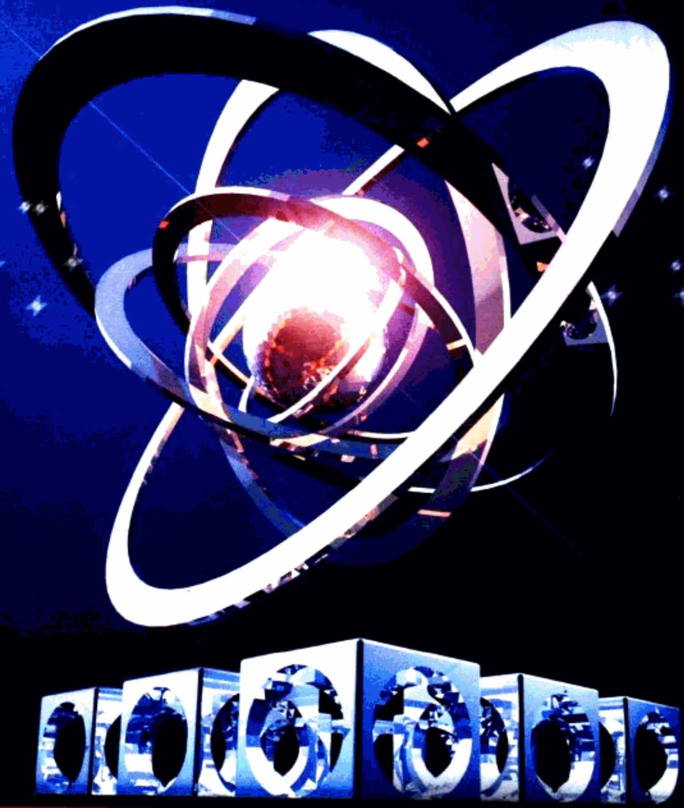
◆ 上海东方激光教育文化有限公司 组编



高中数学
知识、方法和实践

高一（下）

中国三峡出版社

● 上海东方激光教育文化有限公司 组编

高中数学知识、方法和实践

——高一（下）

《高中数学知识、方法和实践》丛书编委会

主　　编　袁建平　周宁医

（上海市建平中学）

编　　委　（按姓氏笔画排序）

何作勇　吴惠逸　周宁医　陶志诚

袁建平　谢立竿　颜国连　戴丽君

本册编者　袁建平　吴惠逸　陶志诚　颜国连

中国三峡出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学知识、方法和实践．高一
/ 上海东方激光教育文化有限公司 组编.
— 北京：中国三峡出版社，2005. 8
ISBN 7-80099-921-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 上…　Ⅲ. 数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 090339 号

中国三峡出版社出版发行
（北京市海淀区太平路 23 号院 12 号楼　100036）
电话：（010）68218553　　51933037
http://www.e-zgsx.com
E-mail: sanxiaz@sina.com

上海交大印务有限公司印制　　新华书店经销
2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米　1/16　印张：32　字数：768 千字
ISBN 7-80099-921-1　　定价：46.00 元（全二册）

前 言

参考书特别是一本好的参考书是学生学习中必不可少的。摆在同学们面前的《高中数学知识、方法和实践》，正是这样一套既贴近教与学，又非常实用的高中数学辅导丛书。

本丛书的特点及使用方法介绍如下：

1. 本丛书以每周的学习内容为一讲，每讲分三篇：【知识篇】、【方法篇】、【训练篇】，编写中体现三个原则：① 学法辅导与同步训练相结合；② 基础知识、方法与重难点内容相结合；③ 高一、高二的课本内容与高考的能力考查相结合。每章还设有【本章单元测试题】及【本章高考试题选】，书末有两个附录：参考答案及数学思想方法和解题技能技巧索引。

2. 【方法篇】是本丛书的核心内容之一，本篇分三个层次：

例题精析 以基本题型来细化本周学习的基本知识和基本方法，其所选的例题尽可能涵盖所学内容，这是每位学生都**必须学习和掌握**的内容。

重难点选讲 每周精选一到两个重难点内容以专题形式进行简要的分析、归纳和小结，这些内容往往是同学们学习中的“瓶颈”，突破了，则学习就变得轻松自如，具有“纲举目张”的作用，因此，这也是每位学生应**努力学好**的内容。

能力与发展 一些课本上涉及较少但又往往是高考能力考查的内容，我们将在这里进行简要的介绍与分析，这部分内容又分两小块：概念辨析与探究拓展，其中，概念辨析以错例的形式出现，考查学生对数学概念及方法的“错与对”的辨析能力，以及对数学概念内涵的深刻理解，这是课本上涉及很少但近几年高考频频出现的热点试题；探究拓展则精选一到两个高考热点问题进行分析和归纳。这一层次的内容虽有一定的难度，但高考却必须面对，因此，这是那些学有余力及重点中学的学生需**力争努力学习**的内容。

3. 【训练篇】是本丛书颇具特色的又一核心内容，本篇分三类：

周二基础练 精选与【方法篇】中例题精析相对应的基本内容和题型，这部分习题与教学同步，含上周三到本周二的学习内容，是学生基础达标习题，也是每位学生**必做习题**（30～45分钟）。

周四专题练 分两个专题，其中专题一为本讲【方法篇】中重难点选讲所对应的专题训练，是学生重点强化习题，为每位学生应**努力做好**的习题（30～45分钟）；专题二为本讲【方法篇】中能力与发展相对应的习题及一些能力题，题目可选作，是学有余力及重点中学的学生能力拓展习题，这部分有目的地选了最近的

一些新颖题及能力题，可选作，主要是为了学生更好地适应目前高考的能力考查，题目有一定的思维量，可放在学完本讲后或本章后再去做，应**努力完成**（30～45分钟）。

周六实战练 这是与本讲所学全部内容相对应的测试题，其难度参照重点学校的考试要求，同学们可用此来及时检验自己对本讲内容掌握的程度，希望每位学生按规定时间完成本套习题，是每位学生**都应做**的习题（90～100分钟）。

《高中数学知识、方法和实践》为各级各类高中的莘莘学子提供了一套集知识、方法及训练于一体的翔实完备的学习资料，参加编写的都是长期奋战在教学**第一线**的名师、学科带头人、高级教师等，对同学们学好数学必将大有裨益；该丛书最大特点是针对性强，按照认知规律："知道什么"、"为什么"、"还有什么"这根主线，为学生构建合理的知识平台，全面提升数学解题能力，把学生从"课课练、天天做"中解放出来，只要每周做2～3套便可达到理想效果，使数学学习变得轻松而更加有效。使用该丛书对象为各级各类中学的高一至高三的学生，对高中数学教师也具有很好的参考价值。

《高中数学知识、方法和实践》由下列书构成：

◆ 高中数学知识、方法和实践（高一上、下）

◆ 高中数学知识、方法和实践（高二上、下）

◆ 高中数学知识、方法和实践（高三）

本丛书由袁建平、周宁医主编策划。本册编者：陶志诚（第1－4讲）、颜国连（第5－7及9讲）、袁建平（第10－13讲）、吴惠逸（第8及14－16讲），由袁建平审定；这里还要特别感谢邓武江、洪萍、刘雪琴等老师及孙智峰、张继发等编辑同志为本书进行细致入微的编辑加工及审读工作。

由于本丛书立意新颖，编写难度较大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请读者不吝指正。

联系地址：Email: yuanjp518@yahoo.com.cn，zhny2005@sina.com

编　者

目 录

第五章　三 角 比

第一讲　任意角的三角比

知　识　篇

【知识要点】

1. 角的概念的推广

(1) 定义:角是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的图形.

规定:射线按逆时针方向旋转所形成的角为正角;

射线按顺时针方向旋转所形成的角为负角;

射线没有旋转(终边与始边重合)也认为形成了一个角,该角叫做零角.

(2) 象限角:顶点在原点,始边在 x 轴的正半轴,终边落在第几象限就说这个角是第几象限的角.

(3) 象间角:终边落在坐标轴上的角.

(4) 终边相同的角:与角 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360° + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

【析】 ① 终边在 x 轴的正半轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}$;

② 终边在 y 轴的负半轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360° - 90°, k \in \mathbf{Z}\}$;

③ 终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180°, k \in \mathbf{Z}\}$;

④ 终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180° + 90°, k \in \mathbf{Z}\}$;

⑤ 终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90°, k \in \mathbf{Z}\}$;

⑥ 第二象限角的集合为 $\{\alpha \mid k \cdot 360° + 90° < \alpha < k \cdot 360° + 180°, k \in \mathbf{Z}\}$.

2. 弧度制

(1) 1 弧度:长度等于半径的弧所对的圆心角的大小.

(2) 角度制与弧度制换算关系:$180° = \pi$ 弧度,$1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度,1 弧度 $= (\frac{180}{\pi})° \approx 57.3° = 57°18'$

(3) 常见特殊角的角度数与弧度数对照表:

角度数	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

【析】 用弧度制度量角,即在角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立了一一对应关系.

(4) 象限角的表示:

第一象限的角的集合:$\{\alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$;

第二象限的角的集合:$\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

第三象限的角的集合:$\{\alpha \mid 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$;

第四象限的角的集合:$\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

3. 弧长公式与扇形面积公式

若扇形圆心角的弧度数为 $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$,半径为 r,弧长为 l,面积为 S,则

(1)$l=\alpha r$;(2)$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}lr$.

4. 任意角的三角比

定义:点 $P(x,y)$ 是任意角 α 终边上的任意一点,记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

规定:$\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}$,$\cot\alpha=\frac{x}{y}$,$\sec\alpha=\frac{r}{x}$,$\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

【析】 (1) 三角比中角 α 的范围:$\sin\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$,$\cos\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$,$\tan\alpha(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$,

$\cot\alpha(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$,$\sec\alpha(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$,$\csc\alpha(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$.

(2) 三角比在各象限的符号(图 1—1):

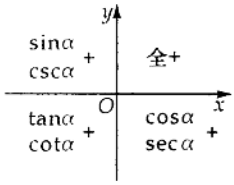


图 1—1

5. 终边相同的角的同名三角比

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,k\in\mathbf{Z}$.

$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,k\in\mathbf{Z}$.

$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha,k\in\mathbf{Z}$.

$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha,k\in\mathbf{Z}$.

【析】 这组公式可将任意角的三角比化为$[0,2\pi)$内的角的三角比.

【学习目标】

1. 理解任意角和象限角的概念,会表示与角 α 终边相同的所有角的集合,会表示某象限角的全体.
2. 理解角的弧度制,会进行角度制与弧度制的换算.
3. 知道利用扇形的圆心角的弧度制和半径求出扇形的弧长和面积.
4. 掌握任意角的三角比的定义,会根据角 α 的终边上的一点的坐标求出角 α 的六个三角比,会利用任意角的三角比的定义进行三角比的求值、化简和证明.
5. 知道任意角 α 的六个三角比在各个象限内的符号,能确定某个角的三角比的符号.
6. 借助计算器能求出已知角的三角比.

方 法 篇

【例题精析】

1. 角的概念问题

【例 1】 判别下列各角分别是第几象限角：(1)$2345°$；(2)$-1650°$；(3)$\frac{41}{4}\pi$；(4)$-\frac{25}{6}\pi$.

【解题策略】 先将任意角化为 $k \cdot 360° + \alpha(0° \leqslant \alpha < 360°, k \in \mathbf{Z})$ 或 $2k\pi + \alpha(0 \leqslant \alpha < 2\pi, k \in \mathbf{Z})$ 的形式，再判别角 α 所在象限.

【解】 (1)$\because 2345° = 6 \times 360° + 185°$ $\therefore 2345°$ 是第三象限角.

(2)$\because -1650° = -5 \times 360° + 150°$ $\therefore -1650°$ 是第二象限角.

(3)$\because \frac{41}{4}\pi = 10\pi + \frac{\pi}{4}$ $\therefore \frac{41}{4}\pi$ 是第一象限角.

(4)$\because -\frac{25}{6}\pi = -6\pi + \frac{11}{6}\pi$ $\therefore -\frac{25}{6}\pi$ 是第四象限角.

【点评】 将任意角化为 $2k\pi + \alpha$ 形式，α 可以是 $[0, 2\pi)$，也可以是 $(-\pi, \pi]$，如 $-\frac{25}{6}\pi = -4\pi - \frac{\pi}{6}$.

【例 2】 设 α 是第一象限的角，试讨论 $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限的角？

【解题策略】 先表示第一象限角的范围，再求出 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围.

【解】 $\because \alpha$ 是第一象限的角 $\therefore 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \therefore k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$

(1) 当 k 为偶数时，令 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$，则 $2n\pi < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}$，$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角

(2) 当 k 为奇数时，令 $k = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}$，则 $2n\pi + \pi < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{5\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}$，$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角

由(1)、(2) 知，当 α 是第一象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限或第三象限的角.

【点评】 按同样的方法，当 α 是第二、第三、第四象限的角时，可推知 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限，可用图 1—2 简记如下：

说明：标有 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 的区域，分别是当 α 是第一、第二、第三、第四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 所在区域.

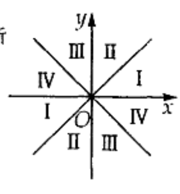


图 1—2

2. 角度与弧度的互化问题

【例 3】 (1) 将 $1000°$ 换算成弧度；(2) 将 -3 换算成度(精确到 0.01 度).

【解题策略】 利用"$1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度"与"1 弧度 $= (\frac{180}{\pi})°$"进行互化.

【解】 (1)$1000° = 1000 \times \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= \frac{50\pi}{9}$ 弧度

(2)$-3 = -3 \times (\frac{180}{\pi})° \approx -171.89°$

【点评】 用弧度制表示角时，通常可省略"弧度"两字.

3. 弧长与扇形面积公式的应用问题

【例 4】 已知一个扇形的周长为定值 a，求其面积的最大值，并求此时圆心角 α 的大小.

【解题策略】 根据扇形面积公式，应建立扇形面积关于其半径的目标函数.

【解】 设扇形的半径为 r，则弧长为 $a - 2r(0 < r < \frac{1}{2}a)$，

$\therefore$ 扇形面积 $S=\frac{1}{2}(a-2r)r=-r^2+\frac{1}{2}ar=-(r-\frac{1}{4}a)^2+\frac{1}{16}a^2$.

$\therefore$ 当 $r=\frac{1}{4}a$ 时，$S_{\max}=\frac{1}{16}a^2$，此时 $\alpha=\frac{a-2r}{r}=\frac{a-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{4}a}=2$.

【点评】 本例还可利用基本不等式来求最大值：$S=\frac{1}{4}(a-2r)2r\leqslant\frac{1}{4}(\frac{a-2r+2r}{2})^2=\frac{1}{16}a^2$；也可建立 S 关于圆心角 α 的函数关系：$S=\frac{a^2\alpha}{2(\alpha+2)^2}$.

4. 三角比的求值问题

【例 5】 已知角 α 的终边经过点 $P(3a,-4a)(a<0)$，求角 α 的六个三角比的值.

【解题策略】 根据三角比的定义求三角比的值.

【解】 $\because x=3a,y=-4a$，且 $a<0$，$\therefore r=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|=-5a$

$\therefore \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-4a}{-5a}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3a}{-5a}=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-4a}{3a}=-\frac{4}{3}$，

$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{3a}{-4a}=-\frac{3}{4}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{-5a}{3a}=-\frac{5}{3}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{-5a}{-4a}=\frac{5}{4}$.

【点评】 点 P 在第二象限，因此角 α 是第二象限角，若将 $a<0$ 改为 $a\neq0$，则应注意角 α 是第二象限角或第四象限角，有的三角比的值会有两解.

【例 6】 求角 $-\frac{87}{4}\pi$ 的正弦、余弦和正切的值.

【解题策略】 化负角为正角.

【解】 $-\frac{87}{4}\pi=-22\pi+\frac{\pi}{4}$.

$\sin(-\frac{87}{4}\pi)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos(-\frac{87}{4}\pi)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan(-\frac{87}{4}\pi)=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

【点评】 对于绝对值较大的角的三角比求值，可以利用“终边相同的角的同名三角比相等”进行转化.

【重难点选讲】受条件限制的角及其讨论

要对受条件限制的角进行研究，先应将其用终边相同的角的形式表示出来.

【例 7】 写出终边位于图 1—3 和图 1—4 中阴影部分（包括边界）内的角的集合：

(1)

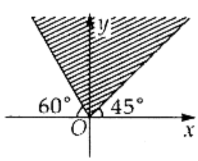


图 1—3

(2)

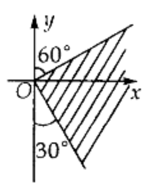


图 1—4

【解题策略】 先在 $(-\pi,\pi]$ 内表示终边位于阴影部分内的角的集合：(1) $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$；(2) $-\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}$；再用终边相同的角的形式来表示符合条件的角的集合.

【解】 (1) $\{\alpha\mid 2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$；(2) $\{\alpha\mid 2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$.

【点评】 以上集合也可以用角度制来表示. 又第(2)小题若表示成 $\{\alpha\mid 2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$，则为终边位于非阴影部分（包括边界）内的角的集合.

【例 8】 设 α 是第三象限的角，分别说明下列角所在的象限：

(1) $\pi+\alpha$；(2) $-\frac{\pi}{2}-\alpha$；(3) 2α；(4) $\frac{\alpha}{3}$.

【解题策略】 先将 α 表示为第三象限的角的集合，然后求 $\pi+\alpha$，$-\frac{\pi}{2}-\alpha$，2α，$\frac{\alpha}{3}$ 的范围.

【解】 $\because \alpha$ 是第三象限角，$\therefore 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$，

(1) $2k\pi+2\pi<\pi+\alpha<2k\pi+\frac{5\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ $\therefore \pi+\alpha$ 是第一象限的角；

(2) $\because -2k\pi-\frac{3\pi}{2}<-\alpha<-2k\pi-\pi, k\in \mathbf{Z}$，$\therefore -2k\pi-2\pi<-\frac{\pi}{2}-\alpha<-2k\pi-\frac{3\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$.

$\therefore -\frac{\pi}{2}-\alpha$ 是第一象限角；

(3) $\because 4k\pi+2\pi<2\alpha<4k\pi+3\pi, k\in \mathbf{Z}$，$\therefore 2\alpha$ 是第一、第二象限的角或终边在 y 轴的正半轴上；

(4) $\because \frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$，

若 $k=3n, n\in \mathbf{Z}$，则 $2n\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in \mathbf{Z}$，$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角；

若 $k=3n+1, n\in \mathbf{Z}$，则 $2n\pi+\pi<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{7}{6}\pi, n\in \mathbf{Z}$，

$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 是第三象限的角；

若 $k=3n+2, n\in \mathbf{Z}$，则 $2n\pi+\frac{5}{3}\pi<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{11}{6}\pi, n\in \mathbf{Z}$，

$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 是第四象限的角，

故 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限或第三象限或第四象限的角.

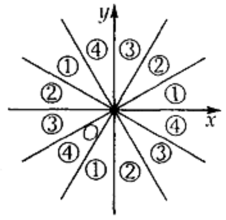


图 1—5

【点评】 如图 1—5 所示，标有 ①、②、③、④ 的区域，分别是当 α 是第一、第二、第三、第四象限的角时，$\frac{\alpha}{3}$ 所在的区域.

【能力与发展】

1. 概念辨析

【例 9】 学生小明解下列问题：已知角 θ 的终边与 $\frac{\pi}{2}$ 的终边相同，求在 $[0,2\pi)$ 内，与 $\frac{\theta}{3}$ 终边相同的角.

解答如下：$\because$ 在 $[0,2\pi)$ 内，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\theta}{3}=\frac{\pi}{6}$，即与 $\frac{\theta}{3}$ 终边相同的角是 $\frac{\pi}{6}$.

请判断上述解答是否正确？若不正确，请予以指正.

【辨析与解】 小明的解答是错误的，主要错误是没有将角 θ 写成与 $\frac{\pi}{2}$ 的终边相同的角.

正确解法如下：$\because \theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$，$\therefore \frac{\theta}{3}=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$，要使 $\frac{\theta}{3}$ 在 $[0,2\pi)$ 内，取 $k=0,1,2$，则分别有 $\frac{\theta}{3}=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$.

2. 探究拓展：用单位圆中的有向线段表示三角比

如图 1—6，A、B 分别是单位圆与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴的交点，任意角 α 的终边与单位圆交于点 P，作 PM 垂直于 x 轴于 M，过点 A 作圆 O 的切线交角 α 的终边或其反向延长线于 T，过点 B 作圆 O 的切线交角 α 的终边或其反向延长线于 S.

有向线段 $MP=\sin\alpha$，$OM=\cos\alpha$，$AT=\tan\alpha$，$BS=\cot\alpha$（若与 x 轴正向或 y 轴正向一致，则为正，否则

为负)，我们称有向线段 MP、OM、AT、BS 分别为正弦线、余弦线、正切线、余切线，其数量分别表示 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 的值.

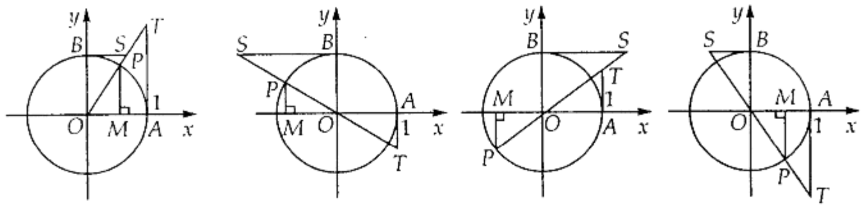


图 1－6

通过以上有向线段数量的取值范围可以确定对应角的三角比的取值范围.

【例 10】 已知集合 $A=\{\alpha \mid 2\sin\alpha-1\geqslant 0\}$，$B=\{\alpha \mid \sqrt{2}\cos\alpha+1\geqslant 0\}$，

求：(1)A、B；(2)$A\cap B$.

【解题策略】 $A=\{\alpha \mid \sin\alpha\geqslant\frac{1}{2}\}$，表明角 α 的范围是使正弦线 MP 满足 $\frac{1}{2}\leqslant MP\leqslant 1$，过点 $(0,\frac{1}{2})$ 作 y 轴的垂线交单位圆于 E、F，则角 α 的终边落在扇形 $OEBF$ 区域内(包括边界 OE、OF). 又 $B=\{\alpha \mid \cos\alpha\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$，同样，过点 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 作 x 轴的垂线交单位圆于 G、H，则角 α 的终边落在扇形 $OHAG$ 区域内(包括边界 OG、OH). 因此两扇形的重叠部分即为所求 α 的区域(如图 1—7).

【解】 由单位圆中的正弦线与余弦线知，

(1) $A=\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$

$B=\{\alpha \mid 2k\pi-\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) $A\cap B=\{\alpha \mid \sin\alpha\geqslant\frac{1}{2}\}\cap\{\alpha \mid \cos\alpha\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

$=\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

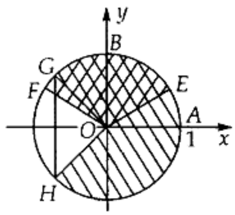


图 1－7

【点评】 将三角比用单位圆中的有向线段来表示，可以直观地由图求出三角比的取值范围.

【例 11】 解不等式组 $\begin{cases}\sin\alpha\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \mathrm{tg}\alpha\geqslant 1\end{cases}$.

【解题策略】 利用单位圆.

【解】 在单位圆中作 OE、OF，使 $\angle AOE=\frac{4\pi}{3}$　$\angle AOF=\frac{5\pi}{3}$　(如图 1－8)

则满足 $\sin\alpha\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 α 终边落在扇形区域 $OFBE$ 内　①

又在单位圆中作 OG、OH，使 $\angle AOG=\frac{\pi}{4}$　$\angle AOH=\frac{5\pi}{4}$　(如图 1－8)

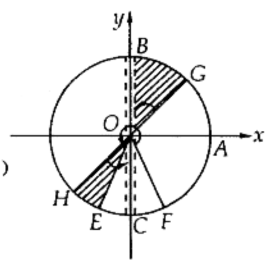


图 1－8

则满足 $\mathrm{tg}\alpha\geqslant 1$ 的角 α 终边落在两个扇形区域 OGB 和 OHC 内　②

画出 ①② 的公共区域，为扇形区域 OGB 和 OHE

$\therefore$ 原不等式组的解为：$2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$

【点评】 单位圆是解三角不等式的一个重要工具. 又本题中正切函数的周期为 π，正弦函数的周期为 2π，从而应在 $[0,2\pi]$ 上找满足不等式的角.

训　练　篇

周二基础练——任意角及其度量

一、选择题

1. 下列命题中，正确的是　　(　　)

A. 终边相同的角是相等的角

B. 终边在第二象限的角是钝角

C. 若角 α 的终边在第一象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边一定也在第一象限

D. 锐角是第一象限角

2. 终边在 x 轴的正半轴和 y 轴的负半轴的夹角平分线上的角 α 的集合是　　(　　)

A. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi - \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

3. 经过 12 分钟，时钟的分针所转过的是　　(　　)

A. $72°$　　B. $-72°$　　C. $75°$　　D. $-75°$

4. 若圆的一段弧长等于该圆的内接正三角形的边长，则这弧所对的圆心角的弧度数是　　(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 设 $A=\{\theta \mid \theta$ 为锐角$\}$，$B=\{\theta \mid \theta$ 为第一象限的角$\}$，$C=\{\theta \mid \theta$ 为小于 $90°$ 的角$\}$，$D=\{\theta \mid \theta$ 为小于 $90°$ 的正角$\}$，则　　(　　)

A. $A=B$　　B. $B=C$　　C. $A=C$　　D. $D=A$

6. 在直角坐标系中，若 α 与 β 终边互相垂直，则 α 与 β 的关系为　　(　　)

A. $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$　　B. $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$

C. $\beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha, k \in \mathbf{Z}$　　D. $\beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} + \alpha, k \in \mathbf{Z}$

二、填空题

7. 与 $-\frac{95}{4}\pi$ 角的终边相同的最小正角是________.

8. 若两角之差是 $30°$，两角之和是 π 弧度，则这两个角中弧度数大的一个角是________.

9. 若半径为 r 的圆的弦 AB 的长度等于$\sqrt{2}r$，则弦 AB 所对的劣弧长等于________.

10. 若集合 $A=\{x \mid x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$，则集合 A 与集合 B 的关系是________.

11. 设角 α 的终边与$\frac{2\pi}{3}$ 的终边关于 y 轴对称，且 $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$，则 $\alpha =$ ________.

12. 与 $-\frac{35\pi}{3}$ 角的终边相同的角可以表示为：①$2k\pi - \frac{5}{3}\pi, k \in \mathbf{Z}$；②$-2k\pi + \frac{5}{3}\pi, k \in \mathbf{Z}$；③$-2k\pi + \frac{1}{3}\pi, k \in \mathbf{Z}$；④$2k\pi - \frac{1}{3}\pi, k \in \mathbf{Z}$.

其中正确的是________.（请填写所有正确答案的序号）