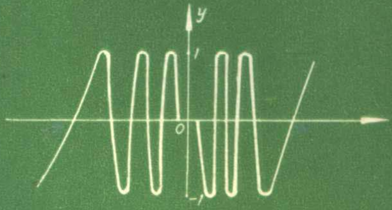
数学进修用书



盛淑云　王载扬

微积分

WEI JI FEN

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书根据中学新设的微积分课程，着重讨论一个变数的微分和积分，作为它的基础，函数与极限是本书的第一个组成部分，而后分别介绍微分、不定积分和定积分及它们的应用。叙述由浅入深，逐步深化。设有较多例题，典型题并给出多种解法。每节之后附有思考题和习题。

数学进修用书

微 积 分

盛淑云　王载扬

*

浙江人民出版社出版

（杭州长征路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥塊）

浙江省新华书店发行

开本787×1092　1/32　印张9.25　字数201,000

1980年4月第 一 版

1980年4月第一次印刷

印数：1—6,000

统一书号：7103·1082

定　价：0.84 元

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的。随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加。在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务。当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切。本丛书出版目的就是为他们进修提供一点比较系统的材料。编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实。同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学。丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学。

编 者 的 话

微积分不论作为高等数学的基础还是解决实际问题的工具，都是一门十分重要的课程。就是初等数学中的一些疑难问题，在微积分中也可能得到解答。按新编《中学数学教学大纲》（试行草案），今后高中即将开设这门课程。而近几年来中学教育发展很快，有不少中学数学教师还未曾专门学习过微积分。本书就是为满足教师的学习要求编写的。

微积分的内容十分丰富，本书自然不可能各方面都照顾到。这里我们略去一些重要部分，主要讨论一个变数的微分和积分，同时把它的基础——函数与极限作为重要组成部分。为了使读者把基础打得坚实一些，我们还是用 ε-N 和 ε-δ 的方式进行叙述，这就是本书第一章的内容。后三章则分别介绍微分、不定积分和定积分以及它们的应用。书中对于基本概念的引入，力求提出多方面的实践和理论依据，由浅入深，由近及远，逐步深化。还注意多设例题，并对典型的问题给出多种解法。目的是帮助读者能较好地掌握微积分的基本理论与方法。每节之后还列有若干思考题和习题，并附习题答案。全书列举了较多的解决具体问题的例子，这或许有助于读者应用时参考。至于与中学数学紧密联系的材料，我们更是十分重视。

笔者曾经担任过一段时间的微积分教学工作，但学习十分不够。这次在编写中自始至终得到谢庭藩副教授的热情指导和具体帮助、校核，并为本书提供了不少宝贵材料，特此表示感谢。

1979年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限

微积分起源于十七世纪工业革命后，是由于机械学、航海学、物理学、力学…等学科的发展而逐渐发展起来的．但那时候的微积分是不系统的，不完全的，并且是非常粗糙的．后来，由于极限论的建立，才使微积分成为一门完整的学科，并得到广泛的应用．至于用来论证最精密的极限论原理的实数理论，它的明晰概念一直到十九世纪后半期才建立起来，考虑到初学微积分读者的实际情况，本书对实数理论就不作论述．第一章函数与极限为本课程的基础，用极限可以导出微分学与积分学的基本概念，并且它的运算法则又是建立微分法和积分法的基础．所以掌握极限概念以及它的运算法则是极其重要的．

§1　微积分的两个典型问题

微积分研究的对象是什么？使用什么方法研究？这是读者必然要提出的问题，本节将从两个与中学教学联系密切的例子出发，作一个简单的说明．

1·1　曲线的切线问题

在中学里我们只知道：“与圆只有一个交点的直线是圆的切线”．但复杂一点的曲线，例如抛物线，上面的定义显然就不适用了．众所周知，抛物线的对称轴与它只相交于一点，但显然不能认为它是抛物线的一条切线．那么怎么样的直线才是曲线的切线呢？如图(1—1)，在

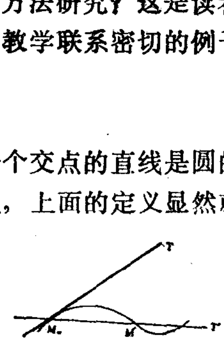
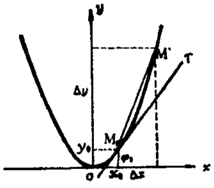


图 (1-1)

曲线上给定一个点 M_0，过 M_0 作直线 M_0T．根据我们的直觉看出 M_0T 是曲线的切线，M_0 是切点，然而这种认识，还是停留在感性阶段．因为我们还说不清楚为什么直线 M_0T 恰恰就是切线，而通过点 M_0 的其他直线就不是切线，这就要求我们对切线下一个确切的定义．

我们看到，如果将切线 M_0T 绕 M_0 点稍稍偏转，则所得直线 M_0T' 便不再是切线而是一条割线了．它与曲线在 M_0 点附近，还有一个交点 M'．此时，如果让交点 M' 在曲线上变动，则割线 M_0T' 也绕 M_0 转动，当交点 M' 沿着曲线越来越接近 M_0 时，割线 M_0T 的位置偏离切线 M_0T 的位置就越来越小，因此我们有理由说切线就是割线的极限位置．

那末从数量关系上，又如何刻划切线的特征呢？M_0 处的切线是经过 M_0 的一条直线，因此，关键是计算它的斜率．例如我们所考察的曲线是抛物线 $y=x^2$，其上给定点 M_0 的坐标 $(x_0,\ y_0)$．现在要求通过切点 M_0 的切线 M_0T，就只要确定 M_0T 的斜率，因为切线是割线的极限位置，所以预先去求割线的斜率．在曲线上另取一点 M'（见图 1-2），其坐标为 $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$*，则割线 M_0M' 的斜率为



图（1-2）

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

因为 $M_0(x_0,\ y_0)$ 和 $M'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 都是抛物线 $y=x^2$ 上的点，所以

---

* 记号 Δx，Δy 都表示实数，通常，它表示绝对值较小的数．“Δ”是希腊字母，读作“deirta”（汉语拼音）．

$$y_0=x_0^2,\quad y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2,$$

从而 $$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2,$$

于是 $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x. \qquad (1)$$

当 M' 向 M_0 靠近时，割线 M_0M' 就绕着点 M_0 转动，并向着切线 M_0T 的位置变化．点 M' 与点 M_0 越靠近即 Δx 越小，割线 M_0M' 就越接近切线 M_0T，于是割线 M_0M' 的斜率 $\operatorname{tg}\varphi$ 就越接近于切线 M_0T 的斜率 $\operatorname{tg}\varphi_0$．让 Δx 无限制地变小或者说让 Δx 趋向于零（记作 $\Delta x\to 0$*），割线斜率就趋向切线斜率，也即 $\operatorname{tg}\varphi\to\operatorname{tg}\varphi_0$．不难看出当 $\Delta x\to 0$ 时 (1) 的右端趋向于 $2x_0$，所以得到

$$\operatorname{tg}\varphi\to 2x_0.$$

因此 $y=x^2$ 在点 $M_0(x_0,\ y_0)$ 点的切线斜率是 $\operatorname{tg}\varphi_0=2x_0$．以后将称 $2x_0$ 为 $y=x^2$ 在点 $x=x_0$ 处的导数．

倘若将以上的讨论一般化，我们将可说：在切点近旁取点作割线，算出割线的斜率，它近似于切线的斜率，然后通过取极限，从割线过渡到切线，求得切线的斜率．

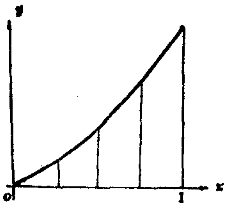
1·2 平面图形的面积

在中学数学里，我们首先学会计算矩形、三角形和梯形的面积，进而会算任何多边形及圆的面积．但是对于稍为复杂的平面图形，要求它的面积就比较困难，甚至无法解决，为了计算抛物线弓形的面积，历史上曾有不少人作过探讨，而得不到解决．古希腊大数学家阿基米德，以抛物线的特性为依据，提出了一种被人们称为“力学”的计算方法之后，才算解决了这个问题．然而假如每个特殊的图形都要象阿基米德那样去探求

---

* 这里引入记号“→”表示极限的意思，$\Delta x\to 0$ 即 Δx 以 0 为极限详见 §3.

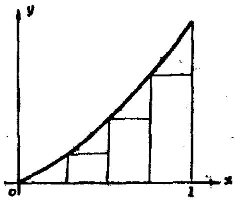
其计算方法，那不知要化多大的精力和时间，而且不一定能获得解决．但是利用微积分学的方法，却可以十分方便地得到解决．



图（1-3）

例如，设给了一个如图（1-3）所示的曲边三角形，其中一边是曲线 $y=x^2$ 的一段，另外二边是直线 $y=0$ 与 $x=1$，今计算这个图形的面积.

我们把 x 轴上，从 0 到 1 那一段分成许多小段，再从所有的分点引平行于 y 轴的直线而将整个曲边三角形分成许多很窄的竖条．虽然每个竖条的上面那个边都是曲的，但由于竖条很窄，从计算面积的角度来看，我们可以象图（1-4）那样，把它近似地看成小矩形，在这个意义上“以直代曲”．假设将 x 轴上从 0 到 1 那一段分成 n 个相等的小段，则每一段的长为$\frac{1}{n}$，分点的坐标分别为



图（1-4）

$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$．小矩形共有$n-1$个，它们的宽度都是$\frac{1}{n}$，而高度分别是$\left(\frac{1}{n}\right)^2$，$\left(\frac{2}{n}\right)^2$，…，$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$.

因此，它们的面积分别等于

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\ \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

把这些小块面积加起来，就得到曲边三角形面积的一个近似值

$$s_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]. \qquad (3)$$

它就是图(1-4)中那个阶梯状的多边形的面积．显然 n 愈大近似程度就愈高，见图1-5(a)(b)．让 n 无限制地增大，则 s_n 的极限 s，即为所求曲边三角形的面积．如何算出这个 s 呢？我们利用公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6},$$

将(3)写成

$$s_n=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

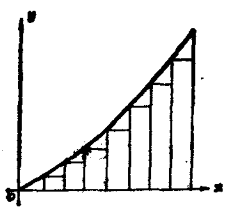
$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right). \qquad (4)$$

显然当 $n\to\infty$ 时，

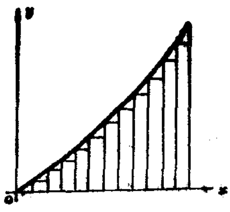
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 1, \quad \left(2-\frac{1}{n}\right)\to 2,$$

从而
$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3}.$$

故由(4)得到：$s_n\to s=\frac{1}{3}$，即曲边三角形面积等于 $\frac{1}{3}$．



图(1-5 a)



图(1-5 b)

上面的计算过程，简单说来就是：分割，(分成许多窄条)；局部“以直代曲”；求和得近似值(把这些小矩形面积加起来)；取极限得精确值. 这样得到的极限值，就叫积分. 积分就是积累的意思. 它的详细概念将在第三、四章叙述.

今后将要看到，曲线的切线是微分学的典型问题之一；平面图形的面积是积分学的典型问题之一. 类似的问题在物理学、化学以至生物学等方面是很多的. 例如运动的速度与加速度，物质的比热与密度，生物的生长率等等都属于前一类，而运动的路程，变力作功，物体的质量与热量等等都属于后一类.

微积分就是解决这些问题的有力工具，掌握微积分的方法当然并不单是为了这一些，它还可以用来解决一些中学数学难以解决的极大极小问题等，而更重要的是这门课程已是概率统计，微分方程、计算数学、微分几何等的不可缺少的基础，因此正确地理解微积分中的基本概念和基本理论，熟练地掌握它的运算方法，并在此基础上不断地提高分析与解决实际问题的能力是非常必要的.

§2 函　　数

2·1 函数的定义与记号

在客观世界中，各种事物的变化，常常是互相联系，互相制约的. 它们反映在数量关系上常是我们所谓函数关系，例如自由落体运动方程

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

它就表达了物体落下距离 s 与时间 t 的函数关系，距离 s 是随着时间 t 的变化而变化，t 确定后，s 也就确定了. 这里 t 称为自变量，s 称为因变量. 摆脱具体的物理概念，我们就得到

函数的一般概念：

函数的定义 设在某个过程中，有两个变量x与y. 如果对于变量x的每一个可能取的值变量y有一个确定的值与它对应，这时就说y是x的函数，并称x为自变量，y为因变量.

在函数的定义中，并没有要求当自变量变动时，函数的对应值一定要变. 重要的是：对自变量每一个可能取的值，有一个确定的函数值和它对应. 由此可知$y=C$（C为常数），也可以看作自变量x的函数，因为无论x取什么数值，函数y总有一个确定的值C和它对应.

对于给定的一个函数，自变量可能取值的全体，叫做函数的定义域，而对应的函数值全体，叫做函数的值域.

例如，当x为负数时，函数$y=\sqrt{x}$没有确定的实数值，所以它的定义域应为一切正数和零，而易于看出值域也为一切正数和零.

又如，函数$y=\dfrac{5}{x-3}$的定义域是除$x=3$以外的一切实数. 值域是除零以外的一切实数.

例 1 求函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解 当x满足不等式$1-x^2\geqslant 0$时公式$y=\sqrt{1-x^2}$才有意义，解此不等式得$-1\leqslant x\leqslant 1$，它就是这个函数的定义域.

例 2 求函数$y=\arcsin(x-1)$的定义域.

解 根据反正弦函数的定义可知当$|x-1|\leqslant 1$时函数才有意义，所以它的定义域为$0\leqslant x\leqslant 2$.

例 3 求函数$y=\log_a x$（a为不等于1的正数）的定义域.

解 根据对数的定义可知，函数的定义域为：$0<x<+\infty$.

例 4 求$y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$的定义域.

解 这里不但要求 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$，而且要求 $x\geqslant 0$. 所以我们得到函数的定义域为

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2,\ (k=0,1,2,\cdots).$$

在研究两个变量 x，和 y 的函数关系时，我们常用符号 $y=f(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，…，等等表示变量 y 是变量 x 的函数. 括号内的 x 是自变量，括号前的字母 f, φ, F 表示变量之间的对应关系.

对于函数 $y=f(x)$，我们常常用 $f(x_0)$ 表示对应于点 $x=x_0$ 的函数值. 例如设有函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^3},\qquad \varphi(t)=\frac{1}{2}t^2,\ F(u)=\sqrt{1+u^2},\cdots$$

则 $f(1)$ 就表示在 $x=1$ 时的函数 $f(x)$ 的值，即有 $f(1)=\frac{1}{2}$. 类似地得到 $\varphi(2)=2$，$F(-1)=\sqrt{2}$ 等等.

2·2 函数的各种表示法及举例

上面我们看到的函数都是用一个解析式子表示的，但是在实际问题中并非完全如此. 它也可用几个解析式子表示，或用列表和图象来表示.

例 1

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

它的图形如图(1-6).

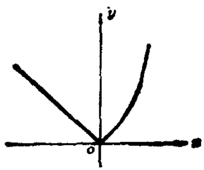


图 (1-6)

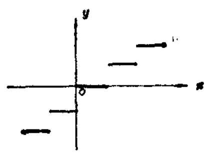


图 (1-7)

例 2　$y=f(x)=[x]$.

$[x]$表示不超过 x 的最大整数．如图(1-7)所示，这个函数可用来表示电子技术中经常遇到的锯齿波函数．

例 3　$y=x-[x]$，这就是锯齿波函数．见图 (1-8)．

例 4

$$y=f(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0).\end{cases}$$

常称这个函数为符号函数并记作 $y=\operatorname{sgn} x$，见图(1-9)．

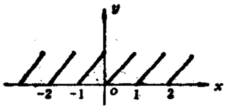


图 (1-8)

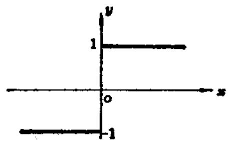


图 (1-9)

例 5

$$y=f(x)=\begin{cases}1\text{，当 } x \text{ 为有理数时，}\\ 0\text{，当 } x \text{ 为无理数时．}\end{cases}$$

这个函数称为迪里克莱 (Dirichlet) 函数．亦记作 $D(x)$．它的图形是分布在 $y=0$ 和 $y=1$ 两条直线上，但不能精确画出．

例 6

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}\text{，当 } x=\dfrac{p}{q}\text{时，(}q,\ p\text{ 为互质的自然数)}\\ 0\text{，当 } x \text{ 为无理数时．}\end{cases}$$

这个函数常称为黎曼 (Riemann) 函数．图 (1-10) 是它的略图．

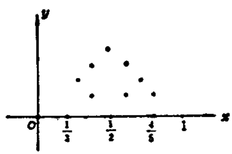


图 (1-10)

例 7　设 N 为自然数的全体．$\pi(n)$ 表示不大于 n 的素数的个数．则 $\pi(n)$ 给出了一个定义在 N 上的

函数，称为切比谢夫(Чебышев) 分布函数. 这个函数用列表法表示比较清晰、方便：

n	1	2	3	4	5	6	7	……
$\pi(n)$	0	1	2	2	3	3	4	……

2·3 具有一定性质的函数

1) 周期函数. 如果有一实数 $l \neq D$，使对任意的 x，常有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为它的一个周期. 例如 $y=\sin x$. 当 $l=2\pi$, 4π, …时，均满足上述要求，因此它是周期函数. 不难明白它的最小正周期是 2π 今后我们常称最小正周期作为函数的周期.

例 1 $f(x)=\sin^2 x$，是一个周期函数，它的周期是π.

事实上，$[\sin(x+\pi)]^2=[-\sin x]^2=\sin^2 x$.

例 2 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 是一个周期函数，它的周期是 2π.

事实上，$\sin x$ 的周期为 2π. $\sin 3x$ 的周期为 $\dfrac{2}{3}\pi$. 结合起来可以看出 2π 为其公共周期.

例 3 考虑迪里克莱函数的周期性.

容易看出一切有理数都是它的周期，但没有最小周期. 事实上，对任一正的有理数 $\dfrac{p}{q}$ 都有

$$f(x)=f\left(x+\frac{p}{q}\right)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时.}\end{cases}$$

例 4 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

证明 我们用反证法来证明．若有周期 l，则由 $\sin 0=0$ 知 $\sin l^2=0$，于是 $l=\sqrt{k\pi}$ 或 $-\sqrt{k\pi}$．从

$$\sin\left(l+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

知
$$\left(l+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi,$$

故
$$\left(\sqrt{k\pi}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$$

或
$$\left(-\sqrt{k\pi}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}+k_1\pi,$$

于是 $\sqrt{2k}$ 为自然数．从

$$\sin\left(l+\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)^2=\sin\frac{\pi}{4}$$

知
$$\left(l+\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)^2=\frac{\pi}{4}+2k_2\pi,$$

或
$$\left(l+\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)^2=\frac{3\pi}{4}+2k_2\pi.$$

于是 $\sqrt{k}$ 为自然数或为 $\frac{1}{2}+$ 自然数．因为

$$\sqrt{2}\cdot(\text{自然数})\neq\text{自然数},$$
$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\text{自然数}\right)\neq\text{自然数}.$$

故这种 k 不存在，也即 l 不存在．于是 $\sin x^2$ 不是周期函数．

2) 奇、偶函数．设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上，如果把自变量换成符号相反的值以后，相应的函数值不变，即