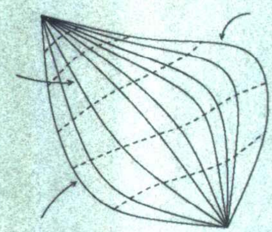
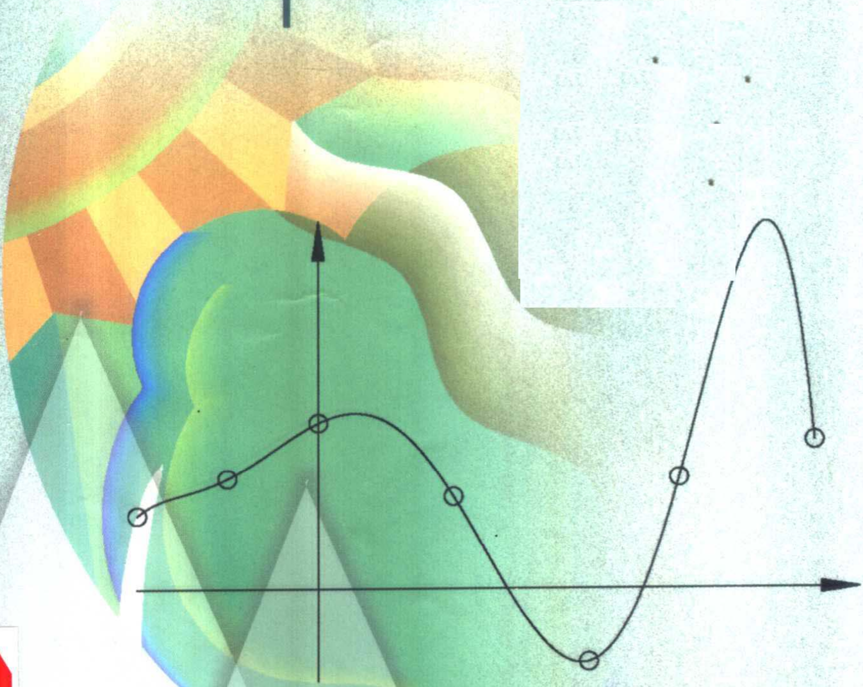
基础数学讲义丛书



基础分析学之一

——单元微积分学

项武义 著



人民教育出版社

基础数学讲义丛书

基础分析学之一

单元微积分学

项武义 著

人民教育出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

基础分析学．1，单元微积分学/项武义主编．
—北京：人民教育出版社，2004
（基础数学讲义；3）
ISBN 7－107－17681－1

Ⅰ．基…
Ⅱ．项…
Ⅲ．高等数学课—中学—教学参考资料
Ⅳ．G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 051411 号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：7.375
字数：143 千字　印数：0 001～3 000 册
定价：13.30 元

引言

人类生存的地球，比之于无限的宇宙实乃无比的渺小；而自古至今人类的理性文明只不过数千年，比之于地球上几十亿年的生命历史又是无比的短暂．但是人类得天独厚，具有几十亿年逐步进化而得 —— 奇妙超群的脑力；再者，人类还能善用天赋的脑力，创造语言与文字，使得全人类的聪明才智不但能够群策群力、集思广益，而且还能世代相承、精益求精，创造了博大精深的理性文明．作为一个现代人，我们不但具有天赋的脑力，而且还继承了数千年来全人类的聪明才智，世代相承探讨研究的成果，总称之谓理性文明 (civilization of rational mind)．它使得每一位肯学、肯想的人生，大大地拓展了其能够理解的时空．

综观自古至今的理性文明，历代的先智先贤用来探索宇宙的基本思想和方法其实是既自然又朴实的，大体上可以简述如下：

先用归纳法，师法自然，实事求是．例如观测天象，记录昼夜之长短，四季的变化等等．然后再用解析思维把实验探索所得的各种各样认知加以综合、演

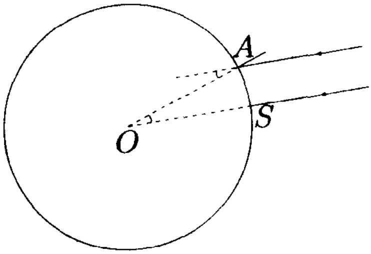
> 绎，逐步由定性到定量，由表象到内在结构，精益求精地研讨大自然中万象万物的基本结构和基本原理.

总之，实验归纳和综合演绎乃是两种相辅相成交互进展的科学方法，而数理分析 (mathematical analysis) 则是后者的基本方法和有力工具，分析学的基础理论也就是如此产生的. 我们将在后面的章节中简明扼要地讨论数理分析在人类理性文明中产生的过程和其所扮演的角色.

在我们开始逐章逐节作系统研讨之前，且以一个既清晰简朴又具有历史意义的范例，来对于数理分析的本质和要点作一初步解说. 那就是远在公元前 3 世纪 Eratosthenes (约 276 B.C.–194 B.C.) 所完成的：人类对于地球大小的首次定量估算.

话说当年， Eratosthenes 是古希腊文明后期中心所在地 Alexandria 的图书馆馆长，他是一位精通当时的天文地理的博学之士. 首先，当年已经由月蚀、航海的观察得知我们所居住的大地是一个大球；而且太阳和地球之间的距离要比地球和月亮之间的距离还要大许多倍. 总之，同时照射到地球上各地的太阳光基本上就是平行光线. 再者，他还得知人们在 Alexandria 正南方，尼罗河出山口的 Syene（现今的 Aswan ）的一口深井，观察到夏至正午的太阳光可以直射井底，不留任何井壁的阴影. 换言之，在 Syene，夏至正午的太阳光是垂直于该井的水平面的. 但是 Alexandria 的夏至正午的阳光，则和井壁大约有 $\frac{1}{50}$ 周角（即 7.2 度）的夹角. 当年 Eratosthenes 大概就用如下图所示的图解，把上述几

个天文地理的知识加以综合分析.



他以一个圆表示过 Alexandria 和 Syene 的经圆 (longitudual circle)，以两条并行线表示分别照射在 Alexandria 和 Syene 的夏至正午的阳光. 从上述简明扼要的抽象表述，就可以用熟知的几何知识推论以下几点：其一是过 Syene 的光线垂直于球面，所以其延长线是过球心 O 的. 其二是由两条并行线与 Alexandria 到球心连线的内错角相等，得知 $\angle AOS$ 也等于 $\frac{1}{50}$ 周角. 由此可得整个经圆的周长大约是 Alexandria 和 Syene 之间的距离的 50 倍！

Eratosthenes 这位老先生并没有去实地测量上述两地之间的距离. 他只是去市集，向往来于 Alexandria 和 Syene 之间的骆驼商队询问他们一共要走几天才能由 Syene 走到 Alexandria，而且每天大约能走多少希腊里 (Stadia)．他就将询问所得的天数 (50 天) 和每天的里程 (100 Stadia) 得出下列经圆圆周长度的估计，即

$$50 \times 50 \times 100 = 250\,000 \quad (\text{Stadia}).$$

这就是人类对于其所生存的地球大小的第一次定量估计.

假如要把它和现代测算的地球大小作个比较，当然就要把希腊里 (stadia) 和公里 (kilometer) 的长度作一换算. 在

这里有一个小小的疑案： stadia 是当年运动场 (stadium) 的跑道的长度，但是目前存留的古希腊运动场的跑道却有两种长短不一的长度. 总之，以较长者来换算则其估计比实测要大些，而以较短者来换算则其估计比实测要小些，而相去都在 10% 之内.

如今回顾 Eratosthenes 在两千多年前，能够把当时所知道的天文、地理和几何知识，用简朴的图解加以综合分析，一举而得数量上相当准确的地球大小的估计，它实在是人类以数理分析去理解大自然的一个杰出的典范. 世世代代理性文明的继承者，不但应该以怀古之情瞻仰它，而且更要从中学习其用法，获得数理分析的启蒙启发.

目录

引言 **v**

导论 **1**

0.1 自然数系 2

0.2 整数数系 8

0.3 有理数系 12

0.4 实数系 14

0.5 复数系 16

第一章　实数系和函数的连续性 **19**

1.1 实数系的连续性 19

1.2 连续函数的基本概念 24

1.3 多项式函数 33

1.3.1 多项式的唯一性定理与插值公式 34

1.3.2 单元多项式的除法与辗转相除求公因式 39

1.3.3 Sturm 定理 42

1.3.4 代数基本定理 45

第二章　微积分 **57**

2.1 变率与微分 58

2.2 总和与积分 70

2.3 微积分基本定理与均值定理 77

第三章　指数与对数函数 **97**

3.1 指数、对数函数的定义与基本性质 97

3.2 指数函数与对数函数的微分 104

3.3 自然对数表的计算法 108

3.4 复变量指数函数和三角函数 110

3.5 复利与指数函数 113

第四章　初等函数及其应用举例 **119**

4.1 多项式函数 119

4.1.1 n 阶密切多项曲线 120

4.1.2 高阶局部逼近与不定式的极限 124

4.1.3 插值问题的推广 126

4.2 三角函数与反三角函数 128

4.2.1 圆的对称性与正弦、余弦函数的基本性质 129

4.2.2 三角定律与极坐标 131

4.2.3 等速圆周运动与正弦、余弦的微分 132

4.2.4 等周问题 (Isoperimetric Problem) 135

4.2.5 Kepler 行星运行三定律及其数理分析 141

4.2.6 三角函数的积分计算 148

4.2.7 反三角函数及 π 的近似值计算 149

4.3 常系数常微分方程 154

4.3.1 算子符号 154

4.3.2 $p(D)=(D-\lambda)^k(\lambda\in\mathbf{C})$ 的情形 156

4.3.3 $p(D)$ 是一般的情形 158
4.3.4 $p(D)y = g(x)$ 的解法 161

第五章 欧氏几何、球面几何和非欧几何的统一理论 **165**
5.1 非欧几何的发现过程及其历史意义 167
5.2 发现非欧几何学的思路与突破点 169
5.3 欧氏、球面与非欧三角定律的统一理论 173
5.4 旋转面的解析几何 182
5.5 旋转面的 Gauss 曲率和 Gauss-Bonnet 公式 200
5.6 结语 211
5.7 思考题与习题 214

结语 **221**

导 论

数系和数系的扩张

数理分析是我们由表及里, 定量地深入研讨大自然的重要方法, 而分析学 (Analysis) 也就是为了有效运用数理分析去理解大自然而发展起来的一门数学. 当所要研讨的事物是相当简单初等的, 其相应的各种各样定量问题往往是初等的代数问题和几何问题, 例如复利的计算、平面测量等等. 但是当所要研讨的问题逐渐深入, 逐步拓展, 就自然而然地超出了初等代数和初等几何力所能及的范畴, 例如天体的运行、曲线曲面的研究、弦的振动等等. 其实, 分析学乃是以初等代数和初等几何为基础把两者结合起来, 更上层楼而发展起来的; 它是对于各种各样动态事物作数理分析的重要工具, 而其本身的基础理论则在于函数的微分、积分和连续性的建立及其基本定理. 这也就是为什么通常把分析学基础论叫做微积分的原由.

代数和几何的基础归根研底乃是建筑在数系和空间这两种基本结构之上. 空间乃是我们和宇宙万物共存于其中的地方, 是大自然所赋予的; 而数系则是人类理性文明为了更加精确地定量研讨事物所构造的"计量"体系, 可以说是人的创造. 在定量几何学定量地研讨空间本质的讨论之中, 前者和后者则自然而然地结合在一起, 相辅相成.

最原始的数系就是我们用来数个数 (counting) 的自然数系 (system of natural numbers), 然后逐步扩充而得整数系 (system of integers)、有理数系 (system of rational numbers)、实数系 (system of real numbers) 和复数系 (system of complex numbers). 通常分别以 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 表示上述数系, 则上述逐步扩充 (张) (extensions) 就可以用符号

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$$

简约地表达.

我们首先将对上述逐步扩张而构造的一连串数系作一次归本究源的结构分析. 唯有对数系结构的来龙去脉了然于心, 才能在运用它们作各种各样定量分析、探索自然时得心应手.

§0.1 自然数系

自然数系是人类为了数个数 (counting) 这样一种原始而且基本的"定量化"而创造的体系. 例如有一位牧羊人要知道其羊群的个数, 或当古人发现月亮的圆缺变化是一种周

而复始的事情，自然就想统计一下其周期的天数等等. 虽然各古文明所用的符号和体系不同，但是其本质都是一串逐一相连的符号体系，例如

|	||	|||	||||	···
一	二	三	四	···
1	2	3	4	···

其中第一个符号表示“单元”，是一只羊，一个人或一棵树的抽象化，而后继符号则表示比前述所表达者多增添一个单元，即

$$2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 4 + 1,\ \cdots$$

$$101 = 100 + 1,\ 102 = 101 + 1,\ \cdots, \text{如此类推.}$$

由此可见，自然数系最为原始、基本的结构就是“ +1 ”运算. 在自然数系这一串顺序排列的符号体系中，后继者就是前者“ +1 ”所得，所以任何一个自然数都可以由 1 起始，逐步“ +1 ”而得之（其实这就是我们构造自然数系的方法）.

把上述事实改用“数学化”的集合用语来描述，即为:

【数学归纳法原理 (Principle of Mathematical Induction)】 一个自然数系的子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{N}$，若满足下述两个条件

$$\text{(i) } 1 \in \mathcal{S}, \quad \text{(ii) } n \in \mathcal{S} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{S}, \tag{1}$$

则 $\mathcal{S}$ 其实就等于 $\mathbf{N}$.

自然数系之所以有用、好用，是因为它具有满足交换律、结合律、分配律的加法与乘法运算，这都是大家所熟知常用的. 假如有人问你或者你自问："为什么那些运算律总是成立的呢？"此问显然不能用："实例的计算从来没碰到不成立的情形，所以应该是成立的"，或者是人云亦云地："大家都说它们总是成立，所以我也相信它们是对的"等等作为解释，因为自然数的个数是无限，而实例计算所能验算的只是很小、很小的一部分，所以加、乘运算的运算律的普遍成立是需要加以论证的！这也就是我们所要讨论的首个课题. 此事当然得从 加法 和 乘法 的根源（即本质）说起.

加法的本质是" $+1$ "运算的复合. 例如" $+2$ "就是把" $+1$ "做两次（符号"2"所代表的意义）的结果，" $+3$ "就是把" $+1$ "做三次的结果，" $+(n+1)$ "就是比" $+n$ "再多做一次" $+1$ ". 由此可见，

$$a+(n+1)=(a+n)+1 \tag{2}$$

其实就是加法的归纳定义式. 而下述的加法结合律所描述的：

$$(a+m)+n=a+(m+n) \tag{3}$$

就是对 a 先作 m 次" $+1$ "然后再作 n 次" $+1$ "，其结果也就是对 a 作 $(m+n)$ 次" $+1$ ". 由此可见，加法结合律的普遍成立是直观明显的. 把它改用数学化的语言与格式说清楚，就是下述归纳论证 (proof by induction) .

【定理 0.1】（加法结合律）$(a+m)+n=a+(m+n)$.

证明：对于任给 a, m，归纳证明上式对于所有自然数 n 皆成立.

(i) $n = 1$ 时，$(a + m) + 1 = a + (m + 1)$ 就是加法的归纳定义式.

(ii) 由归纳假设 $(a + m) + n = a + (m + n)$，则有

$$
\begin{aligned}
& (a+m)+(n+1) & \\
= \ & \big[(a+m)+n\big]+1 & \text{[加法归纳定义式]} \\
= \ & \big[a+(m+n)\big]+1 & \text{[归纳假设]} \\
= \ & a+\big[(m+n)+1\big] & \text{[加法归纳定义式]} \\
= \ & a+\big[m+(n+1)\big]. & \text{[加法归纳定义式]}
\end{aligned}
$$

接着让我们再用归纳法来证明加法交换律.

【定理 0.2】（加法交换律）$a + b = b + a$.

证明：先用归纳法证明 (i) $a + 1 = 1 + a$：

(1) $a = 1$ 时，$1 + 1 = 1 + 1$ 是显然的.

(2) 由归纳假设 $a + 1 = 1 + a$，则有

$$
\begin{aligned}
(a+1)+1 &= (1+a)+1 & \text{[归纳假设]} \\
&= 1+(a+1). & \text{[结合律]}
\end{aligned}
$$

然后再由归纳假设 $a + b = b + a$ 证明 (ii)$a + (b + 1) = (b + 1) + a$：

$$\begin{aligned}
a+(b+1) &= (a+b)+1 && [\text{结合律}]\\
&= (b+a)+1 && [\text{归纳假设}]\\
&= b+(a+1) && [\text{结合律}]\\
&= b+(1+a)\\
&= (b+1)+a.
\end{aligned}$$

现在让我们来分析一下乘法的本质. 乘法其实是自相加的缩写:

"$m \cdot a$" 就是 m 个 a 自相加的总和 (所以 $1 \cdot a = a$). 因此 $(m+1)\cdot a$ 所表达的就是比 $m \cdot a$ 再多加一个 a. 由此可见, 乘法的归纳定义式就是

$$1 \cdot a = a, \quad (m+1)\cdot a = m \cdot a + a. \tag{4}$$

再者, 乘法的左分配律

$$m \cdot a + n \cdot a = (m+n)\cdot a \tag{5}$$

就是说把 m 个 a 自相加的"总和"和 n 个 a 自相加的"总和"再加起来, 其实就等于 $(m+n)$ 个 a 自相加的总和. 这件事在直观上极为明显, 下面我们给它作一次归纳的证明.

[注意] 在尚未证明乘法交换律之前, 分配律是有左、右分别的. 其实, 乘法交换律的证明是要在左、右分配律都证得之后才能证得.

【定理 0.3】(乘法的左分配律) $m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a$.

证明：对于任给 m, a，归纳证明上式对于所有自然数 n 皆成立.

(i) $n=1$ 时，由定义式知 $m\cdot a+1\cdot a=(m+1)\cdot a$.

(ii) 由归纳假设 $m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a$，则有

$$\begin{aligned}
& m\cdot a+(n+1)\cdot a \\
= \ & m\cdot a+(n\cdot a+a) && [\text{乘法归纳定义式}] \\
= \ & (m\cdot a+n\cdot a)+a && [\text{加法结合律}] \\
= \ & (m+n)\cdot a+a && [\text{归纳假设}] \\
= \ & \big[(m+n)+1\big]\cdot a && [\text{乘法归纳定义式}] \\
= \ & \big[m+(n+1)\big]\cdot a.
\end{aligned}$$

【定理 0.4】(乘法的右分配律) $m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$.

证明：任取 a、b，对 m 作归纳证明如下：

(i) $m=1$ 时是显然成立的.

(ii) 由归纳假设 $m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$ 成立，则有

$$\begin{aligned}
& (m+1)\cdot(a+b) \\
= \ & m\cdot(a+b)+(a+b) && [\text{乘法归纳定义式}] \\
= \ & (m\cdot a+m\cdot b)+(a+b) && [\text{归纳假设}] \\
= \ & (m\cdot a+a)+(m\cdot b+b) && [\text{加法结合律、交换律}] \\
= \ & (m+1)\cdot a+(m+1)\cdot b.
\end{aligned}$$

【定理 0.5】(乘法交换律) $a\cdot b=b\cdot a$.