

国家“十五”重点图书

“探索科学的艺术——科学方法论”丛书

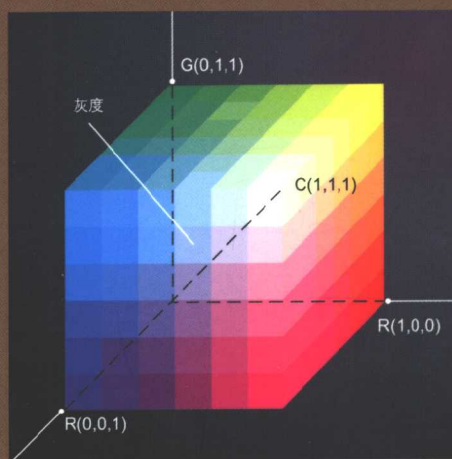
丛书主编 路宁 刘跃进

通向完美的桥梁 ——数学方法谈

韩正之 著

THE ART OF
EXPLORING
SCIENCE

Mathematical
Methodology



上海交通大学出版社

国家“十五”重点图书

“探索科学的艺术——科学方法论”丛书

通向完美的桥梁

——数学方法谈

丛书主编 路 宁 刘跃进

韩正之 著



上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书共计 18 节,分别以科学史上著名的例子引出相应问题,寓理于例,形象地把数学方法的各部分内容穿插于浅显易懂的常见问题之中,对数学方法的定义、数学模型的分类及其建立等做了精辟的论述,综述了数学用于科学研究中的方法,与传统的讲法不尽相同。

本书是大中学生培养科学素养有效的读物,也是科技工作者与自学者很好的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

通向完美的桥梁:数学方法谈/韩正之著. —上海:
上海交通大学出版社, 2006

(探索科学的艺术:科学方法论丛书)

国家十五重点图书

ISBN 7-313-04213-2

I. 通 ... II. 韩 ... III. 数学方法 IV. 01-0

中国版本图书馆CIP 数据核字(2006)第 003308 号

通向完美的桥梁

—数学方法谈

韩正之 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 张天蔚

上海锦佳装潢印刷发展公司印刷 全国新华书店经销

开本: 890mm×1240mm 1/32 印张: 6.25 字数: 174千字

2006年4月第1版 2006年4月第1次印刷

印数: 1-3050

ISBN7-313-04213-2/O · 195 定价: 15.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

科学方法是科学的灵魂，是科学家与科学对象之间的桥梁和通道。从一定意义上说，一部科学史就是一部科学方法不断丰富发展的历史，就是一部科学方法的进化史。科学革命从本质上说就是科学方法的革命。高明的导师在指导博士研究生时，总强调传授方法过于告诉结论就说明了这个道理。科学方法是科学的重要基础和组成部分，是科学活动得以开展的必要条件，是科学水平发展的标志。“工欲善其事，必先利其器”。了解和掌握科学方法对于了解和掌握科学具有十分重要的意义，对推动科学与社会的发展也具有重要的意义。因此，自科学产生以来，人们总是花极大的力量来关注和研究科学方法，于是形成了一门专门研究科学方法的学问，这就是科学方法论。为了向广大读者介绍科学方法，了解直至树立科学的方法和理念，正确把握科学与非科学及反科学的界限，坚持正确的科学观和科学方法论，我们编写了这套《科学方法论》丛书，将正书名起为《探索科学的艺术》是希望强调方法在获得正确结论中的独特的作用。

科学是什么？

这好像是一个不成问题的问题。其实不然，它是一个争论得非常激烈的问题，直到现在争论仍在进行，人们从各自的角度在不同层面上理解科学这个概念。一般可以从三个层面对科学进行描述：科学是系统化的知识；科学是一种社会活动；科学是一种社会建制。第一种描述是从科学的内部进行刻画的，后两种则是从科学的社会价值的角度进行刻画的。但是，作为一个科学工作者，我们似乎应当从综合的高度、尽可能从较全面的方位来处理这个问题。这样做应当是可能的。从这样的理念出发，科学是不是可以做这样的表述：科学是人类运用科学工

具作用于科学对象的过程及作用结果的统一。因而科学是一个历史范畴。

科学方法是什么？

这里讲的科学方法不是指科学的方法，而是指科学研究的方法，是人们为达到一定的科学目的所选取的手段、途径或活动方式和规范。科学方法是人们在科学研究中所遵循的途径和所运用的各种方法和手段的总称。从科学方法论讲科学方法通常指各个科学部门中较为通用的一般的科学研究方法，是人们揭示客观世界奥秘、获得新知识、探索真理的工具。从这个意义上讲，科学方法必然是科学的方法，它具有程序化的特点和自觉能动性的特点。科学方法是正确反映客体的通道，科学方法为科学的发展定向开路，为成功的取得作铺垫。科学方法使科学认识程序化、规范化和最优化，在纷繁复杂的科学研究中，科学方法可以提供一条正确的路径和思维定式。

采用合适的科学方法开展研究就会获得较高的成功率。一般来说，科学方法、技术创新，往往可能促成科学技术的重大发现和发明。一些科学家、发明家能够取得重大成就，是和他们在方法上锐意进取密切相关的。从历史上来看，科学是随着研究方法所获得的成就而前进的。因此传播和普及科学方法，加强对公众科学研究、技术开发能力的培养，是提高公众的科技素质、造就一代新人的需要。

科学方法是怎样分类的？

科学方法是具有一定结构的一个体系，按照不同的标准可以做不同的分类。这些标准之间也可能有交叉。哲学方法是层次最高、应用最普遍的方法，能够运用于以自然界、社会和思维为研究对象的所有科学部门。往下是一批基本的通用的科学方法，如逻辑方法、数学方法、系统方法、实验方法等。再往下是各个具体科学领域的科学方法，如生物学的方法、地学的方法等。科学方法还可以按照适用范围的大小，区

分为一般科学方法和特殊科学方法。一般讲来,越是科学研究的低层,要掌握的科学方法越是特殊;而越是科学研究的上层,要掌握的科学方法越一般。这是因为具体的工作对象明确,可变性小,于是更需要技巧,而上层工作面宽,需要全局性的、路线性的指导,于是更多的是涉及原则问题。

按照认识层次可有经验性科学方法、理论性科学方法等。经验性科学方法是获取经验材料或科学事实的一般方法,如观察方法、调查方法、测量方法等。理论性科学方法,包括分析、综合、归纳、演绎、类比等逻辑方法以及假设方法、思想实验、理想化方法等。横向学科方法指的是由数学、一般系统论、信息论等横向学科抽取出来的一般方法,如系统性方法、黑箱方法、反馈方法、信息方法等。特殊科学方法是个别科学领域或学科所运用的各种特殊方法,如物理中的光谱分析法,化学中的电解法,生物中的同位素示踪法、医学中的免疫法,心理学中的精神分析法,人口学中的人口普查法等。现代科学方法是建立在实践经验和经实践检验过的科学理论的基础上的。

科学研究离不开各种思维活动,人类思维所遵循的方法也是科学方法。思维方法是人们认识世界和改造世界的精神活动形式、方式和程序的总称。人的一切活动,无论认识活动还是实践活动,都离不开思维和思维方法。思维方法的类型是与思维类型相对应的。按照思维活动所运用的信息形式,思维方法区分为抽象思维方法和意象思维方法。按照思维结构的程式化程度,思维方法区分为逻辑思维方法和直觉思维方法。按照思维过程的方向性,思维方法区分为逆向思维方法、侧向思维方法、发散思维方法、收敛思维方法等。限于本丛书的既定目标,我们没有专门介绍思维方法的计划,不过读者从丛书涉及的内容可以或多或少体会到一些思维的规律。

科学方法与非科学方法

科学方法与非科学方法之间没有不可逾越的鸿沟。科学方法是一个边缘不清晰的、但又是一个具有稳定内核的家族。之所以这样说,首

先是因为科学与非科学之间是没有清晰的界限。特别是 1962 年 T·库恩的《科学革命的结构》出版以来,历史主义的观点对于科学与非科学的界限的讨论提出了社会文化的标准,人们对于这个问题的理解更增加了新的内容。现在可以看出,科学与非科学的界限是相对的。在牛顿体系下的科学概念,在爱因斯坦体系下就可能会变成非科学概念;在欧几里得的几何里过直线外的一点只可以作一条直线与已知直线平行,但是在非欧几何里,结论就完全不同,有的认为可以作至少两条,有的又说一条也不存在。因此,科学方法与非科学方法之间也没有清晰的界限。例如过去认为人多好办事的观点在软件工程里却行不通,很多软件设计过程证明,增加人的参与可能延缓工程的完成。是否科学一切应当看条件,在一定条件下的科学方法,当条件发生变化时,就可能变成非科学方法,反之亦然。在科学与非科学之间有着一个广阔的融合的地带。在这里,不同领域的方法之间相互过渡、转化表现为科学方法边界的不清晰。这也是正常的和必需的。在存在非此即彼的地方要充分注意到亦此亦彼。但是,我们在这里要强调的是,作为科学,以下几点是必须具备的不变的要素或内核:理性、真理、逻辑、可重复。

科学方法的历史观

科学方法是一个历史的概念,科学方法家族是一个不断新陈代谢的生长的家族。

从宏观历史上看,科学方法是一个不断发展和生长的家族。所以,我们要充分注意从历史的角度来把握科学方法,特别要注意从科学方法的整体上来把握它。在这个过程中,有的方法得到了发展,有的方法被历史所淘汰。但是,有一个逻辑线索是不变的,存在着历史的逻辑不变性:由低向高,由简到繁,由单一到多元,由不成熟到成熟。科学方法的历史与科学的历史是同步的,随着科学的发展而发展,它是一个无限展开的系列。

任何历史的否定都是辩证的否定,对于科学方法来讲更是如此。不管是淘汰也好,发展也好,总是一种扬弃,精华被保留下来,糟粕被剔

除。在区别精华和糟粕的过程中,方法会显示出特别的重要,就像风力和风向对于打谷场上的扬场,起着关键的作用。

科学方法形成的多个途径

科学方法的形成有多种方式方法,可以由科学研究进展或已有科学成果的转化,由非科学方法的转化,由已有科学方法的发展等,但是不管怎样,它总是源于科学实践。科学方法与科学实践是紧密相连的。科学方法不是游离于科学之外的一种框架。相反,它是融于科学之中的,只是我们在研究问题的时候对其做了抽象的处理而已。科学方法的形成是一个创新的过程,同时也是一个与已有方法的交流和交锋的过程。在这个过程中,新的科学方法得以发展和成熟。此外,不同的科学方法之间还存在移植、渗透作用,在交叉中产生新的科学方法。

与实践不同的是科学方法都有一个提升过程,它是从很多的实践活动中抽象出来又在实践中得到证明是行之有效的一种规律性的东西。即使是特殊的科学方法也有其普适性。同时,即使是一般的科学方法,在具体实施时,也要根据实际情况作适当的变化。一成不变的科学方法是没的,而这种美好的愿望本身就是不科学的。

科学方法论的发展趋势

有的学者指出,目前在西方科学哲学界,科学方法论正处于一个发展的低谷。科学方法论面临五种困境:对归纳逻辑的反对、反对方法、当代科学方法论家的自悖、元方法论的困境以及对评价规则的质疑。同时指出认清这些困境的目的在于寻求科学哲学更深层的理论变革和发展机遇。这个问题确实应当引起我们的注意。在 20 世纪 80 年代,也许是十年浩劫造成积压的喷发,我国在科学方法论方面的研究曾经出现了一个高潮,出现了以舒炜光教授为突出代表的一批学者,他们的工作极大地推动了中国科学哲学的发展,推动了中国科学方法论的发展。虽然目前在科学方法论的研究中出现了上面所说的困境和问题,

但是,这并不能说科学方法论的研究已经停顿;相反,也许这正是科学方法论获得更大发展的契机。

进一步,进入新世纪以来,我国的经济正在蓬勃发展,科教兴国已经确定为基本国策,可望在未来的几十年中,中国的经济会有较快的发展,科学技术作为第一生产力必然地会获得优先发展。巴西的足球踢得好是因为足球的普及,中国将青少年派到巴西去学足球,很大程度上是为了感受这种全民皆球的氛围。一样的道理,随着科学的优先发展,科学方法将得到普及,形成一种氛围,这必定导致科学方法更快的发展。

本丛书的立意

在有关科学方法的书籍和文章大量问世的今天,如何为广大公众献上一套通俗的、有用的科学方法论的书并不是一件容易的事。选取最重要的方法,以全新的通俗方式进行撰写,是我们一贯的想法,也是本丛书的宗旨。但真正做起来却并不容易,甚至具有相当的挑战性。

我们这套书定位在讲述科学方法的普及类读物,由以下四种方法组成:数学方法、系统科方法、逻辑方法、实验方法,相应的书名分别为《通向完美的桥梁——数学方法谈》、《遨游系统的海洋——系统方法谈》、《攀登理性的阶梯——逻辑方法谈》、《走进实验的殿堂——实验方法谈》。为什么选取这四个方法呢?这是因为:我们认为,任何科学都是一个逻辑的系统,都离不开逻辑的构架。首先世界是一体化的,任何科学必须放在与他周围共存的环境才能检验出它的正确及意义。任何一个正确科学结论都离不开实验的检验,而且实验常常会提供科学研究的课题。任何科学都离不开数学,正如马克思说过的,任何科学只有应用数学才能达到完美的地步。

古希腊的亚里士多德创立的形式逻辑奠定了逻辑学的基础,建立起三段论式逻辑推理方法,创立了相应的逻辑工具——公理化方法。欧几里得运用公设、公理,演绎出了一本《几何原本》,成为万代师表。近代以来,公理化方法被进一步地形式化,在科学的发展中发挥了重要

的作用,是公认的重要方法。

英国人罗吉尔·培根首提“实验科学”,即运用实验方法的科学。后来,达·芬奇、伽利略又进一步运用了实验方法。弗兰西斯·培根则成为“英国唯物主义和整个现代实验科学的真正始祖”,他主张把学者传统与工匠传统结合起来,把理论与实际结合起来,通过记录一切可以得到的事实,进行观察、实验,加以排列、分类、归纳,最后总结出事物的内在联系。

如果将科学分成公理科学和实验科学,那么这两种方法分别是它们的一般方法。

科学发展到现代,系统地看待和处理科学问题已经成为一种十分重要的科学方法。在大科学中,众多的要素和众多的关系只有用系统的思维和方法才能准确地把握和描述,特别在科学日益分化与综合的发展趋势下,系统性越来越具有重要的意义。

科学史表明,数学是科学研究和科学表达的重要手段。科学,特别是自然科学大多离不开数学手段,离不开数学的表达。数学能使科学变量的依存关系有一个更清晰的表述,同时丰富的数学成果为科学研究提供了大量现成的结论。当今各行各业普遍应用了数字计算机,于是数学也就无所不在,数学方法也就无所不用了。

如果将科学研究分成个体研究与整体研究两个层次,其中个体研究是探讨对象本身的属性,整体研究是考虑对象在外界作用的变化,那么数学方法和系统方法将起着不可替代的作用。

正是基于上述认识,我们在科学方法论的宝库里,重点选取了上面四个方面作介绍,这并不是说其他方法不重要,这纯粹是我们在设计本丛书时的自我选择。是一个个性化的问题,而不是一个科学逻辑的问题。也许别的学者会作其他的选择和设计,这是完全正常的。

本丛书的特点

作者认为本丛书有如下值得一提的特点。

科普定位。本书是明确定位在科学方法的普及上,用大众可以接

受的方式介绍最基本的科学方法及历史。

为大众读者服务的宗旨。把科学方法介绍给大众,让大众掌握科学方法,是本丛书的基本宗旨。

例证与理论结合。本丛书特别注重例证的价值,注意在大量的科学史中选取合适的例子,用以说明抽象的科学方法论的原理。

寓道理于故事之中。本丛书特别强调要用故事说话,尽可能多地写一些故事,以求雅俗共赏。

专家执笔。本丛书的作者大部分是专门从事科学哲学、科学学和实际科学研究的专家学者,他们对科学方法问题有着深刻的理解和研究,并有多部著作出版,同时还对科普有着独特而深刻的理解。

手法灵活。本丛书采取灵活的表现方式说明科学方法的原理,表现手法丰富、灵活。

读者定位。读者定位为高中以上的各类人群,因此可以有广阔的市场。

体例新颖。尽可能采取独特的表现方法和版面方式,使读者耳目一新。

我们在上海交通大学出版社的大力支持下,编撰并出版了这套《探索科学的艺术——科学方法论》丛书。囿于我们的知识与能力,不足之处,恳请读者赐教。

路 宁

2005年10月

目 CONTENTS录

1. 什么是数学方法?	1
2. 数字化的世界	13
3. 越是精确越好吗?	24
4. 有时候就是这样简单	35
5. 运算——数学独有的优势	45
6. 让试验更有效的设计	53
7. 这些数量有关吗?	64
8. 摆平桌子与商人过河的数学证明	79
9. 用线性方程描述的静态模型	88
10. 画在图上的模型	96
11. 不确定情况下的静态模型	107
12. 有记忆的动态过程	117
13. 离散时间系统	125
14. 状态空间——内部运动的世界	135
15. 从厚到薄与从薄到厚	145
16. 让数据自己来建立模型	155
17. 由灯管寿命引出的课题	164
18. 关于四色问题的故事	173
编后记	183

1 什么是数学方法?

在最广泛的意义上说,数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,使得人类的思维得以运用到最完善的程度。

——M·克莱因

1.1 什么是数学方法?

什么是数学方法?简单地讲,用数学作为工具来解决问题的方法称为数学方法。因此要理解数学方法,应该先对数学有个大致的认识。

在古代,无论是巴比伦、埃及、希腊,还是印度或中国,除了计数、加减乘除四则运算等在日常生活有广泛的使用外,数学总是一种奢侈,只有达官贵人才能“养”得起数学。数学被囿于宫廷和消遣之中,很少谈得上是为了实际的应用。这种现象的出现与当时的生产力发展水平有关。一旦科学在生产力中占有一定的比重后,数学必然地会从那种禁锢中解放出来。16世纪以后,数学与生产实际的结合逐渐密切,逐步成为科学研究和指导生产实践的重要工具^①。尤其是近十多年来,计算机以一种不可抗拒的态势,进驻各行各业,其“无所不在”的作用已经使得人们感到须臾不可离开了。如果要想理解计算机在人类文明中的作用,那么只要回想2000年元旦前夜那场警惕“千年虫”肆虐的全球性的活动,就会有体会了^②。当计算机的硬件条件具备以后,它在各个领域的

① M·克莱因称它是数学精神的复兴。见《西方文化中的数学》,M·克莱因著,复旦大学出版社,2004

② 1999年年底全国各单位成立防治千年虫委员会,作者还作为专家于元旦前夕在单位值班。

五彩缤纷的应用完全取决于算法设计。没有数据处理、计算方法、算法分析这些应用数学的分支,就不会有计算机的应用。所以可以说,计算机用到那里,数学就出现在那里,今日的数学已经因此而“无所不在”了。

传统上,数学被定义为研究数和形的科学,这是因为经典的数学研究主要集中在代数和几何两个学科上,而这两门学科正好对应着数和形两方面的内容。然而到了 19 世纪后期,历史上的数学范畴得到了极大的拓展,它研究的内容已经很难用数和形来概括了。例如近代代数学,它研究抽象的代数集合,如群、环、域等;又如概率统计学,它研究的是不确定的现象,特别是统计学,它更多的是研究由个体来推断整体的方法和推断结果的可靠程度;再如运筹学,它也是研究方法的,讨论怎样才能得到更好的解。因而,今天的数学,内容已经十分广泛。

现在,有人称数学为研究量的科学,也有人称它为研究广义量的科学。有人将它列入艺术,因为它具有简洁美和统一美;也有人将它与哲学并列,称为是一种研究方法论的科学。各种说法争奇斗艳,不一而足。作者希望引述美国当代数学家 M·克莱因的如下评价:“数学不仅是一种方法、一种艺术或者一种语言,更主要的是一门有着丰富内容的知识体系,其内容对于自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用,同时影响着政治家和神学家的学说;满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想;甚至可能有时以难以觉察到的方式但无可置疑地影响着现代历史的进程”^①。这段话与其说是定义,不如说是描述,而且是恰如其分的描述,它有助于我们对数学的认识。

很早以前,人们就将数学作为学习理科和工科必修的基础课程;但是,到了 21 世纪,现代的大学生,不管学农、工、商、医的,还是学法、文、管理、艺术的,都要修高等数学,因为这些领域里的研究不但需要数学知识,而且需要数学方法。

数学方法有两个范畴。一是指数学家研究数学的方法,例如普遍使用的公理化方法、统计学方法,或者针对具体问题的筛法、摄动法等,这些

^① 摘自“数学与文化——是与非的观念”见《数学与文化》,邓东皋等编,北京大学出版社,2001 第三次印刷。

方法逻辑严谨,推断科学,已经成功地被其他学科广泛地应用;另一是指采用数学来解决其他学科问题的方法。本书讲的数学方法主要指后一种,因为我们的目的是要推动在各个领域中应用数学去解决具体问题。

数学方法的应用有三个层次:最基本的层次是分析对象的数量特征,通过研究这些数量特征而进一步认识对象的本质。第二层次是根据对象的数量特征,将具体问题转化成数学问题,然后用数学去求出问题的解。数学成果汗牛充栋,将问题转化成数学问题后容易利用这些结果,从而方便地获得解答。第三层次则是在问题存在多解的情况下,进一步寻找更优的解。

我们通过一个例子来说明应用数学方法的过程。

托尔斯泰的小说《一个人需要很多的地吗?》中有这样一个情节,富商巴和姆向巴斯基尔人买土地。

“……那么,什么价钱呢?”巴和姆问。

“我们的价钱说一不二,每天1000卢布。”

巴和姆没有听懂。

“每天?这是一个怎样的度量单位啊?一天等于多少俄顷^①?”

“我们,”那人说,“是不会计算这些的,我们只论天出卖,一天你能够围起多少地方,那些地方的土地就都是你的了。价钱呢,就是1000卢布。”

第二天,日出时分,巴和姆准时来到约定地点。巴斯基尔的长者将狐皮帽子放在地上,作为起点。巴和姆奋力向前跑去……眼看太阳就将落山,他踉踉跄跄地走向起点,他必须在太阳落山前回到起点,不然1000卢布就白扔了。就在太阳要在地平线上消失的那一刻,他倒下了,伸手摸到了长者的狐皮帽子。巴和姆终于围成了一块土地。但是他再也没有起来,他死了,累死的。

根据托尔斯泰的描述,巴和姆共走了40俄里,围成如图1-1所示的四边形,面积为78平方俄里。图1-1就是从文字描述归纳而得的数

① 俄顷是俄国古时的土地面积单位,1俄顷等于10930平方米。

量特征(这里采用的是几何形式)。

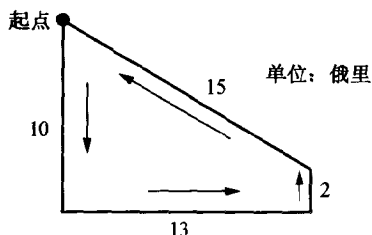


图 1-1 巴和姆围起的土地

如果,巴和姆只是计算一下自己有多少钱,可以走几天,免得到时候出现付不出钱的尴尬,那么他只是在第一层次上应用数学方法。此时他仍然可能为了多围一些地而累死。

如果进一步,巴和姆事先计算一下他一天能够走多少路程:如果平均每小时可以走 v 俄里,一天(日出至日落)有效走路时间为 t 小时,那么一天能走的路长就是 $s=vt$;设计一个围地方案,例如走一个长是 a ,宽是 b 的矩形,使得 $a+b=\frac{s}{2}$,并且将 a 和 b 转换成步数,那么巴和姆就在第二层次上用了数学方法,这时,他至少不再会累死了。

如果想更进一步,巴和姆就需要有一位数学顾问,这时数学顾问就会设计使得走的路程 s 能围出最大的面积来。此时不但可以保证围到土地,而且可以围到最多的土地。这就是在第三层次上运用了数学方法。

现在,这个问题可以用以下的数学式子表示。用 A 表示要求的多边形, ∂A 和 SA 分别表示 A 的周长和面积,那么巴和姆围地问题转换成的数学问题就是

$$\begin{aligned} &\max SA, \\ &\text{s. t. } \partial A = s = vt. \end{aligned}$$

其中的 $\max SA$ 称为目标函数, $\partial A=vt$ 是约束条件。这样的将具体问题转换成数学问题的过程称为建立数学模型。

在有了数学模型之后,数学顾问就会说:这是一个著名的数学问题,称为等周问题,等周问题的解是圆。这样巴和姆就知道了答案。然

后数学顾问就应该协助巴和姆想出办法使得巴和姆走的轨迹是一个圆。在这种方案下,要围起同样大的土地,他只要走 31.3 俄里,以日出到日落为 12 小时计,巴和姆就可以提前 2.6 个小时回到起点。他就能在中午花一小时饱餐一顿,再小憩一小时,然后从从容容地回到起点。

总结上述例子,在第一层次上的数学方法,要求充分掌握对象的数量特征,通过分析这些数量特征来了解对象的内在性质和变化规律。在第二和第三两个层面上采用数学方法的前提是建立数学模型,就是要在分析对象的数量特征以及数量特征之间的相互关系的基础上,建立描述对象某个性或者某个方面变化的数学表达式;然后是求解这个数学表达式,称之为求解。而在第三层次上则进一步在各种解中求得最好的解,这称为优化。

在获得了数学上的解之后,还需要设计具体的方法,使得数学上的解能够应用到具体的问题中去,这个过程称为实现。在上述例子中帮助巴和姆设计走出一个圆的方案就是实现。又如火箭要围绕地球运行,成为地球的卫星,它必须达到第一宇宙速度 7.9 千米/秒;飞船要摆脱地球的引力,像行星一样在太阳系中运行,则必须达到第二宇宙速度 11.2 千米/秒。列出方程、解出这些数据是数学方法的功劳,为了使得飞船达到这些速度采用的多级火箭技术、捆绑式火箭技术等就是实现。实现与具体的问题有关,其过程太富有个性,不容易进行统一的研究,因此数学方法一般只研究建模、求解和优化,而不包括实现这个过程。

在应用数学方法的过程中,建立数学模型是一个难点。首先,大多数实际对象都是一个复合体,受到多种因素的影响,其规律很难掌握。例如化工中的精馏塔,一般输入的是浓度较低的或者纯度不高的液体,要求得到的是浓度和/或纯度较高的溶液。精馏的原理很简单:通过不同的沸点来分离物质,从而使得溶液的浓度或纯度达到要求。但是精馏的工艺却相对复杂:它取决于由塔的构造决定的接触面积、由纯度而决定的回流量和浓度、塔内的温度分布、单位时间母液的流量、触媒的钝化程度等。这些因素不是独立的,而是相互影响和制约的。一旦考虑了这么多的因素之后,建立一个能完全反映精馏过程的模型就变得很困难。人们常常需要在精确和便利之间折中,而且在大多数的时候,