.

(2) $|2x-1|-|3x+2|<4x-3$.

解析　多个绝对值不便于脱去,可考虑用分段讨论解法,可规范书写为:

(1)方法一:原不等式为,

$\begin{cases} x<\frac{1}{3}, \\ 1-x+2-x+3x-1>-1, \end{cases}$

或 $\begin{cases} \frac{1}{3}\leqslant x<1, \\ 1-x+2-x-(3x-1)>-1, \end{cases}$

或 $\begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ x-1+2-x-(3x-1)>-1, \end{cases}$

或 $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x-1+x-2-(3x-1)>-1, \end{cases}$

即:$-3<x<\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{3}\leqslant x<1$ 或 $\varnothing$,

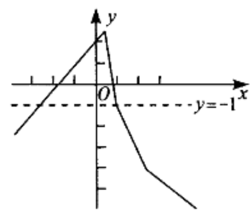
$\Rightarrow -3<x<1$,不等式解集为 $\{x|-3<x<1\}$.

方法二:设 $y=|x-1|+|x-2|-|3x-1|$,

分段讨论知:

$$y=\begin{cases} x+2, & \left(x<\frac{1}{3}\right) \\ 4-5x, & \left(\frac{1}{3}\leqslant x<1\right) \\ 2-3x, & (1\leqslant x<2) \\ -x-2. & (x\geqslant 2) \end{cases}$$

作出图像如下图:



由图可知:解集为 $\{x|-3<x<1\}$.

(2)不等式为:

$\begin{cases} x<-\frac{2}{3}, \\ 1-2x+3x+2<4x-3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 1-2x-(3x+2)<4x-3, \end{cases}$

或 $\begin{cases} x\geqslant\frac{1}{2}, \\ 2x-1-(3x+2)<4x-3. \end{cases}$

即:$x\in\varnothing$ 或 $\frac{2}{9}<x<\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant\frac{1}{2}$,亦即 $x>\frac{2}{9}$,

故解集为 $\left\{x \,\middle|\, x>\frac{2}{9}\right\}$.

点评　零点分段讨论法和数形结合法解绝对值不等式很实用有效,应熟练掌握,讨论时应不重不漏.怎样讨论及怎样作图是解题关键.

【例 4】　已知不等式 $|x-1|-|x+2|\leqslant a$.

(1)若其解集为 $\varnothing$,求 a 的取值范围.

(2)若其解集为 $\mathbf{R}$,求 a 的取值范围.

解析　设 $y=|x-1|-|x+2|$,作出图像: