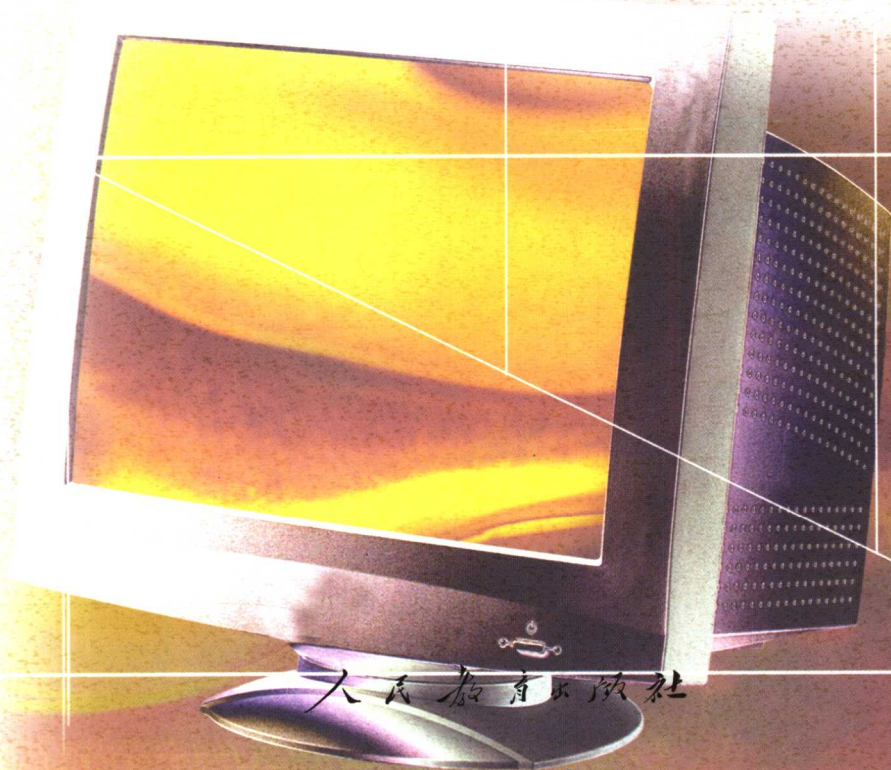


中等职业学校课本

数 学

(实验本) 第二册

中等职业学校课本数学(实验本)编写组 编著



人民教育出版社

◆ 数学 ◆ 数学 ◆ 数学 ◆ 数学 ◆ 数学 ◆ 数学 ◆ 数学 ◆

数 学

【必修1】 第二册

人民教育出版社 北京



中 等 职 业 学 校 课 本

数 学

(实验本)

第 二 册

中等职业学校课本数学(实验本)编写组 编著

人民教育出版社

责任编辑:王旭刚

特约责编:陈亦飞

中等职业学校课本

数 学

(实验本)

第二册

中等职业学校课本数学(实验本)编写组 编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京四季青印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本: 787 毫米×1 092 毫米 1/16 印张: 3.5 字数: 70 000

2003 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 4 次印刷

ISBN 7-107-17216-6
G·10306 (课) 定价: 3.50 元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版科联系调换。

(联系地址:北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编:100081)

说 明

根据《中等职业学校数学教学大纲》精神,结合当前中等职业学校学生数学学习的实际,特编写《中等职业学校数学教材》(实验本)。全套书共分四册。

这套教材的编写,旨在进一步提高学生的思想道德素质,文化科学知识。实施差异教学,使不同水平的学生都得到有差异的发展。培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会的能力。

这套教材有下列特点:

1. 突出了“降低起点”,增加“梯度”的思想。
2. 注意了理论联系实际,增加了数学应用方面的例题和习题。
3. 增加了一些数学相关知识的介绍,引起学生学习的兴趣。
4. 淡化形式,注重实质。恰当地掌握逻辑推理的要求,删去了一些定理繁、难的证明过程,注重了学生观察、实验、猜想等能力的培养。

本册主编 许宝良 副主编 徐光考

编写人员 丁三强 童少飞 金 栋 朱小平

统 稿 徐光考

中等职业学校课本数学(实验本)编写组

2003.9

目 录

第四章 数列	1
4.1 数列的概念	1
4.2 等差数列	3
4.3 等比数列	9
4.4 数列的应用	16
第五章 排列、组合	21
5.1 计数原理	21
5.2 排列与排列数	25
5.3 组合与组合数	31
5.4 排列、组合的应用	36
第六章 概率	42
6.1 概率的介绍	42
6.2 古典概率	45

第四章 数列

4.1 数列的概念

我们来看下面的例子：

正整数 $1, 2, 3, 4, \dots$ 的倒数排成一列数：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

大于 2 且小于 10 的自然数排成一列数：

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

无穷多个 0 排成一列数：

$$0, 0, 0, 0, \dots$$

-1 的 1 次幂, 2 次幂, 3 次幂, 4 次幂, $\dots$ 排成一列数：

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

一个班学号的前 10 名同学的身高排成一列数(单位 m)：

$$1.71, 1.80, 1.69, 1.76, 1.71, 1.78, 1.70, 1.73, 1.75, 1.78.$$

函数 $f(x) = 2^x$, x 是正整数, 当自变量 x 从正整数 1 开始, 从小到大依次取值时, 对应的函数值排成一列数

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

像上面的例子中, 按一定次序排列的一列数叫做数列. 数列中的每一个数都叫做这个数列的项.

各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项), 第 2 项, $\dots$, 第 n 项, $\dots$.

例如, 对于上面的数列 ②, 每一项的序号与这一项有下面的对应关系:

序号	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
项	3	4	5	6	7	8	9

第 1 项是 3, 第 2 项是 4, $\dots$, 第 7 项是 9. 或者说 3 是这个数列的第 1 项, 4 是这个数列的第 2 项, $\dots$, 9 是这个数列的第 7 项.

数列的一般形式通常写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项, 有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$. 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的**通项公式**. 例如, 数列 ① 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$, 如果已知一个数列的通项公式, 那么只要依次用 $1, 2, 3, \dots$ 代替公式中的 n , 就可以求出这个数列的各项.

项数有限的数列叫做**有穷数列**, 项数无限的数列叫做**无穷数列**, 上面的数列 ②, ⑤ 都是有穷数列, 数列 ①, ③, ④, ⑥ 都是无穷数列.

例 1 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出它的前 5 项:

$$(1) a_n = \frac{n+1}{2^n};$$

$$(2) a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

解: (1) 在通项公式中依次取 $n = 1, 2, 3, 4, 5$, 得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n = 1, 2, 3, 4, 5$, 得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}.$$



课堂练习一

1. 基础知识填空:

(1) 数列是_____的一列数;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 第 n 项 a_n 与序数 n 之间的关系, 若可用一个公式表示, 这个公式就叫做这个数列的_____.

2. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出它的前 5 项:

$$(1) a_n = n^3;$$

$$(2) a_n = 5n;$$

$$(3) a_n = 10(-1)^{n-1};$$

$$(4) a_n = \frac{2n-1}{3n+1}.$$

3. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出它的第 5 项和第 8 项:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1};$$

$$(2) a_n = n(n+1) - 3.$$

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 我们可以写出该数列的各项. 反过来, 对于有些数列, 如果已知这个数列的前面几项, 那么我们也可以写出这个数列的一个通项公式.

例 2 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 2, 4, 6, 8;

(2) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$;

(3) -1, 2, -3, 4.

解: (1) 这个数列的前 4 项 2, 4, 6, 8, 都是序号的 2 倍, 所以它的一个通项公式是

$$a_n = 2n;$$

(2) 这个数列的前 4 项 $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$ 的分母都是序号加 1, 分子都是分母的平方减去 1, 所以它的一个通项公式是

$$a_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1};$$

(3) 这个数列的前 4 项 -1, 2, -3, 4 的绝对值都是序号, 但奇数项为负, 偶数项为正, 所以它的一个通项公式是

$$a_n = (-1)^n n.$$



习题二

1. 观察下面数列的特点, 用适当的数填空, 并写出每个数列的一个通项公式:

(1) 1, 2, (), 4, 5, (), 7;

(2) 2, 4, (), (), 10, 12, 14;

(3) 1, (), 5, 7, 9, (), 13;

(4) -1, (), $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, (), (), -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}$.

2. 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$;

(2) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(3) $\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5}, \frac{1}{5 \times 7}, \frac{1}{7 \times 9}$.

4.2 等差数列

4.2.1 等差数列的概念

观察下面的数列:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11; \quad \textcircled{1}$$

$$4, 1, -2, -5, -8, -11, \dots; \quad \textcircled{2}$$

$$-5, -9, -13, -17, -21, \dots. \quad \textcircled{3}$$

我们发现:

对于数列①, 从第2项起, 每一项与前一項的差都等于2;

对于数列②, 从第2项起, 每一项与前一項的差都等于-3;

对于数列③, 从第2项起, 每一项与前一項的差都等于-4.

这就是说, 它们都有一个共同的特点, 就是从第2项起, 每一项与它的前一項的差都等于同一常数.

一般地, 如果一个数列从它的第2项起, 每一项与它的前一項的差都等于同一个常数, 那么这个数列就叫做**等差数列**, 这个常数叫做等差数列的**公差**, 公差通常用字母 d 表示.

例如, 数列③的公差是-4.

特别地, 数列

$$0, 0, 0, 0, \dots$$

也是等差数列, 它的公差为0, 公差为0的数列叫做**常数列**.

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 d , 那么根据等差数列的定义得到:

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, \dots.$$

所以 $a_2 = a_1 + d,$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

.....

由此得到, 如果已知等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d , 那么它的通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

例1 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 公差 $d = 2$, 求它的通项公式.

解: 将 $a_1 = -1, d = 2$ 代入公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 得到

$$a_n = -1 + (n-1) \times 2,$$

即 $a_n = 2n - 3.$

例2 求等差数列 $-5, -9, -13, \dots$ 的通项公式与第30项.

解: 由 $a_1 = -5, d = -9 - (-5) = -4$, 得到这个等差数列的通项公式

$$a_n = -5 + (n-1) \times (-4) = -4n - 1,$$

所以第30项 $a_{30} = -121.$

例3 -49 是不是等差数列 $8, 5, 2, \dots$ 的项?如果是, 是第几项?

分析: 本题是要回答是否存在正整数 n , 使得 $a_n = -49.$

解: 因为 $a_1 = 8, d = -3,$

所以 $-49 = 8 + (n-1) \times (-3)$.

解得 $n = 20$, 即 -49 是这个数列的第 20 项.



课堂练习三

1. 求等差数列 $3, 7, 11, \dots$ 的第 7, 10, 20 项.
2. 求等差数列 $2, 9, 16, \dots$ 的第 n 项.
3. 100 是不是等差数列 $3, 5, 7, \dots$ 的项? 如果是, 是第几项? 如果不是, 说明理由.

例 4 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 = 5, a_8 = 20$.

(1) 求首项 a_1 与公差 d ;

(2) 求它的第 25 项.

分析: a_1 和 d 是欲求的两个未知数, 根据方程思想, 需要列出两个方程, 由已知条件 $a_3 = 5, a_8 = 20$ 即可得到.

解: (1) 由题意可得

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 7d = 20 \end{cases}$$

解这个方程组得 $a_1 = -1, d = 3$;

(2) $a_{25} = -1 + (25-1) \times 3 = 71$.

此题的解答告诉我们: 牢固树立方程思想, 自觉地通过公式去寻找独立的等量关系, 是解决数列计算问题的一个好途径.

例 5 梯子的最高一级宽 33 cm, 最低一级宽 96 cm, 中间还有 8 级, 各级的宽度成等差数列, 计算中间各级的宽度.

解: 用 $\{a_n\}$ 表示梯子自上而下, 各级宽度所成的等差数列. 由已知得 $a_1 = 33, a_{10} = 96, n = 10$, 由通项公式, 得 $a_{10} = a_1 + (10-1)d$,

即 $96 = 33 + 9d$,

解得 $d = 7$.

于是 $a_2 = 33 + 7 = 40, a_3 = 40 + 7 = 47, a_4 = 47 + 7 = 54, a_5 = 54 + 7 = 61, a_6 = 61 + 7 = 68, a_7 = 68 + 7 = 75, a_8 = 75 + 7 = 82, a_9 = 82 + 7 = 89$.

所以, 梯子中间各级的宽度从上到下依次是 40 cm, 47 cm, 54 cm, 61 cm, 68 cm, 75 cm, 82 cm, 89 cm.

例 6 在 2 和 11 之间插入一个数 A , 使 2, A , 11 成等差数列.

解: 因为 2, A , 11 成等差数列, 所以

$$A - 2 = 11 - A.$$

解得 $A = 6.5$.

一般地,如果在数 a 与 b 中间插入一个数 A ,使 a, A, b 成等差数列,那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.



课堂练习四

1. 已知 $a_1 = 10, a_7 = 19$, 求 a_1 与 d .

2. 求下列各题中两个数的等差中项.

(1) 100 与 80;

(2) -2 与 6 .

3. 全国统一鞋号中成年男鞋共有 14 种尺码,其中最小的尺码是 $23\frac{1}{2}$ cm, 相邻的两个尺码都相差 $\frac{1}{2}$ cm, 把全部尺码从小到大列出.

4.2.2 等差数列的前 n 项和

看下面的问题:

某林场计划造林 5 hm^2 , 以后每年比上一年多造林 3 hm^2 , 问 40 年后共造林多少 hm^2 ?

分析:依题意,林场每年造林的面积数成等差数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_1 = 5, d = 3$, 那么 40 年后林场共造林 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{40} \text{ hm}^2$, 这是一个求等差数列的前 40 项的和. 如果按部就班地进行相加计算, 则运算较繁琐, 我们不妨转变一下思考的角度, 考虑怎样求出 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ 这个问题.

对于这个问题的计算,著名数学家高斯小时候曾很快求出它的结果,高斯的算法是:

首项与末项的和: $1 + 100 = 101$,

第 2 项与倒数第 2 项的和: $2 + 99 = 101$,

第 3 项与倒数第 3 项的和: $3 + 98 = 101$,

.....

第 50 项与倒数第 50 项的和: $50 + 51 = 101$, 于是所求的和是 $101 \times \frac{100}{2} = 5\ 050$.

高斯的算法启示我们,可以按下面的办法求和.

设 $x = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$ ①

即 $x = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1$ ②

① + ② 得 $2x = \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101}_{100\text{个}}$

于是 $x = \frac{101 \times 100}{2} = 5\ 050$.

这种求和的方法叫做倒序相加法.

在上面的求和中,我们发现所求的和可用首项、末项及项数 n 来表示,且任意第 k 项与倒数第 k 项的和都等于首项与末项的和.

由于 $1+2+3+\cdots+100$ 是特殊等差数列 $\{n\}$ 前 100 项的和,因此,我们可以把数列 $\{n\}$ 作为类比模型,猜想一般的等差数列 $\{a_n\}$ 也可用倒序相加法来求它的前 n 项的和.于是设

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d], \end{aligned} \quad ③$$

再把项的次序反过来, S_n 又可以写成

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + [a_n - (n-1)d], \quad ④$$

把 ③、④ 两边分别相加,得

$$\begin{aligned} 2S_n &= \overbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}^{n\text{个}} \\ &= n(a_1 + a_n), \end{aligned}$$

由此得到等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 所以上面的公式又可写成

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

在这两个公式中,都涉及 4 个变量的关系,只要知道其中任意 3 个,就可求出第 4 个.

我们再来解决前面提出的问题,

$$S_{40} = 40 \times 5 + \frac{40 \times (40-1)}{2} \times 3 = 2\,540,$$

即 40 年后林场共造林 $2\,540 \text{ hm}^2$.



课堂练习五

1. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形,最上面一层铺了瓦片 21 块,往下每一层多铺 1 块,斜面上铺了瓦片 19 层,共铺瓦片多少块?

2. 根据下列条件,求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的 S_n :

(1) $a_1 = 5$, $a_n = 95$, $n = 10$;

(2) $a_1 = 100$, $d = -2$, $n = 50$.

例1 等差数列 $5, 4, 3, 2, \dots$ 前多少项的和是 -30 ?

解: $a_1 = 5, d = -1$, 设 $S_n = -30$, 根据等差数列前 n 项和公式, 得

$$5n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = -30,$$

解得 $n_1 = 15, n_2 = -4$ (舍去).

所以等差数列 $5, 4, 3, 2, \dots$ 前 15 项的和是 -30 .

例2 已知一个等差数列的前 10 项的和是 310, 前 20 项的和是 1 220, 求这个等差数列前 30 项的和.

解: 由已知条件 $S_{10} = 310, S_{20} = 1\,220$, 得到

$$\begin{cases} 10a_1 + 45d = 310 \\ 20a_1 + 190d = 1\,220 \end{cases}$$

解这个关于 a_1 和 d 的方程组, 得到

$$a_1 = 4, d = 6.$$

$$\text{所以 } S_n = 4n + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 = 3n^2 + n.$$

$$S_{30} = 2\,730.$$



课堂练习六

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_5 = 28, S_{10} = 36$, 求 S_{15} .
2. 等差数列 $-10, -6, -2, 2, \dots$ 前多少项的和是 54?
3. 在等差数列中, 若 $S_5 = 14, a_2 + a_9 = 31$, 求 S_{12} .

例3 3 个数成等差数列, 它们的和等于 18, 平方和等于 116, 求这 3 个数.

解: 设这 3 个数为

$$a-d, a, a+d.$$

则有

$$\begin{cases} a-d + a + a+d = 18 \\ (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 116 \end{cases}$$

解这个关于 a, d 的方程组, 得 $a = 6, d = \pm 2$.

因此所求的 3 个数是 4, 6, 8 或 8, 6, 4.

例4 由数列 $1, 1+2+1, 1+2+3+2+1, 1+2+3+4+3+2+1, \dots$ 前 4 项的值, 推测第 n 项 $a_n = 1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1$ 的结果, 并给出证明.

解: $a_1 = 1 = 1^2$,

$$a_2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2,$$

$$a_3 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2,$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2,$$

.....

猜测: $a_n = n^2$.

$$\begin{aligned} \text{证明: } a_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ &= [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n] + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

观察、试验、猜想、证明既是重要的解题方法，又是解决数学问题的重要的思维方法。



课堂练习七

1. 若 4 个数成等差数列，其和为 32，第 2 项与第 3 项之比为 $\frac{1}{3}$ ，求这个等差数列的通项公式？
2. 在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中， a_1, a_2 是方程 $x^2 - a_3x + a_4 = 0$ 的两个根，求这个数列的通项公式 a_n 。
3. 求和： $99 + 100 + 101 + 102 + \cdots + 999$ 。

4.3 等比数列

4.3.1 等比数列的概念

先看下面两个实例。

(1) 小明在计算机上编写程序，他第 1 天编写 1 个程序，第 2 天编写 2 个程序，第 3 天编写 4 个程序，第 4 天编写 8 个程序，第 5 天编写 16 个程序，第 6 天编写 32 个程序。

小明每天编写程序的个数组成一列数列

$$1, 2, 4, 8, 16, 32.$$

①

(2) 一等边三角形的边长为 1. 连结这个等边三角形的各边中点，得到边长为 $\frac{1}{2}$ 的第 2 个等边三角形；连结第 2 个等边三角形各边中点，得到边长为 $\frac{1}{4}$ 的第 3 个等边三角形；连结

第3个等边三角形各边中点,得到边长为 $\frac{1}{8}$ 的第4个等边三角形;...

各个等边三角形的边长组成一列数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad \textcircled{2}$$

以上两个数列有这样的共同点:从第2项起,每一项与它前一项的比都等于同一个常数.

一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它前一项的比都等于同一个常数,这个数列就叫做**等比数列**.这个常数就叫做等比数列的**公比**.

等比数列①的公比是2,等比数列②的公比是 $\frac{1}{2}$.

例1 等比数列 $-1, 1, -1, 1, \dots$ 的公比是 -1 .

例2 数列 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$ 是等比数列,它的公比是 $\frac{1}{3}$.

例3 求等比数列 $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \dots$ 的第5项.

解:设这个等比数列的第5项为 x ,则由定义可得

$$\frac{x}{9} = \frac{9}{3\sqrt{3}}.$$

解得 $x = 9\sqrt{3}$.



课堂练习八

1. 求下列等比数列的公比.

(1) $2, 2, 2, 2, \dots$;

(2) $1, -3, 9, -27, \dots$;

(3) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, \dots$.

2. 公比是2的等比数列的第1项是3,则第2项是多少?第3项呢?你能求出第5项吗?

3. 求等比数列 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots$ 的第5项.

我们把等比数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 用 $\{a_n\}$ 来表示,用字母 q 来表示公比,由定义可知:

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

.....

由此类推,得等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

分析等比数列通项公式, 有 4 个量, 首项 a_1 , 公比 q , 项数 n , 第 n 项 a_n . 只要知道其中 3 个量, 就能求出第 4 个量.

例 4 一个等比数列的第 1 项是 $\frac{2}{3}$, 公比是 3, 求第 5 项.

解: 因为 $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = 3$, $n = 5$,

所以 $a_5 = \frac{2}{3} \times 3^{5-1} = 54$.

例 5 已知等比数列的第 1 项是 2, 第 4 项是 250, 求公比 q .

解: 因为 $a_1 = 2$, $a_4 = 250$, $n = 4$,

所以 $250 = 2 \times q^3$, 解得 $q = 5$.

例 6 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = -\frac{1}{2}$, 第 9 项是 $\frac{1}{16}$, 求它的首项.

解: 由已知 $q = -\frac{1}{2}$, $n = 9$, $a_9 = \frac{1}{16}$,

得 $\frac{1}{16} = a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^8$, $a_1 = \frac{1}{2^4} \times (-2)^8 = 16$.

即首项为 16.



课堂练习九

1. 求下列等比数列的通项公式:

(1) $1, 2, 4, 8, \dots$; (2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$.

2. 等比数列的第 1 项是 $\frac{3}{5}$, 公比是 5, 求它的第 4 项.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 第 6 项是 $\frac{1}{4}$, 求它的首项.

4. 一个等比数列的第 1 项是 27, 第 3 项是 3, 求它的公比.

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是 2, 公比是 2, 那么 256 是这个等比数列中的第几项?

例 7 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 = 4$, $a_4 = \frac{8}{3}$, 求它的首项 a_1 与公比 q .

解: 由已知可得