西安工业大学学术著作基金资助项目

小波分析与应用基础

XIAOBO FENXI YU YINGYONG JICHU

张国华　张文娟　薛鹏翔　编著

西北工业大学出版社

小波分析与应用基础

张国华　张文娟　薛鹏翔　编著

（西安工业大学学术著作基金资助项目）

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书阐述了小波分析的基本理论及其应用，主要内容包括小波变换、多分辨分析、小波的性质与构造、小波基的数学特征、紧支集对称双正交小波、小波包等基本理论与应用原理和方法。全书理论叙述简明易懂，内容结构框架清晰，在论述中尽可能结合工程背景分析小波的数学公式，力求缩短理论与应用的距离。第2～5章末均有小结，可使读者通过简短的叙述了解本章重点。

本书可作为信息与计算科学、应用数学专业本科生和信息、电子类研究生的教材或参考书，也可供相关领域的科研人员和工程技术人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

小波分析与应用基础/张国华，张文娟，薛鹏翔编著．—西安：西北工业大学出版社，2006.8
ISBN 7-5612-2118-5

Ⅰ.小…　Ⅱ.①张…　②张…　③薛…　Ⅲ.小波分析　Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第099251号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西东江印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：9.5
字　　数：200千字
版　　次：2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
定　　价：17.00元

前　言

小波分析是近 20 多年来发展起来的新兴学科，作为一种快速高效、高精度的近似方法，它是 Fourier 分析的一个突破性发展，给许多相关学科的研究领域带来了新的思想，为工程应用提供了一种新的分析工具。小波分析主要研究：在特定的函数空间，用某种方法构造一种称为小波的基函数(小波基)，对给定的信号(函数)进行展开与逼近，根据展开式研究信号的某些特性及逼近的效益。

与 Fourier 分析相比较，小波分析克服了 Fourier 分析方法表示信号时虽然能够清晰描绘出信号的频率特征，但不能反映信号在时间域上的局部信息的缺陷。这是因为小波基函数不仅大多具有快速衰减(有许多小波只定义在有限区间上)、充分光滑、能量集中的优点，而且它是经平移和伸缩构成的，具有多尺度分辨率的特点。它既具有时域和频域同时局部化和多尺度分辨的功能，又具有简单、灵活、随意的特点，它比 Fourier 分析更适合对非平稳信号的处理。

本书写作的出发点是着眼于基础，着眼于理论与实践相结合，是想让读者读完本书后，对经典小波能有一个准确深刻的认识，掌握小波的基本理论与应用，为进一步学习和应用小波打好基础。

在写作过程中，本书尽力遵循上述原则，不涉及较深的令高年级本科生难理解的数学理论的证明与推导，在较多的工程背景下讲述重要概念，尽力做到结构框架与条理简明清晰，而方法介绍较详细，以期缩短理论与应用之间的距离。第 2～5 章末均有小结，以便读者通过简短的叙述了解本章的重点。此外第 1～5 章还附有少量的习题。

本书的读者对象是信息与计算科学专业、应用数学专业本科生及信息、电子类的研究生及有关工程技术人员。作者认为，适合这些专业的小波分析书籍，一方面应该具有与本科相适应的数学理论，另一方面应尽可能地从工程背景上认识小波的数学公式，同时要将小波理论与应用有机结合。这些问题确实具有挑战性，值得认真实践与探索。

本书初稿经西安交通大学程正兴教授详细审阅。作者根据审阅意见进行了认真地修改与补充，在此特别感谢程正兴教授的帮助和指导。同时，本书得到了西安工业大学学术著作基金的资助，在此也特别感谢西安工业大学的大力支持。

本书较适合高等院校信息与计算科学及应用数学专业作为教材，也适合信息、电子类研究生作为教材。目录和正文中上角有“*”号的内容可以根据需要选取。

由于作者对小波分析的研究甚浅，书中还有许多不尽如人意之处，敬请读者批评指正。

作　者

2006 年 5 月

常 用 符 号

$\langle f,g\rangle$	内积
$\Vert f\Vert$	范数
$x<+\infty$	x 为有限数
$\bar{Z}$	$Z\in\mathbf{C}$ 的复共轭
$\lfloor x\rfloor$	满足 $n\leqslant x$ 的最大整数 n
$\lceil x\rceil$	满足 $n\geqslant x$ 的最小整数 n
$\mathbf{N}$	非负整数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^+$	正实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$f(t)$	连续函数或连续的时间信号
$f[n]$	离散信号
$\delta(t)$	Dirac 广义函数
$\delta[n]$	离散 Dirac 广义函数
$C^p_{[a,b]}$	$[a,b]$ 上 p 次连续可微函数空间
$L^2(\mathbf{R})$	满足$\int_{\mathbf{R}}\vert f(t)\vert^2\mathrm{d}t<+\infty$ 的函数空间
$L^p(\mathbf{R})$	满足$\int_{\mathbf{R}}\vert f(t)\vert^p\mathrm{d}t<+\infty$ 的函数空间
l^2	平方可和序列的集合，即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vert c_n\vert^2<+\infty$
$\nabla f(x)$	多元函数 $f(x)$ 的梯度
$f*g(x)$	函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积
$f*g[n]$	离散信号卷积
$\hat{f}(\omega)$	$f(t)$ 的 Fourier 变换
$(Wf)(a,b)$	$f(t)$ 的小波变换

目　录

第1章 数学预备知识

小波分析是在 Fourier 分析基础上发展起来的对函数(信号)的一种新的分析工具,同时它又是一种新的数值分析方法。泛函分析是它重要的数学基础。

泛函分析吸取了各个数学分支中最基本的精华,具有高度的抽象性、系统性与普遍性,它的观点、方法和规律可以广泛地应用到各个学科。

为以后的学习方便,本章简要介绍一些有关的基础知识。

1.1 距离空间

定义 1.1 设 X 是一非空集合,对于任意 $x,y\in X$,都有一个实数 $\rho(x,y)$ 与其对应,且 $\rho(x,y)$ 满足以下三公理(称为距离公理):

(1) 非负性:$\rho(x,y)\geqslant 0$,当且仅当 $x=y$ 时,有 $\rho(x,y)=0$;

(2) 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) 三角不等式:对任何 $x,y,z\in X$,有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$$

则称 $\rho(x,y)$ 为 x,y 之间的距离,称 X 为距离空间。

上述定义是通常欧氏距离概念的抽象与推广。

例 1.1 n 维欧氏空间。设 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,n\}$,对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,定义

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_i(x_i-y_i)^2\Big]^{1/2}\tag{1.1}$$

可以证明上述定义满足距离公理,所以它是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离,而 $\mathbf{R}^n$ 是一个距离空间。

同样在 $\mathbf{R}^n$ 中可以定义另一种距离:

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|\tag{1.2}$$

从而可得另一个距离空间。

式(1.1)定义的距离称为欧氏距离,而 $\mathbf{R}^n$ 称为 Euclid 空间。

例 1.2 连续函数空间。设 $C_{[a,b]}=\{f(x)\mid f$ 是$[a,b]$上的连续函数$\}$,对任何的 $f(x)$,

$g(x) \in C_{[a,b]}$,定义

$$\rho(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - g(x) | \tag{1.3}$$

可以证明,如此定义的 $\rho(f,g)$ 满足距离公理,因此 $C_{[a,b]}$ 是一个距离空间,称为连续函数空间。

例 1.3 平方可积函数空间。设

$$L^2(\mathbf{R}) = \{f(x): \int_{\mathbf{R}} | f(x) |^2 \mathrm{d}x < +\infty\}$$

在 $L^2(\mathbf{R})$ 上对于任意 $f(x), g(x) \in L^2(\mathbf{R})$,定义

$$\rho(f,g) = [\int_{\mathbf{R}} | f(x) - g(x) |^2 \mathrm{d}x]^{1/2} \tag{1.4}$$

可以证明,$L^2(\mathbf{R})$ 构成一距离空间,称之为平方可积函数空间。

例 1.4 设 l^2 表示满足 $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2 < \infty$ 的数列全体,则对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$,定义

$$\rho(x,y) = \left[\sum_i | x_i - y_i |^2\right]^{1/2} \tag{1.5}$$

可以证明,l^2 构成一距离空间,称为平方可和的数列空间。

1.2 函数空间

1.2.1 线性空间

定义 1.2 设 X 为一非空集合,K 为数域(实数域或复数域)。如果在 X 中定义了"加法"和"数乘",并且这两种运算满足封闭性及如下的运算律:

关于"加法",有

(1) 交换律:$x + y = y + x$,

(2) 结合律:$x + (y + z) = (x + y) + z$,

(3) 存在"零元素"θ,使 $x + \theta = x$,

(4) 存在"逆元素"$-x$,使 $x + (-x) = \theta$;

关于"数乘",有

(1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha, \beta \in K$,

(2) $1 \cdot x = x$, $0 \cdot x = \theta$,

(3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

则称 X 为实(或复)线性空间。

1.2.2　赋范线性空间

定义 1.3　设 X 为线性空间(实数或复数),若对任意的 $x\in X$,有一个非负实数 $\|x\|$ 与之对应,且满足(范数公理)

(1) $\|x\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$(非负性);

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbf{R}$(齐次性);

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,\quad x,y \in X$(三角不等式);

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数,X 为赋范线性空间。

通过比较范数公理与距离公理可以发现,在赋范线性空间中,任何两点(元素)x,y 的距离可由范数导出:

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

此时,线性赋范空间也是距离空间。但距离空间不一定是线性赋范空间。这从距离空间定义可以知道,因为在那里仅要求 X 是非空集合。

例 1.5　在 $\mathbf{R}^n$ 中,常用以下范数:

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}$$

$$\|x\|_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

例 1.6　在 $C_{[a,b]}$ 中常用以下范数:

$$\|f\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$$

例 1.7　在 $L^2(\mathbf{R})$ 中常用以下范数:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

例 1.8　在 l^2 中常用以下范数:

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\Big)^{1/2}$$

1.2.3　Banach 空间

定义 1.4　设 X 是一线性赋范空间,若 X 中的任何 Cauchy 序列 $\{x_i\}$ 都有极限,且极限在 X 中,则称 X 为 Banach 空间。

所谓 Cauchy 序列,是指序列 $\{x_n\}$,当 $m,n\to\infty$ 时,有 $\|x_n - x_m\| \to 0$。

上述极限实际上是按范数收敛,即在线性赋范空间中,若 $\min\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$,则称序列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x(或称为强收敛)。

定义 1.4 中的 Cauchy 序列按范数收敛于 X 内的一点,此时称 X 是按范数完备的线性赋范空间。完备的赋范线性空间称为 Banach 空间。

1.2.4 Hilbert 空间

定义 1.5 设 X 是实数或复数域上的线性空间，如果对 X 中的任何两个元素 f,g，都有唯一的数 $\langle f,g\rangle$ 与之对应，且满足

(1) 共轭对称性：$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$；

(2) 线性：$\langle \alpha f+\beta g,h\rangle = \alpha\langle f,h\rangle+\beta\langle g,h\rangle,\quad \alpha,\beta\in\mathbf{C}$；

(3) 非负性：$\langle f,f\rangle \geqslant 0$，且 $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f=\theta$，

则称 $\langle f,g\rangle$ 为 f 与 g 的内积，称 X 为内积空间。

在内积空间，由内积可以导出范数

$$\| f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} \tag{1.6}$$

它满足范数公理(1)，(2)，(3)。

关于内积和范数之间还有以下三个公式：

Cauchy - Schwarz 不等式：

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 \tag{1.7}$$

式中，$\|\cdot\|$ 由式(1.6)确定。

平行四边形公式：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{1.8}$$

式中，$\|\cdot\|$ 由式(1.6)给出。

极化恒等式：

当范数满足平行四边形公式时，由范数可以表示内积

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{i}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2) \tag{1.9}$$

特别地，在实空间有

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{1.10}$$

可以证明，上面给出的内积 $\langle x,y\rangle$ 满足内积公理。

定义 1.6 若内积空间 X 按范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 是完备的，则称 X 是 Hilbert空间，简记为 H 空间。

Hilbert 空间是 Euclid 空间的自然推广。

例 1.9 (1) 在线性空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中，定义内积为

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \qquad f,g\in L^2(\mathbf{R}) \tag{1.11}$$

由内积导出的范数

$$\|f\| = \left[\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2} \tag{1.12}$$

可以证明，$L^2(\mathbf{R})$ 按此范数是完备的，因此 $L^2(\mathbf{R})$ 是 Hilbert 空间。

(2) 在 l^2 中，定义内积为

$$\langle c,d\rangle = \sum_n c_n \bar{d}_n, \quad \{c_n\},\{d_n\} \in l^2 \tag{1.13}$$

由它导出的范数是

$$\| c \| = \left[\sum_n |c_n|^2\right]^{1/2} \tag{1.14}$$

1.2.5　正交分解与最佳逼近

在内积空间中，任意两个元素 x，y 是正交的，由它们的内积 $\langle x, y\rangle = 0$ 来定义，这与解析几何中的情形一样。x 与 y 正交，记为 $x \perp y$。

定义 1.7　设 M,N 是某内积空间的两个子空间，若对 $\forall x \in M, \forall y \in N$，恒有 $x \perp y$，则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$。

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中，定义内积为两个向量的点积。空间点 $\boldsymbol{x}$ 到平面（如 XOY 面）的投影 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \perp M$，于是有 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0$。若记 $\mathbf{R}^3$ 中与 M 正交的所有元素全体为 $M^{\perp}$，称 $M^{\perp}$ 为 M 的正交补。显然 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \in M^{\perp}$，$\boldsymbol{x}_0 \in M$，若记 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$，则有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0 \tag{1.15}$$

式(1.15) 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的正交分解。此外正交投影还具有如下性质：

$$\| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \| = \inf_{y\in M} \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \| \tag{1.16}$$

上述情形可以推广到 Hilbert 空间，由于 Hilbert 空间是一种完备的内积空间，H 中的任意两个元素的正交性、两个子空间的正交性及任意元素 x 的正交分解，与前述情形完全一样。

定理 1.1　（投影定理）　设 M 是 H 空间中的闭子空间，则对 $\forall x \in H$，M 中必存在唯一的 x_0（称为 x 在 M 上的投影）及唯一的 $x_1 \in M^{\perp}$，使

$$x = x_0 + x_1 \tag{1.17}$$

（证明见泛函分析教材）x 的表示式(1.17) 是唯一的，该定理也称为正交分解定理。

定理 1.2　（最佳逼近定理）　设 M 是 H 空间中的闭子空间，则对 $\forall x \in H$，M 中必存在唯一的 x_0（称为对 x 的最佳逼近元），使得

$$\| x-x_0 \| = \inf_{y\in M} \| x-y \| \tag{1.18}$$

定理 1.3　设 M 是 H 空间的闭子空间，$x \in H$，如果 M 中的某个 x_0 为 x 的最佳逼近元，则充分必要条件为

$$(x-x_0) \perp M$$

这三个定理都不给出证明过程。需说明的是，前两个定理无论在理论上还是应用上都是很重要的。综合三个定理可以得出如下结论：对 H 中的任一元素 x，M 中对 x 的最佳逼近元就是 x 在 M 上的投影。

1.2.6 $L^2(\mathbf{R})$ 中的投影与逼近

由例 1.9 可知，$L^2(\mathbf{R})$ 是典型的 Hilbert 空间，因此把 1.2.5 中所叙述的内容在 $L^2(\mathbf{R})$ 中进一步描述。

定义 1.8 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中，设 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ 是一组非零元素，如果对于其中任何两个 φ_i,φ_j $(i\neq j)$，都有 $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=0$，则称 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 为正交系。

定义 1.9 设 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的正交系，如果每个 φ_i 的范数都为 1，则称其为规范正交系（或标准正交系）。即 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 为规范正交系，充要条件是

$$\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$$

式中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

例 1.10 在 $L^2(-\pi,\pi)$ 中，内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\overline{g}(t)\mathrm{d}t$$

则三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots$$

是规范正交系。

研究无限维空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中的元素在有限维子空间上的投影与逼近，在实际应用中是很重要的。因为在实际中，无限维空间中的问题基本上都是通过有限维空间近似进行的，所以，在有限维空间寻求最佳逼近元的方法具有重要意义。

定理 1.4 （最佳逼近定理） 设 M 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的有限维子空间，$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$ 为 M 的规范正交基，$x\in L^2(\mathbf{R})$，则对任何一组数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，恒有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k\right\|\leqslant\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\right\| \tag{1.19}$$

证明 由定理条件可知，M 由 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 张成

$$M=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$$

利用定理 1.1 和定理 1.2，对 $\forall x\in L^2(\mathbf{R})$，$M$ 中必存在唯一元素，即 x 在 M 中的投影 x_0，使得式(1.18) 成立，即

$$\|x-x_0\|\leqslant\|x-y\|,\quad \forall y\in M \tag{1.20}$$

由于 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 M 的规范正交基，因此

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i \tag{1.21}$$

由前面讨论可知，$(x-x_0)\perp M$，即 $\langle x-x_0,\varphi_j\rangle=0$，$j=1,2,\cdots,n$，将式(1.21) 代入，有

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i , \varphi_j \rangle = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

由上式可知

$$\langle x , \varphi_j \rangle = \langle \sum_i c_i \varphi_i , \varphi_j \rangle = c_j, \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

将 c_j 代入式(1.21)，有

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \langle x , \varphi_k \rangle \varphi_k$$

再将 $y \in M$ 写成 $y = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$，将 y 及上面 x_0 的表达式代入式(1.20)，即证得式(1.19)成立。

下面讨论用 $L^2(\mathbf{R})$ 中有限维子空间 M 逼近 $L^2(\mathbf{R})$ 时最佳逼近元的计算方法。设 M 的基为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，最佳逼近元的一般提法是，对任一 $x \in L^2(\mathbf{R})$，要求出一组数 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，使得

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \| \leqslant \| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \| \tag{1.22}$$

式中，$\{c_k\}_{k=1}^{n}$ 为任意一组数。

设 x 在 M 中的最佳逼近元为 $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$，由定理 1.3，有 $(x - x_0) \perp M$，或写成

$$\langle x - x_0 , x_i \rangle = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.23}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x_k , x_i \rangle = \langle x , x_i \rangle, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.24}$$

方程组式(1.24)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \langle x_1 , x_1 \rangle & \langle x_1 , x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 , x_n \rangle \\ \langle x_2 , x_1 \rangle & \langle x_2 , x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 , x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n , x_1 \rangle & \langle x_n , x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n , x_n \rangle \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为 Gram 矩阵。由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，$\det\boldsymbol{A} \neq 0$，则方程组的唯一解 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，可保证 $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ 是对 x 的最佳逼近元。

在上面的讨论中，由于基函数的取法具有任意性，因此当 M 的维数 n 较大时，Gram 矩阵的行列式计算量过大。当基函数取为规范正交基时，Gram 矩阵成为单位矩阵，计算量大大减少。此时方程组式(1.24)的解是

$$\alpha_i = \langle x , x_i \rangle, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.26}$$

1.3 线性算子与线性泛函

本节简单介绍算子与泛函的概念。

算子就是映射。它是普通函数定义中的数集到数集映射概念的推广。通常把线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的映射称为算子，用 T 表示（也常用 A 表示）。T 的定义域和值域分别表示为 $D(T)$ 和 $N(T)$。

1.3.1 线性算子

定义 1.7 设 X,X_1 都是赋范线性空间，$T:D(T)\to N(T)$，$D(T)\subset X$，$N(T)\subset X_1$，如果对任意的 $x,y\in D(T)$，$\alpha\in\mathbf{C}$，都有

$$\left.\begin{aligned}T(x+y)&=Tx+Ty\\T(\alpha x)&=\alpha Tx\end{aligned}\right\}\tag{1.27}$$

则称 T 为线性算子。例如微分算子、积分算子、由矩阵定义的线性变换等。

对于线性算子 T，如果存在正数 M，使得对于 $\forall x\in D(T)$，有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|\tag{1.28}$$

则称 T 为有界线性算子。

如果对任意的 $x_n,x\in D(T)$，当 $x_n\to x$ 时，有

$$Tx_n\to Tx,\qquad n\to+\infty$$

则称 T 为连续算子。

1.3.2 线性泛函

线性泛函是一种特定的算子，即当线性算子 T 的值域为数域时，该算子称为线性泛函，泛函一般用 f,g,h 等表示。类似算子，泛函有连续泛函、有界泛函等。

例 1.11 对于任意的 $x(t)\in C_{[a,b]}$，

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

是 $C_{[a,b]}$ 上的线性泛函。

例 1.12 设 $C^1_{[a,b]}$ 是 $[a,b]$ 上连续可微函数全体构成的赋范线性空间，对任意 $x(t)\in C^1_{[a,b]}$

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t_0),\qquad t_0\in[a,b]$$

为 $C^1_{[a,b]}$ 上的线性泛函。

[redacted]

1.4　Fourier 级数与 Fourier 积分

1.4.1　Fourier 级数的复指数形式

从数学分析中知道，一个以 T 为周期的函数 $f(t)$，若在区间 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄氏条件（即连续或只有有限个第 1 类间断点和只有有限个极值点），则

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),\ t\ \text{为}\ f(t)\ \text{的连续点} \tag{1.29}$$

式中

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1.30}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t \tag{1.31}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.32}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.33}$$

式(1.29) 表明，周期为 T 的函数在满足狄氏条件后，就可以由函数系

$$\{1,\sin\omega t,\cos\omega t,\sin2\omega t,\cos2\omega t,\cdots\} \tag{1.34}$$

表示。在函数空间 $C_{[a,b]}$ 上定义内积

$$\langle x,y\rangle=\int_b^a x(t)\bar{y}(t)\mathrm{d}t$$

后，就可以验证函数系式(1.34) 中任意两个函数的内积，例如

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin m\omega t\ \cos n\omega t\,\mathrm{d}t=0$$

因此，函数系式(1.34) 是正交函数系，它构成了相应函数空间的正交基，式(1.29) 是唯一的。

为了应用方便，式(1.29) 常化为复指数形式。利用 Euler 公式

$$\cos t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\qquad \sin t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

可将式(1.29) 化成复指数形式的 Fourier 级数，即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \tag{1.35}$$

式中

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.36}$$

式(1.35)说明，周期函数 $f(t)$ 被表示成许多不同频率的谐波（正弦波）分量的叠加，c_n 就是反映频率为 $n\omega = n\frac{2\pi}{T}$ 的谐波成分。c_n 称为 $f(t)$ 的离散频谱，$|c_n|$ 为离散振幅频谱，$\arg c_n$ 为离散相位谱。此外式(1.35)还说明，$f(t)$ 可以与 Fourier 序列

$$\{\cdots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \cdots\}$$

一一对应。这样就可以把分析函数 $f(t)$ 转化为分析系数序列。

1.4.2 Fourier 变换

对于一个非周期函数 $f(t)$，是否能像 1.4.1 那样表示成不同频率的谐波叠加呢？

设 $f(t)$ 为非周期函数，如果它在任何有限区间上满足狄氏条件，且绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$，此时可以把 $f(t)$ 看做周期 T 无限增大的周期函数，利用式(1.35)和式(1.36)，且令 $\omega = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$，有

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) = \lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} = \\ &\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{+\frac{\pi}{\Delta\omega}} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}\right]\Delta\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{1.37}$$

式(1.37)称为 Fourier 积分公式。当 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处间断时，取

$$f(t) = \frac{f(t_0+0) + f(t_0-0)}{2}$$

记

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.38}$$

则式(1.37)成为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.39}$$

定义 1.8 称式(1.38)为 $f(t)$ 的 Fourier 变换，记为 $F(\omega)$ 或 $\hat{f}(\omega)$。

从式(1.38)和式(1.39)可以看出，$f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 可以用积分运算相互表示。式(1.38)将以时域（或空间）变量 $t \in (-\infty, +\infty)$ 为自变量的函数 $f(t)$ 化为以频率 ω 为自变量的

[redacted]