

数学

● 主编 / 叶声扬

高中三年級用

同步分层导学

SHUXUE TONGBU FENCENG DAOXUE

循序渐进保持**同步**

先易后难合理**分层**

重点难点名师**导学**

上海科学技术出版社

主编
叶声扬

数学



同步



分层



导学

(高中三年级用)

让你更出色



上海科学技术出版社

数

学

内 容 提 要

同步分层导学丛书是与教材内容紧密配合的学生同步辅导读物,旨在同步地对课堂内容进行补充,并为学生提供训练机会.本书是其中的一本.

本书按章编写,并将每一章的内容分成若干单元,在每一单元提出学习目标,然后进行例题剖析并配有练习.除个别章节外,练习分为基础型和提高型两类.本书设有章后小结及分层测试,且因为高中三年级用书,所以还设有对高中内容的专题复习以及高考模拟试卷.本书附有全部题目的参考答案.

责任编辑 周玉刚

数学同步分层导学

(高中三年级用)

主编 叶声扬

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行

上海科学技术出版社

(上海钦州南路71号 邮政编码:200235)

新华书店上海发行所经销 常熟市华顺印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 12 字数 275 000

2001年6月第1版 2006年7月修订,第7次印刷

印数: 39 851 - 41 150

ISBN 7-5323-6000-8/G·1344

定价: 13.00 元

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题,
请向承印厂联系调换



这套同步分层导学丛书是以上海市现行教材为依据的学生同步辅导读物,内容紧密配合教材.各分册按年级编写,旨在同步地对课堂内容进行辅导,为学生提供训练机会,并成为课堂教学有益的参考辅导读物.

根据数理化各学科的特点,将每章内容划分为若干单元,每一单元内设置不同的栏目,有学习目标、例题剖析、分层练习等.

学习目标 总结每单元须要掌握的知识及技巧.

例题剖析 精选了一些典型例题.通过分析、解答,使学生能够学会如何灵活运用各种解题技巧.

分层练习 对每一单元内容以试卷形式让学生进行自测训练.试卷分为基础型、提高型两级,适合不同层次的学生选用.

最后对每一章进行**本章小结**,旨在回顾重点、难点,解析一些侧重于整章知识的综合运用的例题,同时配有**分层测试及高考模拟试卷**,这些试卷增设了创新型题目,以满足部分学生的需要.

丛书紧扣教材,内容新颖;开阔学生思路,提高学生素质;让学生花最少的时间,获得最大的收益.

参加本书编写的有:丁伟强、朱文达、李景祥、吴运、胡军、郑芝英等,本书由叶声扬统稿.

上海科学技术出版社

2003年5月

出版说明



目 录

第一章 集合与函数	1
一、集合、命题及函数性质	1
学习目标	1
例题剖析	1
分层练习	4
二、幂、指数、对数函数及函数应用	6
学习目标	6
例题剖析	6
分层练习	9
本章小结	11
分层测试	13
第二章 不等式	17
一、不等式的性质及不等式的证明	17
学习目标	17
例题剖析	17
分层练习	18
二、不等式的解法及不等式的应用	20
学习目标	20
例题剖析	20
分层练习	22
本章小结	24
分层测试	26
第三章 复数	29
一、复数的代数形式	29
学习目标	29
例题剖析	29
分层练习	31
二、(理科)复数的三角形式	33
学习目标	33
例题剖析	33
分层练习	35
本章小结	37
分层测试	40
第四章 数列	43
一、等差数列和等比数列	43
学习目标	43
例题剖析	43
分层练习	45
二、数列极限及数学归纳法	47



学习目标	47
例题剖析	47
分层练习	49
本章小结	51
分层测试	54
第五章 三角	59
一、三角函数	59
学习目标	59
例题剖析	59
分层练习	60
二、解三角形及其应用	62
学习目标	62
例题剖析	62
分层练习	64
本章小结	66
分层测试	67
第六章 立体几何与向量	71
一、直线、平面、多面体	71
学习目标	71
例题剖析	71
分层练习	73
二、向量	76
学习目标	76
例题剖析	76
分层练习	78
本章小结	79
分层测试	81
第七章 解析几何	86
一、直线与圆	86
学习目标	86
例题剖析	86
分层练习	87
二、椭圆、双曲线、抛物线	90
学习目标	90
例题剖析	90
分层练习	91
三、(理科)极坐标与参数方程	94
学习目标	94
例题剖析	94



分层练习	96
本章小结	98
分层测试	100
第八章 排列、组合、二项式定理、概率、统计	106
学习目标	106
例题剖析	106
分层测试	107
第九章 专题复习	109
一、数形结合	109
学习目标	109
例题剖析	109
分层练习	111
二、参数讨论	112
学习目标	112
例题剖析	112
分层练习	113
三、探索与创新	115
学习目标	115
例题剖析	115
分层练习	117
四、实际应用问题	119
学习目标	119
例题剖析	119
分层练习	122
本章小结	124
分层测试	125
高考模拟试卷(一)	129
高考模拟试卷(二)	132
高考模拟试卷(三)	135
参考答案	138



学习目标

1. 理解集合、空集、子集、交集、并集、全集、补集等概念，并能进行集合的交、并、补运算。
2. 理解四种命题形式及其相互关系，理解推出关系及命题证明的意义。
3. 理解充分条件与必要条件的含义，能判别一些简单问题的充分条件与必要条件。
4. 理解函数概念，会求函数值、代数函数的定义域和简单代数函数的值域，会求两个函数的和函数与积函数。
5. 理解函数的单调性、奇偶性的概念，能判断一些简单函数的单调性、奇偶性。
6. 理解函数的最大值和最小值的概念，能求出一些简单函数的最大值或最小值。
7. 会求实际问题中两个变量间的函数关系，利用函数解决简单的实际应用问题。
8. 能利用函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、最大值或最小值等概念来研究简单函数的性质，并能根据性质画出函数的图象。

第一章

集合与
函数

例题剖析

例1 若集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 则实数 m 组成的集合是_____.

分析 本题涉及并集、集合与集合之间的关系等集合知识. 由集合知识我们知道, $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, 这是解决本题的关键. 由于 $B = \emptyset$ 时, 显然有 $B \subseteq A$, 所以, 要对 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 进行分类讨论.

解 $\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$.

若 $B \neq \emptyset$, 则 $m \neq 0$.

$$\therefore x = -\frac{1}{m}.$$

$$\therefore -\frac{1}{m} \in A.$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{m}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{m}\right) + 6 = 0.$$

解方程, 得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = -\frac{1}{3}$.

若 $B = \emptyset$, 则 $m = 0$. 这时 $\emptyset \subseteq A$.



所以 m 的值组成的集合是 $\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

说明 根据题意, 我们还可以进一步推知 $A \neq B$, 故 $B \subset A$. 因此本题还可以有如下解法: 因为 A 的真子集为 $\emptyset, \{2\}, \{3\}$, 所以 B 可以是这三个真子集中的一个. 于是可求得 $m=0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. 故 m 的取值组成的集合是 $\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

例 2 已知函数 $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x + 2$, 分别写出“ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ”的一个充分非必要条件及充要条件.

分析 当 $a^2 - 1 \neq 0$ 即 $a \neq \pm 1$ 时, $f(x)$ 为二次函数; 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -2x + 2$ 是一次函数; 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 2$ 是常数函数. 因此使 $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ 的条件因 a 的取值不同而不同.

解 “ $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta = (a - 1)^2 - 4 \times 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$ ”即“ $a < -\frac{9}{7}$ 或 $a > 1$ ”是“ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ”的一个充分非必要条件. 这是因为“ $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ”表示 $f(x)$ 的图象是开口向上且在 x 轴上方的抛物线, 故 $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$. 但当 $a = 1$ 时, 也有 $f(x) = 2 > 0 (x \in \mathbf{R})$.

由上述讨论, 得“ $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta = (a - 1)^2 - 4 \times 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$ 或 $a = 1$ ”即“ $a < -\frac{9}{7}$ 或 $a \geq 1$ ”是“ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ”的充要条件.

说明 “ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ”的充分非必要条件不是唯一的. 如“ $a = 1$ ”也是“ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ”的一个充分非必要条件. 同样, 在某些问题中, 必要非充分条件也不一定唯一.

例 3 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 为偶函数, 如果点 (x, y) 在函数 $f(x)$ 的图象上, 则点 $(x, y^2 + 1)$ 在函数 $g(x) = f[f(x)]$ 的图象上, 设 $F(x) = g(x) - \lambda f(x)$, 问: 是否存在实数 λ , 使 $F(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上为减函数, 且在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ 上为增函数? 说明理由.

分析 由条件求出 $F(x)$ 的表达式, 再由增、减函数的定义, 通过对每个因式符号的讨论来确定 λ 的值.

解 $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore b = 0$.
 $\because$ 点 (x, y) 在 $f(x)$ 的图象上,
 $\therefore y = x^2 + c$. (1)
 又 $\because g(x) = f[f(x)] = (x^2 + c)^2 + c$, 且点 $(x, y^2 + 1)$ 在 $g(x)$ 的图象上,
 $\therefore y^2 + 1 = (x^2 + c)^2 + c$. (2)
 由 (1)(2), 得

$$y^2 + 1 = y^2 + c.$$

$$\therefore c = 1.$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad F(x) &= (x^2 + 1)^2 + 1 - \lambda(x^2 + 1) \\ &= x^4 + (2 - \lambda)x^2 + 2 - \lambda. \end{aligned}$$

要使 $F(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上为减函数, 则当 $x_1 < x_2 \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 不等式 $F(x_2) - F(x_1) = x_2^4 - x_1^4 + (2 - \lambda)(x_2^2 - x_1^2) = (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2 + 2 - \lambda) < 0$ 成立即可.

$$\therefore x_1 < x_2 \leq -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore |x_1| > |x_2| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, x_1^2 > x_2^2 \geq \frac{1}{2}.$$

$$\therefore x_2^2 - x_1^2 < 0.$$

$$\text{由于 } x_2^2 + x_1^2 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\therefore \text{只要 } 1 \geq \lambda - 2.$$

$$\therefore \lambda \leq 3$$

故 $\lambda \leq 3$ 时, $F(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上为减函数.

同理, 得当 $\lambda \geq 3$ 时, $F(x)$ 在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ 上为增函数. 因此, 同时使 $F(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 为减函数, 在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ 上为增函数的 $\lambda = 3$.

例 4 设 $x \in [-1, 1]$, 求函数 $y = x^2 - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ 的最大值与最小值.

分析 函数 y 的图象(抛物线)的对称轴 $x = \frac{a}{2}$ 的位置随 a 的变化而变化, 因此要对 $\frac{a}{2} \notin [-1, 1]$ 及 $\frac{a}{2} \in [-1, 1]$ 进行讨论, 同时 $\frac{a}{2} \in [-1, 1]$ 时, 还要分 $\frac{a}{2}$ 在 $[-1, 1]$ 上偏左、偏右两种情况讨论.

$$\text{解 } y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}.$$

(1) 当 $\frac{a}{2} < -1$, 即 $a < -2$ 时, 在区间 $[-1, 1]$ 上函数 y 单调递增, $\therefore$ 当 $x = -1$ 时, 函数有最小值 $y_{\min} = f(-1) = 2 + a$;

当 $x = 1$ 时, 函数有最大值 $y_{\max} = f(1) = 2 - a$.

(2) 当 $\frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2$ 时, 在区间 $[-1, 1]$ 上函数 y 单调递减, $\therefore$ 当 $x = -1$ 时, 函数有最大值 $y_{\max} = f(-1) = 2 + a$;

当 $x = 1$ 时, 函数有最小值 $y_{\min} = f(1) = 2 - a$.

(3) 当 $-1 \leq \frac{a}{2} < 0$, 即 $-2 \leq a < 0$ 时, 当 $x = \frac{a}{2}$ 时, 函数有最小值 $y_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$;
当 $x = 1$ 时, 函数有最大值 $y_{\max} = f(1) = 2 - a$.

(4) 当 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, 即 $0 \leq a \leq 2$ 时, 当 $x = \frac{a}{2}$ 时, 函数有最小值 $y_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$, 当 $x = -1$ 时, 函数有最大值 $y_{\max} = f(-1) = 2 + a$.

综上所述, 当 $a < -2$ 时, $y_{\min} = 2 + a, y_{\max} = 2 - a$;

当 $-2 \leq a < 0$ 时, $y_{\min} = 1 - \frac{a^2}{4}, y_{\max} = 2 - a$;

当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $y_{\min} = 1 - \frac{a^2}{4}, y_{\max} = 2 + a$;

当 $a > 2$ 时, $y_{\min} = 2 - a, y_{\max} = 2 + a$.

说明 本例是讨论含字母系数的二次函数的最值,由于字母系数不同的取值范围影响函数的最值,因此要对字母系数的取值进行分类讨论,分类的标准按抛物线的对称轴通过定义区间(偏左或偏右)及不通过定义区间而定.再借助于函数图象的直观性,求得函数的最值.这里既体现了分类讨论的思想,又体现了数形结合的思想,有时也可利用区间的端点和顶点处的函数值来研究.

解分类讨论题,最后的小结是必要的,这主要是为了归纳解题过程中分散得到的结论,同时也有利于检查解题过程中对字母参数进行的分类是否重复或遗漏.

分层练习

基础型

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{y | y = -x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = |x| - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 设全集 $I = \{3, 5, a^2\}$, 集合 $A = \{5, a + 1\}$, $\bar{A} = \{4\}$, 则 $a =$ _____.
3. 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 为偶函数的充要条件是 _____.
4. 函数 $y = \frac{\sqrt{6+5x-x^2}}{\sqrt{x-1}-2}$ 的定义域是 _____.
5. 函数 $y = -2x^2 + 4x - 1$ 当 $x \in [0, 3]$ 时的最大值 $M =$ _____, 最小值 $m =$ _____.
6. 写出一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, 使它在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数又是减函数, 用解析式表示这个函数是 _____.

二、选择题*

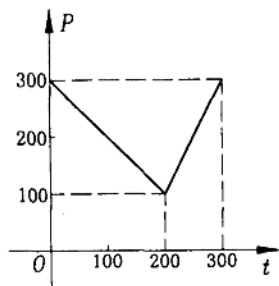
1. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充要条件是()
(A) $\frac{b}{a} > 0$. (B) $\frac{b}{a} < 0$. (C) $\frac{c}{a} > 0$. (D) $\frac{c}{a} < 0$.
2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 4\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 则集合 $A \cap B$ 是()
(A) $x = 3, y = 1$. (B) $(3, 1)$. (C) $\{(3, 1)\}$. (D) $\{3, 1\}$.
3. 下列函数中, 偶函数的个数是()
(1) $y = |x^3|$; (2) $y = (x^2 + x)^2$; (3) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; (4) $y = \frac{x^2(x-1)}{x-1}$.
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
4. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是()
(A) $y = x^{-\frac{3}{2}}$. (B) $y = -x^{\frac{2}{3}}$. (C) $y = x^2 - 2x + 5$. (D) $y = \sqrt{x} - 1$.

三、解答题

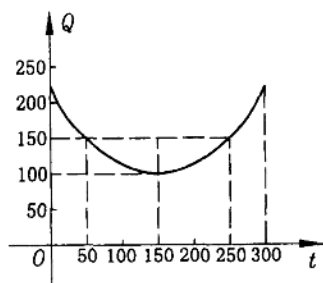
1. 设集合 $A = \{m | \text{二次方程 } mx^2 - 2x + 1 = 0 \text{ 无实根}, m \in \mathbf{R}\}$, $B = \{m | \text{二次方程 } x^2 - 2\sqrt{3}x + m = 0 \text{ 有实根}, m \in \mathbf{R}\}$.
求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.
2. 函数 $f(x) = ax^2 - (4a-1)x + 4$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围.
3. 设 $x \in [a, a+1]$, $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的最大值和最小值.

* 本书中的选择题, 每个小题都给出了代号为 A、B、C、D 的四个结论, 其中只有一个结论是正确的. 把你认为正确结论的代号写在题后的括号内. 下同.

4. 某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从二月一日起的 300 天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用图(1)的一条折线表示;西红柿的种植成本与上市时间的关系用图(2)的抛物线段表示.



(1)



(2)

(第 4 题)

- (1) 写出图(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$;
写出图(2)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$.
(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?
(注:市场售价和种植成本的单位:元/ 10^2 kg,时间单位:天)

提高型

一、填空题

1. 设集合 $A=\{(x,y) \mid y=x^2-1, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y) \mid y=-2x^2+2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B$ = _____.
2. 集合 $A=\{-3, a+1, a^2\}$, $B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 且 $A \cap B=\{-3\}$, 则 a = _____.
3. 设 A 是 B 的充分非必要条件, B 是 C 的充要条件, C 是 D 的充分非必要条件, 则 D 是 A 的 _____ 条件.
4. 已知 $f(x)$ 的定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)-g(x)=x^3-x^2+1$, 则 $g(x)$ = _____.
5. 如果函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+1$, 则 $f(x)$ = _____.
6. 已知函数 $f(x)=x^2+4(a-1)x+6$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 _____.

二、选择题

1. 已知全集 $I=\mathbf{N}$, 集合 $A=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{N}\}$, $B=\{x \mid x=4n, n \in \mathbf{N}\}$, 则 ()
(A) $I=A \cup B$. (B) $I=\bar{A} \cup B$. (C) $I=A \cup \bar{B}$. (D) $I=\bar{A} \cup \bar{B}$.
2. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, “ $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是奇函数”是“ $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积是偶函数”的 ()
(A) 充分非必要条件. (B) 必要非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.
3. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$, 那么 ()



(A) $f(2) < f(1) < f(4)$.

(B) $f(1) < f(2) < f(4)$.

(C) $f(2) < f(4) < f(1)$.

(D) $f(4) < f(2) < f(1)$.

4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2+1) = x^4 + x^2 - 6$, 则 $f(x)$ 在其定义域内的最小值是()

(A) $f(0)$.

(B) $f(1)$.

(C) $f(1) - \frac{1}{4}$.

(D) $f(1) + \frac{1}{4}$.

三、解答题

1. 设集合 $A = \{x | x^2 + (2m-3)x - 3m = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0\}$, 若 $A \neq B$, $A \cap B \neq \emptyset$, 试用列举法表示集合 $A \cup B$.

2. 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$, 求 m 的取值范围.

3. 已知: $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$, 若 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值为 $M(a)$, 最小值为 $m(a)$, $g(a) = M(a) - m(a)$.

(1) 求 $g(a)$ 的解析表达式;

(2) 讨论 $g(a)$ 的单调性, 并求出 $g(a)$ 的最大值和最小值.

4. 某工厂生产的某种产品, 已知该产品每件生产和销售的总成本 b (万元) 与月销售量 x (件) 之间满足关系: $b = 1 + \frac{50}{x}$. 市场调查表明: 月销售量 x 与每件产品的销售价 a (万元) 的平方成正比, 上个月的销售定价为每件 5 万元时, 结果只销售出去 40 件, 问该厂应把销售价定为多少时, 每月才能获得最大利润? 最大利润为多少万元?

二、幂、指数、对数函数及函数应用



学习目标

1. 知道幂函数的概念及一些常见的幂函数的性质与图象.
2. 理解指数、对数的意义, 会熟练地将指数式与对数式互化.
3. 掌握积、商、幂的对数运算性质, 掌握对数换底公式.
4. 理解常用对数的意义, 能用计算器或数学用表求一个正数的常用对数, 知道自然对数.
5. 理解反函数的概念, 会求已知函数的反函数, 掌握函数与它的反函数在定义域、值域以及图象上的关系.
6. 理解指数函数与对数函数的概念及联系, 掌握它们的图象及其性质, 并能作简单的应用.
7. 掌握简单的指数方程和对数方程(不等式)的解法, 能解决简单的实际应用问题.



例题剖析

例 1 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_2 x) = x + \frac{a}{x}$, a 为常数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式及定义域;

(2) 如果 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(3) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 用单调性定义讨论 $f(x)$ 的单调性.

分析 用换元法. 令 $\log_2 x = t$, 可求得 $f(x)$ 的表达式, 再由偶函数定义 $f(x) = f(-x)$, 可求得 a 的值.

解 (1) 设 $\log_2 x = t$, $\therefore x = 2^t, f(t) = 2^t + \frac{a}{2^t}$.

$$\therefore f(x) = 2^x + \frac{a}{2^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(2) $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x) = f(-x)$.

$$\text{即 } 2^x + \frac{a}{2^x} = 2^{-x} + \frac{a}{2^{-x}}, \quad 2^x - 2^{-x} - a \cdot 2^x + a \cdot 2^{-x} = 0.$$

$$\therefore (2^x - 2^{-x})(1 - a) = 0,$$

$$\because 2^x - 2^{-x} \text{ 不能恒为 } 0, \therefore a = 1.$$

(3) 当 $f(x)$ 为偶函数时, $a = 1, f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$.

设 $0 < x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(2^{x_1} + \frac{1}{2^{x_1}}\right) - \left(2^{x_2} + \frac{1}{2^{x_2}}\right) \\ &= (2^{x_1} - 2^{x_2}) + \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} = (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left(\frac{2^{x_1+x_2} - 1}{2^{x_1+x_2}}\right). \end{aligned}$$

$$\because 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, 2^{x_1+x_2} > 0, 2^{x_1+x_2} - 1 > 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore f(x_1) < f(x_2), \text{ 即 } f(x) \text{ 在区间 } [0, +\infty) \text{ 上是增函数.}$$

$$\because f(x) \text{ 为偶函数}, \therefore f(x) \text{ 在区间 } (-\infty, 0] \text{ 上是减函数.}$$

例 2 已知方程 $\lg^2 x - \lg x^2 + 3p = 0$ 有两个实根 α, β .

(1) 求实数 p 的取值范围;

(2) 把 $q = \log_a \beta + \log_\beta \alpha$ 表示成 p 的函数 (此时 $p \neq 0$);

(3) 求 q 的取值范围.

分析 方程 $\lg^2 x - \lg x^2 + 3p = 0$ 的两实根为 α, β , 即方程 $t^2 - 2t + 3p = 0$ 的两根为 $\lg \alpha$ 和 $\lg \beta$.

解 (1) 由 $\lg^2 x - \lg x^2 + 3p = 0$, 得

$$\lg^2 x - 2\lg x + 3p = 0.$$

$\because \alpha, \beta$ 为上述方程的两个实根,

$\therefore \lg \alpha$ 和 $\lg \beta$ 为方程 $t^2 - 2t + 3p = 0$ 的两个实根.

$$\therefore \Delta = 4 - 12p \geq 0, \text{ 解不等式, 得 } p \leq \frac{1}{3}.$$

$$(2) \because \lg \alpha + \lg \beta = 2, \lg \alpha \cdot \lg \beta = 3p,$$

$$\therefore \log_a \beta + \log_\beta \alpha = \frac{\lg \beta}{\lg \alpha} + \frac{\lg \alpha}{\lg \beta} = \frac{(\lg \alpha + \lg \beta)^2}{\lg \alpha \cdot \lg \beta} - 2 = \frac{4}{3p} - 2.$$

$$\text{即 } q = \frac{4}{3p} - 2 \quad \left(p \neq 0, p \leq \frac{1}{3}\right).$$

$$(3) \text{ 由 } q = \frac{4}{3p} - 2, p \neq 0, p \leq \frac{1}{3}, \text{ 得 } p = \frac{4}{3(q+2)} \leq \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{4}{3(q+2)} - \frac{1}{3} \leq 0.$$



即 $\frac{2-q}{3(q+2)} \leq 0, \frac{q-2}{q+2} \geq 0$.

故 $q \geq 2$ 或 $q \leq -2$.

例3 设函数 $f(x) = \log_a(a - ka^x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, k \in \mathbf{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 若 $f(x)$ 的反函数就是它本身, 求 k 的值;

(3) 在(2)的条件下, 求 $f^{-1}(x^2 - 2) = f(x)$ 的解.

分析 对 $k \leq 0$ 或 $k > 0$ 及 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$ 进行分类讨论.

解 (1) 当 $k \leq 0$ 时, $a - ka^x > 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, $\therefore f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

当 $k > 0$ 时, 由 $a - ka^x > 0 \Rightarrow a^x < \frac{a}{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \log_a \frac{a}{k}, & \text{当 } a > 1 \text{ 时;} \\ x > \log_a \frac{a}{k}, & \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$\therefore a > 1$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, \log_a \frac{a}{k})$;

$0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(\log_a \frac{a}{k}, +\infty)$

(2) 由 $y = \log_a(a - ka^x) \Rightarrow x = \log_a\left(\frac{a - a^y}{k}\right)$, $\therefore f^{-1}(x) = \log_a\left(\frac{a - a^x}{k}\right)$.

由 $f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow a - ka^x = \frac{a - a^x}{k} \Rightarrow (k-1)[(k+1)a^x - a] = 0$ 对定义域中一切 x 皆成立,

$\therefore k = 1$.

(3) $f^{-1}(x^2 - 2) = f(x) \Rightarrow \log_a(a - a^{x^2-2}) = \log_a(a - a^x)$,

$\therefore a - a^{x^2-2} = a - a^x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x = -1$ 或 $x = 2$.

经检验, 当 $a > 1$ 时, 方程的根是 $x = -1$; 当 $0 < a < 1$ 时, 方程的根是 $x = 2$.

说明 (1) 解指数方程的常用变形方法是化对数式、化同底幂、换元, 利用 $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的充要条件是 $f(x) = g(x)$, 将指数方程化为普通代数方程. 在变形过程中, 应注意及时化简.

(2) 解对数方程的常用变形方法是化同底、对数式变形、换元, 利用 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的充要条件是 $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ 将对数方程化为普通代数方程. 值得注意的是, 由 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

转化为 $f(x) = g(x)$ 并不是同解变形, 未知数 x 的取值范围可能扩大了, 有可能产生增根, 因此要验根或加上条件 $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

(3) 上述方程中的等号“=”换成不等号, 就是指数不等式和对数不等式, 同样利用这种转化思想, 根据指数函数、对数函数的单调性, 就可将指数不等式或对数不等式转化为普通的代数不等式, 并注意在对数不等式中加上条件 $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$



分层练习

基础型

一、填空题

1. $(0.8)^8, 8^{0.8}, \log_{0.8} 8$ 三数从小到大的顺序排列是_____.
2. 设 $\lg 2 = a$, 则 $\log_2 5 =$ _____ (用 a 表示).
3. 已知 $2^a = 3^b = 6$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ _____.
4. 方程 $2^{\log_3 x} = 4$ 的解是_____.
5. 函数 $y = \lg(x^2 + 1), (x \in [-3, -1])$ 的反函数是_____.
6. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域是_____.

二、选择题

1. $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是()
(A) $\frac{2}{3}$. (B) 1. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.
2. 设 a, b 满足 $0 < a < b < 1$, 则下列不等式中正确的是()
(A) $a^a < a^b$. (B) $b^a < b^b$. (C) $a^a < b^a$. (D) $b^b < a^b$.
3. 如果 $\log_a 2 > \log_b 2 > 0$, 那么 a, b 间的关系是()
(A) $0 < a < b < 1$. (B) $1 < a < b$. (C) $0 < b < a < 1$. (D) $1 < b < a$.
4. 关于 x 的方程 $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) ()
(A) 仅当 $a > 1$ 时有唯一解. (B) 仅当 $0 < a < 1$ 时有唯一解.
(C) 必有唯一解. (D) 必无解.

三、解答题

1. (1) 设 $10^a = 4, b = \lg 2$, 求 10^{2a-3b} .
(2) 设 $2x = \log_2 3$, 求 $\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}}$.
2. 解下列方程:
(1) $9^{-x} - 2 \cdot 3^{1-x} = 27$;
(2) $\lg(1-3x) = \lg(3-x) + \lg(7+x)$.
3. 1987 年 7 月 11 日世界人口达 50 亿, 联合国将 7 月 11 日定为“世界人口日”. 1992 年的“世界人口日”全球人口达到 54.8 亿. 如果世界人口的年增长率不变, 请计算:
(1) 世界人口年增长率是多少?
(2) 预测 2010 年 7 月 11 日世界人口数.
4. 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b}$ ($a > 0, b > 0$, 且 $a \neq 1$).
(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域;
(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;
(3) 判断函数 $f(x)$ 的单调性;



(4) 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

提高型

一、填空题

1. 函数 $y = \sqrt{8-2^x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x-1\right)}$ 的定义域是_____.
2. 若 $\log_a \frac{2}{3} < 1$, 则 a 的取值范围是_____.
3. 已知 $f(3x) = \log_2 \sqrt{\frac{9x+5}{2}}$, 则 $f(1) =$ _____.
4. 方程 $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$ 的解是_____.
5. 设 $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0) =$ _____.
6. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$ 的值域是_____.

二、选择题

1. 当 $0 < a < b < 1$ 时, 下列不等式中正确的是()
(A) $(1-a)^{\frac{1}{b}} > (1-a)^b$. (B) $(1+a)^a > (1+b)^b$.
(C) $(1-a)^b > (1-a)^{\frac{1}{b}}$. (D) $(1-a)^a > (1-b)^b$.
2. 已知 $1 < x < 2$, 令 $a = (\log_2 x)^2$, $b = \log_2 x^2$, $c = \log_2(\lg_2 x)$, 则()
(A) $a < b < c$. (B) $a < c < b$. (C) $c < b < a$. (D) $c < a < b$.
3. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $3^a = 4^b = 6^c$, 则()
(A) $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. (B) $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$. (C) $\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$. (D) $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$.
4. 已知 $F(x) = \left(1 + \frac{2}{2^x - 1}\right)f(x)$ ($x \neq 0$) 是偶函数, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ ()
(A) 是奇函数. (B) 是偶函数.
(C) 可能是奇函数也可能是偶函数. (D) 是非奇非偶函数.

三、解答题

1. 解下列方程:
(1) $4^x + 4^{-x} - 6(2^x + 2^{-x}) + 10 = 0$;
(2) $\log_2(9^x - 5) = \log_2(3^x - 2) + 2$.
2. 设 a, b, c 为正数, $a^x = b^y = c^z$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, 求证: $c = ab$.
3. 若函数 $f(x) = \left(\log_2 \frac{x}{2}\right) \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)$ 的定义域是不等式 $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 7\log_{\frac{1}{2}} x + 3 \leq 0$ 的解集, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.
4. 某地区 2000 年底居民住房的总面积为 $a(\text{m}^2)$, 其中危旧住房占 $\frac{1}{4}$, 新型单元房占 $\frac{1}{3}$. 当地政府决定从 2001 年起加快住房改造, 计划在五年内全部拆除危旧住房, 每年拆除的面积相同, 同时以 21% 的年增长率加快建造新型单元房, 用 $f(n)$ 表示第 n 年年底该地区住房的总面积.