中等职业技术学校教材

数学

ZHONGDENG ZHIYE JISHU XUEXIAO JIAOCAI

江西省技工学校教学研究室 编

江西科学技术出版社

中等职业技术学校教材

数学

SHUXUE

江西省技工学校教学研究室　编

江西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

中等职业技术学校教材·数学/李路等编著.—南昌:江西科学技术出版社,2005.6
ISBN 7-5390-2687-1
Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.①数学—技工学校—教材②数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.01
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 051768 号

国际互联网(Internet)地址:
HTTP://WWW.NCU.EDU.CN:800/
赣科版图书代码:05126-103
选题序号:KX2005043

中等职业技术学校教材·数学 李路等编著

出版发行 江西科学技术出版社
社址 南昌市蓼洲街2号附1号
邮编:330009 电话:(0791)6623341 6610326(传真)
印刷 江西科佳图书印装有限责任公司
经销 各地新华书店
开本 787mm×1092mm 1/16
字数 220千字
印张 9.5
印数 17001-27000册
版次 2005年6月第1版 2006年5月第3次印刷
书号 ISBN 7-5390-2687-1/O·12
定价 17.00元

江西省技工教材编审委员会

前　言

根据江西省技工学校课程设置及生源特点，江西省技工学校教学研究室组织编写了这本《数学》教材。在编写过程中，作者充分吸收了技校教育的教学经验，在一些内容组织和阐述上均作了新的尝试，目的是提高学生学习数学的兴趣，培养学生科学的思维方式，为学习专业理论和掌握操作技能打下扎实的基础。针对目前技校学生的特点，对较深、较难、专业上用的较少的内容进行了删减，同时补增了与初中课程相衔接的内容。

本教材包括预备知识、集合与函数、三角函数、平面解析几何、空间图形及其计算、复数等内容，书中章节顺序或内容各学校可根据情况调整。本书供技工学校各专业数学课程使用，也可作为高职学生、职工培训的教材和自学用书。

本书编写组组长：李路。编写组成员：夏三明（编写预备知识和第一章）、高浪静（编写第二章）、李路（编写第三章）、黄春风（编写第四章和第五章）。

在编写过程中，得到了核工业南昌技工学校、江西凤凰高级技工学校、江西省轻工业技工学校、江西机械电子技工学校的大力支持和协助，在此一并致谢。

由于时间仓促及编者水平有限，书中难免存在不足之处，希望各校在使用本教材时多提宝贵意见和建议，以便修订完善。

江西省技工学校教学研究室

2005 年 3 月

目 录

预备知识

1. **实数的分类**

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{无限不循环小数}\end{cases}
$$

2. **算术根**

(1)正数 a 的正 n 次方根称为 a 的 n 次算术根,零的算术根为0.

(2)实数的三个非负性为 $|a|\geqslant 0$、$a^2\geqslant 0$、$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$.

(3) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$

3. **数轴**

(1)数轴的三要素:原点、正方向和单位长度;

(2)数轴上的点与实数一一对应.

4. **两数平方差公式:** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

两数和平方公式: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

两数差平方公式: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

5. **方程**

(1)一元一次方程 $ax=b$ 的解:

①当 $a\neq 0$ 时,有惟一解:$x=\dfrac{b}{a}$.

②当 $a=0,b=0$ 时,有无数个解.

③当 $a=0,b\neq 0$ 时,此方程无解.

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$:

①求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

②根的三种情况:

(a)当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;

(b)当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,方程有两个相等的实数根;

(c)当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,方程没有实数根.

③根与系数的关系:如果 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 x_1,x_2,那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,

$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

6. **不等式**

(1)一元一次不等式的性质：

①不等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，不等号的方向不变.

②不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数，不等号的方向不变.

③不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数，不等号方向改变.

(2)一元一次不等式 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0(a\neq0)$ 的解法：

①解一元一次不等式和解一元一次方程类似，不同点是：一元一次不等式的两边同乘以(或除以)同一个负数时，不等号方向必须改变. 这是解不等式时最容易出错的地方，应该特别注意.

②解一元一次不等式的步骤：去分母、去括号、移项、合并同类项和化系数为1.

(3)一元一次不等式组的概念：含有相同未知数的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组.

(4)解一元一次不等式组的步骤：

①求出这个不等式组中各个不等式的解集；

②找出这些不等式解集的公共部分，即求出这个不等式组的解集，如果这个不等式的解没有公共部分，那么这个不等式组无解(也称为空集). 一般我们利用数轴表示不等式解集，这样有直观明了的功效.

7. **一次函数**

(1)定义：$y=kx+b$(k,b 为常数，$k\neq0$)，y 称为 x 的一次函数. 当 $b=0$ 时，$y=kx+b$ 变成 $y=kx(k\neq0)$，这时 y 称为 x 的正比例函数.

(2)一次函数的图像：正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图像是经过原点(0,0)和点$(1,k)$的一条直线. 当 $k>0$ 时，图像经过第一、三象限；当 $k<0$ 时，图像经过第二、四象限.

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是过点$(0,b)$且平行于直线 $y=kx(k\neq0)$ 的一条直线. 当 $k>0$ 时直线向上，当 $k<0$ 时直线向下，b 是直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 与 y 轴交点的纵坐标.

(3)一次函数的性质：正比例函数与一次函数的性质相同. 当 $k>0$ 时，y 随着自变量 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随着自变量 x 的增大而减小.

8. **反比例函数**

(1)定义：$y=\frac{k}{x}$(k 为常数，且 $k\neq0$)，y 称为 x 的反比例函数. 其自变量 x 的取值范围是 $x\neq0$.

(2)反比例函数的图像：反比例函数的图像是双曲线. 当 $k>0$ 时，图像两分支分别在第一、三象限；当 $k<0$ 时，图像两分支分别在第二、四象限.

(3)反比例函数的性质：当 $k>0$ 时，在每个象限内，y 随着自变量 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，在每个象限内，y 随着自变量 x 的增大而增大.

9. **角**

(1)角的定义、度量、分类及其相关性质：

①角的定义：有公共端点的两条射线组成的图形称为角. 这个公共端点称为角的顶点，

这两条射线称为角的边．角可以看成是一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形．

②角的度量：$1° = 60'$，$1' = 60''$．

③角的分类：锐角、直角、钝角、平角、周角．

④角的相关性质：互余、互补、邻补、对顶．

(2)特殊角的三角函数值：见下表．

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

10. **几个重要公式**

(1)三角形的面积公式：$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$.

(2)圆周长公式：$C = 2\pi R$；弧长公式：$L = \frac{n\pi R}{180}$(其中 R 为半径，n 为圆心角的度数).

(3)半径为 R 的圆面积公式：$S = \pi R^2$.

(4)半径为 R、圆心角为 $n°$的扇形面积公式：$S_{扇形} = \frac{n\pi R^2}{360}$.

第一章　集合与函数

§1.1　集合的概念

一、集合的意义

引例　我们先考察下列几组对象：(1)我们学校的全体学生；(2)某个工厂所有的机床；(3)2,4,6,8；(4)所有的等腰三角形；(5)直线 $y=2x+1$ 上所有的点．

它们分别是由一些人、物、数、图形和点组成的整体，且每个整体中的对象都具有某种共同属性．

一般地，具有某种共同属性的不同对象的全体称为**集合**(简称**集**)．集合里的各个不同对象称为这个集合的**元素**．例如(3)是由 2,4,6,8 这四个数组成的集合，其中的对象 2,4,6,8 都是这个集合的元素，这些元素的共同属性是“小于 10 的正偶数”．

尽管集合中的元素可以是各种各样具体的或抽象的事物，但我们在本章中主要研究数的集合(简称**数集**)和点的集合(简称**点集**)．

通常，集合用大写拉丁字母表示，元素用小写拉丁字母表示．下面是一些常用的数集及其记法：

全体非负整数的集合简称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

自然数集内除 0 的集合称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数的集合简称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数的集合简称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数的集合简称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

一般地，若 x 是集合 A 的元素，则称 x **属于** A，记作 $x\in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则称 x **不属于** A，记作 $x\notin A$ 或 $x\,\bar{\in}\,A$. 例如，$2\in\mathbf{N}$，$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$.

含有无限多个元素的集合称为**无限集**．如上面引例中的(4)、(5)都是无限集．含有有限个元素的集合称为**有限集**．如上面引例中的(1)、(2)、(3)都是有限集．特别是只含一个元素的集合称为**单元素集**．如方程 $x-5=0$ 的解组成的集合(简称**解集**)就是一个单元素集．不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 如方程 $x^2+1=0$ 在实数集 R 内的解集就是空集$\varnothing$.

集合中的元素必须是确定的．这就是说，给定一个集合，任何一个对象是或不是这个集

合的元素也就确定了．如给出小于10的正偶数集，它只有2、4、6、8这四个元素，其他对象都不是它的元素．

集合中的元素又是互异的．这就是说，集合中的元素不能重复出现，任何两个相同的对象归入同一个集合时，都只能算作这个集合的一个元素．

二、集合的表示法

集合一般有以下两种表示法：列举法和描述法．

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，彼此用逗号分开，这种表示集合的方法称为**列举法**．

例1 绝对值小于3的整数组成的集合，可以表示为：

$$\{-2,-1,0,1,2\}.$$

注1 由 a 这一个元素组成的集合记作 $\{a\}$，它与 a 是不同的；a 表示一个元素，$\{a\}$ 表示一个集合——单元素集．

注2 用列举法表示集合时，可以不考虑元素的排列顺序．如例1中的集合，也可以表示为 $\{0,1,-1,2,-2\}$ 等．

一般来说，列举法多用于表示元素个数较少的集合．当元素的个数很多或无限多时，可以在列举出有代表性的元素后，用省略号表示那些被省略的元素．

例2 不超过100的自然数组成的集合，可以表示为：

$$\{0,1,2,3,\cdots,99,100\}.$$

2. 描述法

把集合中元素的共同属性描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法称为**描述法**．

例3 不等式 $x+1>3$ 的解集，可以表示为：

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x+1>3\}.$$

注 我们约定，如果从上下文看，$x\in\mathbf{R}$ 是明确的，那么，在描述集合时，$x\in\mathbf{R}$ 可以省略不写．如例3中的集合也可以表示为 $\{x\mid x+1>3\}$．

例4 直线 $y=2x+1$ 上所有点的坐标组成的集合（也称为点集），可以表示为：

$$\{(x,y)\mid y=2x+1\}.$$

描述法的另一种表达形式是把集合中元素的共同属性直接写在大括号内．如所有等腰三角形的集合，可以表示为：

{等腰三角形}．

有时，为了形象地表示集合，我们还可以画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合．如图1－1表示任意一个不是空集（简称**非空集**）的集合 A．

三、集合与集合的关系

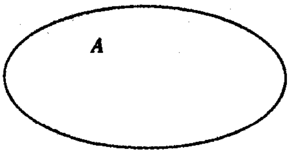

图1－1

1. 集合的包含关系

定义 设 A、B 是两个集合．若 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作 A 包含于 B（或 B 包含 A）．

对于任何一个集合 A，由于它的任何一个元素都属于 A 本身，所以 $A \subseteq A$，即**任何一个集合都是它本身的子集**.

当 A 不是 B 的子集（即至少有一个元素 $x \in A$，但 $x \notin B$）时，记作 $A \not\subseteq B$（或 $B \not\supseteq A$）.

注：符号 $\in$ 与 $\subseteq$ 不同：$\in$ 用于表示元素与集合之间的关系，$\subseteq$ 用于表示集合与集合之间的关系.

定义　设 A、B 是两个集合．若 A 是 B 的子集，且至少有一个元素 $x \in B$ 但 $x \notin A$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$（或 $B \supsetneqq A$），读作 A 真包含于 B（或 B 真包含 A）.

当 A 是 B 的真子集时，可用图 1－2 表示.

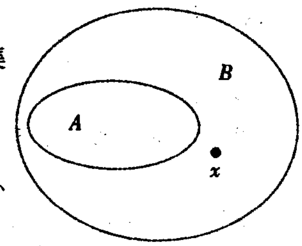

图 1－2

我们规定，**空集是任何集合的子集**．显然，空集是任何非空集的真子集.

例 5　写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是真子集.

解：$\{a,b\}$ 的所有子集为：$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{a,b\}$．其中，$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$ 是 $\{a,b\}$ 的真子集.

2. 集合的相等关系

定义　设 A、B 是两个集合．若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称这两个**集合相等**，记作 $A = B$，读作 A 等于 B.

由集合相等的定义知，两个集合相等时，它们是由完全相同的元素组成的.

例如，设 $A = \{2,3\}$，$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，则 $A = B$.

习题 1.1

1. 用列举法表示下列各集合：

(1) 绝对值不超过 3 的整数组成的集合；

(2) 14 的正约数集；

(3) 小于 50 的自然数组成的集合；

(4) 不超过 100 的整数组成的集合；

(5) 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的解集；

(6) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -10 \leqslant x \leqslant 10\}$；

(7) $\{k \in \mathbf{Z} \mid x = 2k + 1\}$；

(8) $\{k \in \mathbf{Z} \mid x = 2k\}$；

(9) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 8 = 0\}$；

(10) $\{(x,y) \mid x + y = 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

2. 设 $A = \{a,b,c\}$，$B = \{a,b,c,d,e,f\}$，用适当符号（$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\not\subseteq$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$）填空：

(1) a ______ A；　(2) b ______ $\{b\}$；　(3) d ______ A；

(4) a ______ $\{b\}$；　(5) $\{b,c,a\}$ ______ A；　(6) 0 ______ A；

(7) $\{0\}$ ______ B；　(8) $\varnothing$ ______ B；　(9) A ______ B；

(10) 0 ______ $\{0\}$；　(11) 0 ______ $\varnothing$；　(12) $\varnothing$ ______ A.

3. 回答下列问题：

(1)所有胖人能不能构成一个集合？为什么？
(2)到一个定点的距离等于定长的点集是什么？
(3)到一条线段两个端点的距离相等的点集是什么？
(4)空集$\varnothing$有多少个子集？有没有真子集？
(5)空集$\varnothing$与单元素集$\{0\}$的区别是什么？

4. 设$A=\{0,1,2,3\}$，写出A的所有子集和真子集．

§1.2　交集与并集

一、交集

引例　已知6的正约数集$A=\{1,2,3,6\}$，8的正约数集$B=\{1,2,4,8\}$，于是6与8的正公约数集是$\{1,2\}$.

容易看出，$\{1,2\}$是由A、B的所有公共元素组成的集合．

定义　设A、B是两个集合．由所有既属于A又属于B的元素组成的集合，称为A与B的**交集**（简称交），记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$，读作A交B.

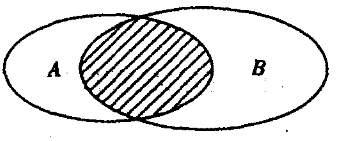

图1－3

图1－3中的阴影部分表示A与B的交集$A\cap B$.

若$A\cap B\neq\varnothing$，则称A与B**相交**；若$A\cap B=\varnothing$，则称A与B**不相交**．

由交的定义易得，对于任何集合A与B，有：

$$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap B=B\cap A.$$

例1　设$A=\{12$的正约数$\}$，$B=\{18$的正约数$\}$，用列举法写出12与18的正公约数集．

解：因为　$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，

$B=\{1,2,3,6,9,18\}$，

由交的定义知，12与18的正公约数集是

$$A\cap B=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{1,2,3,6,9,18\}=\{1,2,3,6\}.$$

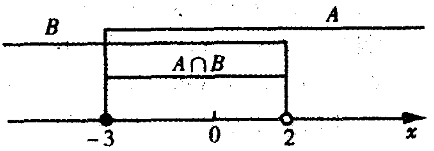

图1－4

例2　设$A=\{x|x\geqslant -3\}$，$B=\{x|x<2\}$，求$A\cap B$.

解：$A\cap B=\{x|x\geqslant -3\}\cap\{x|x<2\}=\{x|-3\leqslant x<2\}$.

其几何意义如图1－4所示．

例3　设$A=\{(x,y)|y=-4x+6\}$，$B=\{(x,y)|y=5x-3\}$，求$A\cap B$.

解：$A\cap B=\{(x,y)|y=-4x+6\}\cap\{(x,y)|y=5x-3\}$

$$=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=-4x+6,\\ y=5x-3.\end{cases}\right\}=\{(1,2)\}.$$

这是一个单元素集，其几何意义如图 1－5 所示，是两条直线的交点．

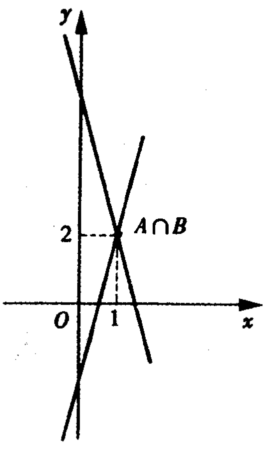

图 1－5

二、并集

引例 已知方程 $x^2-1=0$ 的解集 $A=\{1,-1\}$，方程 $x^2-4=0$ 的解集 $B=\{2,-2\}$，于是方程 $(x^2-1)(x^2-4)=0$ 的解集是 $\{1,-1,2,-2\}$．容易看出，该集合是由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合．

定义 设 A、B 是两个集合．由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，读作 A 并 B.

图 1－6 中的阴影部分表示 A 与 B 的并集 $A\cup B$，其中包括 A 与 B 相交和不相交两种情形．

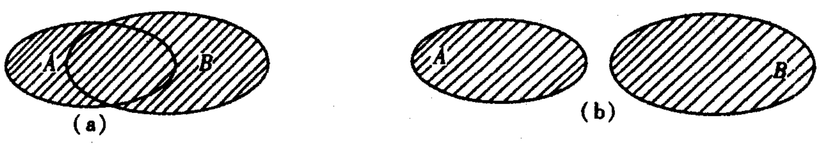

图 1－6

由并的定义易得，对于任何集合 A 与 B，有：

$$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup B=B\cup A.$$

例 4 设 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2\}\cup\{1,2,3\}=\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

注： 因为集合中的元素必须是互异的，所以在两个集合的并集中，原来两个集合的公共元素只能出现一次．因此，不要把例 4 中的 $A\cup B$ 写成 $\{-2,-1,0,1,1,2,2,3\}$.

例 5 设 $A=\{x \mid -2<x<3\}$，$B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{x \mid -2<x<3\}\cup\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}=\{x \mid -2<x\leqslant 5\}$.

其几何意义如图 1－7 所示．

例 6 设 $A=\{x \mid x\leqslant -3\}$，$B=\{x \mid x>2\}$，求 $A\cup B$、$A\cap B$.

解： $A\cup B=\{x \mid x\leqslant -3\}\cup\{x \mid x>2\}=\{x \mid x\leqslant -3$ 或 $x>2\}$.

其几何意义如图 1－8 所示；

$A\cap B=\{x \mid x\leqslant -3\}\cap\{x \mid x>2\}=\varnothing$.

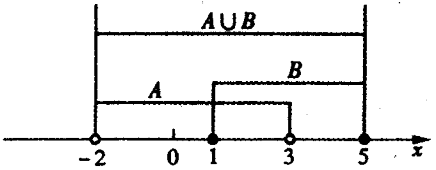

图 1－7

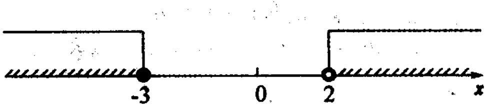

图 1－8

习题 1.2

1. 填空题：

(1)若 $A=\{$数学,语文,电工学$\}$,$B=\{$数学,语文,车工工艺学$\}$,则 $A\cap B=$ ________,$A\cup B=$ ________.

(2)若 $A=\{12$ 的正约数$\}$,$B=\{15$ 的正约数$\}$,则 $A\cap B=$ ________,$A\cup B=$ ________.

(3)若 $A=\{x\mid x\geqslant 4\}$,$B=\{x\mid x>5\}$,则 $A\cap B=$ ________,$A\cup B=$ ________.

2. 设 $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{4,3,2,1,0,-1,-2\}$,$C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,5\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$、$A\cup C$、$B\cap C$.

3. 设 $A=\{x\mid x+2=2\}$,$B=\{x\mid x^2-2x=0\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$.

4. 设 $A=\{x\mid -2<x<4\}$,$B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$.

5. 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+y=3\}$,$B=\{(x,y)\mid 2x-y=1\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$.

6. 设 A 为奇数集,B 为偶数集,$\mathbf{Z}$ 为整数集,求 $A\cap\mathbf{Z}$、$A\cap B$、$B\cap\mathbf{Z}$、$A\cup B$、$A\cup\mathbf{Z}$、$B\cup\mathbf{Z}$.

7. 设 $A=\{$等腰三角形$\}$,$B=\{$直角三角形$\}$,求 $A\cap B$.

8. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$,$B=\{$钝角三角形$\}$,求 $A\cup B$.

§1.3 简单不等式与区间

一、绝对值不等式的解法

绝对值符号里面含有未知数的不等式,称为**绝对值不等式**. 由实数的绝对值的定义

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

知,绝对值不等式的解法可以归结为下述两种基本类型:

设 $a\in\mathbf{R}$,$a>0$,则

(1) $|x|\leqslant a$ 的解为 $-a\leqslant x\leqslant a$;

(2) $|x|\geqslant a$ 的解为 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.

证明:(1)当 $|x|\leqslant a$ 时,由绝对值的定义知,它可化为下述两个不等式组:

$$(\text{i})\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\leqslant a;\end{cases}\text{或}(\text{ii})\begin{cases}x<0,\\ -x\leqslant a.\end{cases}$$

因为(i)的解为 $0\leqslant x\leqslant a$,(ii)的解为 $-a\leqslant x<0$,

所以 $|x|\leqslant a$ 的解集应为(i)与(ii)解集的并集,即

$$\{x \mid -a \leqslant x \leqslant a\}.$$

它在数轴上的表示如图 1－9 所示．

(2)当 $|x| \geqslant a$ 时，由绝对值的定义知，它可化为下述两个不等式组：

$$(\mathrm{i})\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant a; \end{cases} 或 (\mathrm{ii})\begin{cases} x < 0, \\ -x \geqslant a. \end{cases}$$

因为(i)的解为 $x \geqslant a$，(ii)的解为 $x \leqslant -a$，

所以 $|x| \geqslant a$ 的解集应为(i)与(ii)解集的并集，即

$$\{x \mid x \geqslant a \text{ 或 } x \leqslant -a\}.$$

它在数轴上的表示如图 1－10 所示．

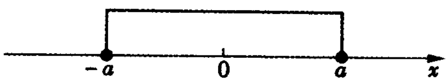

图 1－9

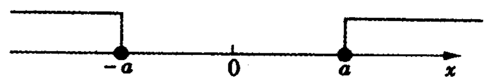

图 1－10

例 1　解不等式 $|3x-5| \leqslant 7$.

解：由 $|3x-5| \leqslant 7$，得

$$-7 \leqslant 3x-5 \leqslant 7.$$

不等式各边都加 5，得

$$-2 \leqslant 3x \leqslant 12,$$

不等式各边都除以 3，得

$$-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4,$$

所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$.

例 2　解不等式 $|2x-3| \geqslant 4$.

解：由 $|2x-3| \geqslant 4$，得

$$2x-3 \geqslant 4 \text{ 或 } 2x-3 \leqslant -4.$$

分别解之，得

$$x \geqslant \frac{7}{2} \text{ 或 } x \leqslant -\frac{1}{2}.$$

所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geqslant \frac{7}{2} \text{ 或 } x \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

二、一元二次不等式的解法

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为**一元二次不等式**．一元二次不等式的一般形式为

$$ax^2+bx+c>0(a \neq 0),$$

或

$$ax^2+bx+c<0(a \neq 0).$$

如果一元二次不等式一般形式中的二次三项式

$$ax^2+bx+c(a \neq 0)$$

能分解因式，那么解一元二次不等式就可以转化为解两个一元一次不等式组．