

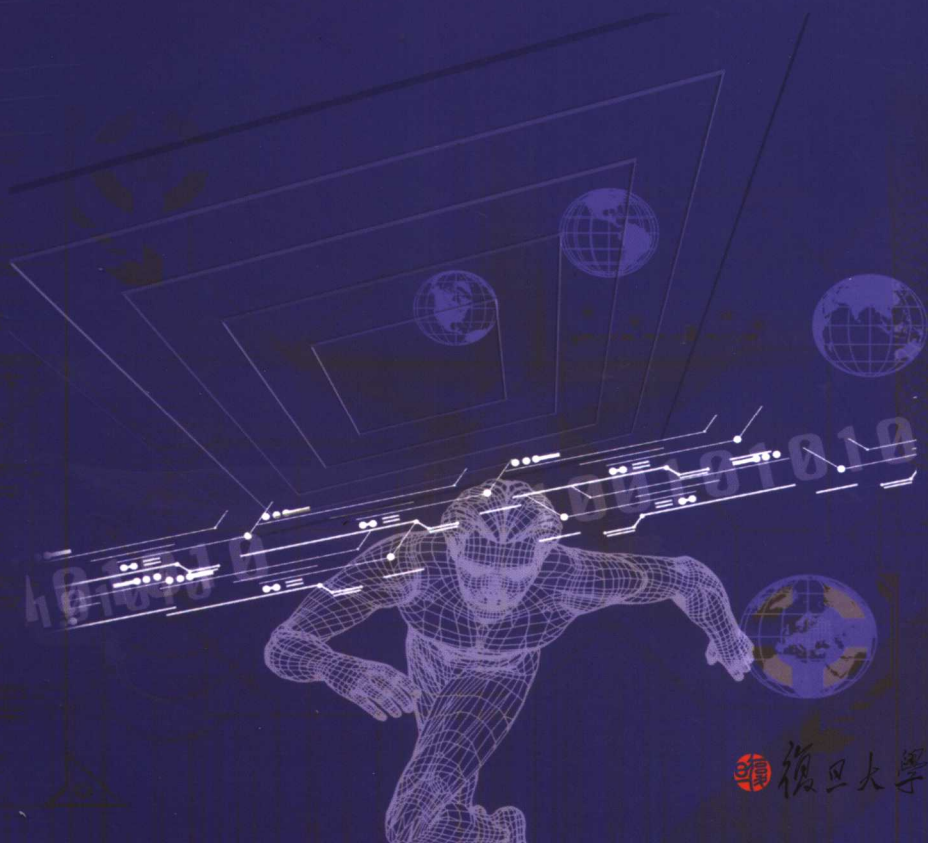
新锐丛书

21世纪高等学校教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE (下)

主 编 高纯一 周 勇  
主 审 黄云清



复旦大学出版社

新锐丛书

21 世纪高等学校教材

# 高等数学

(下)

主编 高纯一 周 勇

主审 黄云清

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下)/黄立宏,高纯一等主编. —上海:  
复旦大学出版社,2006.4

(新锐丛书)

ISBN 7-309-04951-9

I. 高… II. ①黄…②高… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第031216号

高等数学(上、下)

上册:黄立宏 廖基定 下册:高纯一 周勇 主编

---

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路579号 邮编200433

86-21-65642857(门市零售)

86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

---

责任编辑 白国信

总编辑 高若海

出品人 贺圣遂

---

印刷 浙江省临安市曙光印务有限公司

开本 787×960 1/16

印张 37.75

字数 672千

版次 2006年4月第一版第一次印刷

印数 1—10 100

---

书号 ISBN 7-309-04951-9/O·357

定价 49.00元

---

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

## 内 容 简 介

本教材是在面向 21 世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下,编者根据多年的教学实践经验和研究成果,结合“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.

本书分为上、下两册.上册含集合与函数、函数的极限与连续性、一元函数的导数和微分、一元函数微分学的应用、一元函数的积分、定积分的应用、常微分方程,以及几种常用的曲线、积分表等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数微分学的应用、多元函数积分学、对坐标的曲线和曲面积分、无穷级数、向量函数与场论等内容.每章均配有习题,书末附有习题参考答案,便于教与学.

本书可供综合性大学、高等理工科院校、高等师范院校(非数学专业)的学生使用.

# 序

为了适应“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的需要,高等学校的数学行家们都在对当今高等学校的数学教学理念、教学内容、教学模式进行深入细致的探讨.本书的作者们依托自己丰富的教学实践经验和对高等数学教学改革的独到认识,根据“教育部高等院校工科数学教学大纲”的要求,编写并推出了这套数学系列教材,该系列教材包括《高等数学》(上、下)、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》等.

数学是严谨的科学,数学教学不但要教给学生数学知识,培养学生应用数学知识解决实际问题的能力,还要提高他们的数学修养,养成良好的思维品格.一套好的教材无疑是达到上述目标的基本条件,本套教材就是遵循这一目标而编写的.

与其他教材相比,本套教材具有以下几个明显特点:

## 1. 科学性

内容安排上由浅入深,符合认知规律,理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰,尽可能通过实际背景引入数学概念,便于学生理解和掌握.

## 2. 先进性

本套教材充分考虑了内容的更新,选入了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料,充实教材内容,以适应教育发展和教学改革新形势的需要.

## 3. 适用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具.所以本套教材对概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排,以及例题、习题的选配等方面,都是从教学的实际要求出发而做出的,使其遵循教学活动自身的规律性,方便教师教与学生学.

参加本套系列教材编写的作者们都是多年从事数学教学和研究的教授、学者,他们紧紧扣住教学大纲的要求,密切联系工科院校数学教学的实际,认真研

究了国内各种版本同类教材,取长补短,编出了新意和特色.相信这套教材在数学教学和教学改革中定能发挥相当的作用,同时也希望它在教学实践中不断地完善.

应作者之嘱托,谨作此序.

侯振挺

2006年3月

# 前 言

数学是一门重要而应用广泛的学科,被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石.不仅如此,数学还是各类科学和技术的基础,它的应用几乎涉及所有的学科领域,它对于世界文化的发展有着深远的影响.高等学校作为培育人才的摇篮,其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

近年来,随着我国经济建设与科学技术的迅速发展,高等教育进入了一个飞速发展时期,已经突破了以前的精英式教育模式,发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造和再创性的基础学科教育.高等学校教育教学观念不断更新,教学改革不断深入,办学规模不断扩大,数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要,经众多高校的数学教师多次研究讨论,联合编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材.

本系列教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的,也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.教材中,概念、定理及理论叙述准确、精炼,符号使用标准、规范,知识点突出,难点分散,证明和计算过程严谨,例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性.

本教材分上、下两册.上册含集合与函数、函数极限和连续性、一元函数的导数和微分、一元函数微分学的应用、一元函数的积分、定积分的应用、常微分方程,以及几种常用的曲线、积分表等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数微分学的应用、多元函数积分学、无穷级数、向量函数与场论,以及二、三阶行列式简介等内容.本册《高等数学》(下册)由高纯一、周勇主编,参加讨论和编写的人员有:王跃恒、万勇、龙飞、谢永钦、吴柏森、王晓梅、徐景实、方丽飞、汤四平、欧阳自根、刘罗华、刘勉声、汪新凡、周建军、彭向阳、王国政等.周维楚教授、刘楚中教授对本册教材的编写给予了许多支持与帮助,黄云清教授认真审阅了书稿,并提出许多宝贵意见.本教材的编写得到了著名数学家侯振挺教授的悉心指导,在此一并致谢.

教材中难免有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生能提出宝贵意见或建议.

编 者  
2006年3月

# 目 录

<b>第七章 向量代数与空间解析几何</b> .....	1
<b>第一节 空间直角坐标系</b> .....	1
一、空间直角坐标系	二、空间两点间的距离
<b>第二节 向量代数</b> .....	4
一、向量及其线性运算	二、向量的坐标表示
三、向量的数量积与向量积	
<b>第三节 平面与直线</b> .....	19
一、曲面方程的概念	二、平面及其方程
三、直线及其方程	
<b>第四节 空间曲面与曲线</b> .....	30
一、曲面及其方程	二、旋转曲面
三、二次曲面举例	四、空间曲线
<b>习题七</b> .....	42
<b>第八章 多元函数微分学</b> .....	47
<b>第一节 多元函数的基本概念</b> .....	47
一、邻域	二、区域
三、聚点	四、 $n$ 维空间
五、多元函数定义	六、多元函数的运算
七、多元复合函数及隐函数	
<b>第二节 多元函数的极限与连续性</b> .....	53
<b>第三节 偏导数</b> .....	57
一、偏导数的定义及其算法	二、高阶偏导数
<b>第四节 全微分及其应用</b> .....	63
一、全微分的定义	二、全微分的应用
三、高阶微分	
<b>第五节 复合函数的偏导数</b> .....	70
一、复合函数的求导法则	二、全微分形式的不变性



第六节	隐函数的导数 .....	75
	一、一个方程的情形	
	二、方程组的情形	
* 第七节	二元函数的泰勒公式 .....	81
习题八	.....	84
<b>第九章</b>	<b>多元函数微分学的应用</b> .....	88
第一节	曲线的切线与法平面 .....	88
第二节	曲面的切平面与法线 .....	91
第三节	方向导数 .....	94
第四节	无约束极值与有约束极值 .....	96
	一、无约束极值	
	二、条件极值	
习题九	.....	103
<b>第十章</b>	<b>多元函数积分学 I</b> .....	105
第一节	二重积分 .....	105
	一、二重积分的概念	
	二、二重积分的性质	
	三、二重积分的计算	
	四、二重积分的换元法	
第二节	三重积分 .....	123
	一、三重积分的概念	
	二、三重积分的计算	
	三、三重积分的换元法	
* 第三节	广义二重积分 .....	134
第四节	重积分的应用 .....	136
	一、空间曲面的面积	
	二、空间几何体的体积	
	三、平面薄片的重心	
	四、平面薄片的转动惯量	
	五、平面薄片对质点的引力	
	六、三重积分应用举例	
第五节	对弧长的曲线积分 .....	148
	一、对弧长的曲线积分的概念	
	二、对弧长的曲线积分的性质	
	三、对弧长的曲线积分的计算法	
第六节	对面积的曲面积分 .....	153
	一、对面积的曲面积分的概念	
	二、对面积的曲面积分的计算	
第七节	黎曼积分小结 .....	156
习题十	.....	158
<b>第十一章</b>	<b>多元函数积分学 II</b> .....	165
第一节	对坐标的曲线积分的概念 .....	165

	一、引例	二、对坐标的曲线积分的定义	
	三、性质		
第二节	对坐标的曲线积分的计算		168
第三节	曲线积分与路径无关的条件		174
	一、格林公式		
	二、平面上曲线积分与路径无关的条件		
第四节	对坐标的曲面积分的概念		184
	一、有向曲面概念		
	二、引例——流向曲面一侧的流量		
	三、对坐标的曲面积分的概念		
第五节	对坐标的曲面积分的计算		188
第六节	高斯公式与斯托克斯公式		191
	一、高斯公式	二、斯托克斯公式	
第七节	两类曲线积分、曲面积分的联系		197
	一、两类曲线积分之间的联系	二、两类曲面积分之间的联系	
	三、高斯公式、斯托克斯公式的另一种表示		
	习题十一		201
<b>第十二章</b>	<b>无穷级数</b>		206
第一节	常数项级数的概念和性质		206
	一、常数项级数的概念	二、常数项级数的性质	
	三、柯西审敛原理		
第二节	正项级数敛散性判别法		212
第三节	任意项级数敛散性判别法		218
	一、交错级数收敛性判别法	二、绝对收敛与条件收敛	
第四节	函数项级数		223
	一、函数项级数的概念	二、函数项级数的一致收敛性	
第五节	幂级数		230
	一、幂级数及其收敛性	二、幂级数的一致收敛性	
	三、幂级数的和函数的性质	四、幂级数的运算	
第六节	函数展开成幂级数		238
	一、泰勒级数	二、函数展开成幂级数	
	三、函数的幂级数展开式在近似计算中的应用		
第七节	傅里叶级数		249
	一、三角级数、三角函数系的正交性		

二、周期函数展开成傅里叶级数	
三、非周期函数的傅里叶展开	
四、任意区间上的傅里叶级数	
五、傅里叶级数的复数形式	
· 第八节 傅里叶变换及其应用 .....	262
一、傅里叶变换	
二、傅里叶变换的应用	
习题十二 .....	266
· 第十三章 向量函数与场论 .....	272
第一节 向量函数的概念 .....	272
一、向量值函数的概念	
二、线性向量值函数	
第二节 向量函数的极限与连续性 .....	274
一、向量函数的极限	
二、向量函数的连续性	
第三节 向量函数的导数 .....	275
第四节 场论初步 .....	279
一、场的概念	
二、梯度场	
三、散度场	
四、旋度场	
五、管量场与有势场	
习题十三 .....	286
附录 二阶和三阶行列式简介 .....	288
习题参考答案 .....	291

# 第七章 向量代数与空间解析几何

空间解析几何是多元函数微积分学必备的基础知识. 本章首先建立空间直角坐标系; 然后引进有广泛应用的向量代数, 以它为工具, 讨论空间的平面和直线; 最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容.

## 第一节 空间直角坐标系

平面解析几何是我们已经熟悉的, 所谓解析几何就是用解析的, 或者说是代数的方法来研究几何问题. 坐标法把代数与几何结合起来. 代数运算的基本对象是数, 几何图形的基本元素是点. 正如我们在平面解析几何中所见到的那样, 通过建立平面直角坐标系使几何中的点与代数的有序数之间建立一一对应关系. 在此基础上, 引入运动的观点, 使平面曲线和方程对应, 从而使我们能够运用代数方法去研究几何问题. 同样, 要运用代数的方法去研究空间的图形——曲面和空间曲线, 就必须建立空间内点与数组之间的对应关系.

### 一、空间直角坐标系

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广. 过空间一定点  $O$ , 作三条两两互相垂直的数轴, 它们都以  $O$  为原点. 这三条数轴分别叫做  $x$  轴(横轴)、 $y$  轴(纵轴)、 $z$  轴(竖轴), 统称坐标轴. 它们的正方向按右手法则确定, 即以右手握住  $z$  轴, 右手的四个手指指向  $x$  轴的正向以  $\frac{\pi}{2}$  角度转向  $y$  轴的正向时, 大拇指的指向就是  $z$  轴的正向(见图 7-1), 这样的三条坐标轴就组成了一空间直角坐标系  $Oxyz$ , 点  $O$  叫做坐标原点.

三条坐标轴两两分别确定一个平面, 这样定出的三个相互垂直的平面:  $xOy$ ,  $yOz$ ,

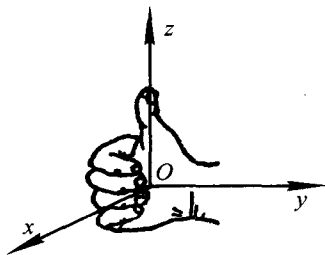


图 7-1

$zOx$ , 统称为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个卦限, 上半空间 ( $z > 0$ ) 中, 从含有  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正半轴的那个卦限数起, 按逆时针方向分别叫做 I, II, III, IV 卦限; 下半空间 ( $z < 0$ ) 中, 与 I, II, III, IV 四个卦限依次对应的叫做 V, VI, VII, VIII 卦限(见图 7-2).

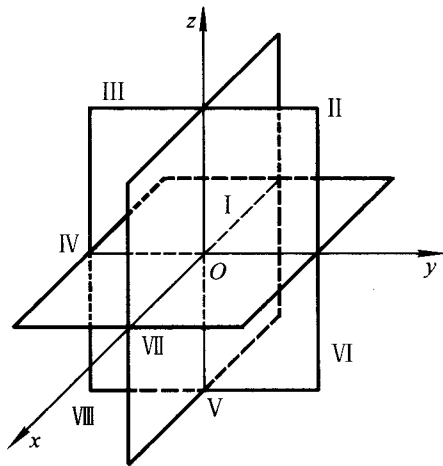


图 7-2

确定了空间直角坐标系后, 就可以建立起空间点与数组之间的对应关系.

设  $M$  为空间的一点, 过点  $M$  作三个平面分别垂直于三条坐标轴, 它们与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的交点依次为  $P, Q, R$  (见图 7-3). 这三点在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的坐标依次为  $x, y, z$ . 这样, 空间的一点  $M$  就唯一地确定了一个有序数组  $(x, y, z)$ , 它称为点  $M$  的直角坐标, 并依次把  $x, y$  和  $z$  叫做点  $M$  的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为  $(x, y, z)$  的点  $M$ , 通常记为  $M(x, y, z)$ .

反过来, 给定了一有序数组  $(x, y, z)$ , 我们可以在  $x$  轴上取坐标为  $x$  的点  $P$ , 在  $y$  轴上取坐标为  $y$  的点  $Q$ , 在  $z$  轴上取坐标为  $z$  的点  $R$ , 然后通过  $P, Q$  与  $R$  分别作  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴的垂直平面, 这三个平面的交点  $M$  就是具有坐标  $(x, y, z)$  的点(见图 7-3). 从而对应于一有序数组  $(x, y, z)$ , 必有空间的一个确定的点  $M$ . 这样, 就建立了空间的点  $M$  和有序数组  $(x, y, z)$  之间的一一对应关系.

如图 7-3 所示.  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的点的坐标, 分别为  $P(x, 0, 0), Q(0, y, 0), R(0, 0, z)$ ;  $xOy$  面、 $yOz$  面和  $zOx$  面上的点的坐标, 分别为  $A(x, y, 0), B(0, y, z), C(x, 0, z)$ ; 坐标原点  $O$  的坐标为  $O(0, 0, 0)$ . 它们各具有一定的特征, 应注意区分.

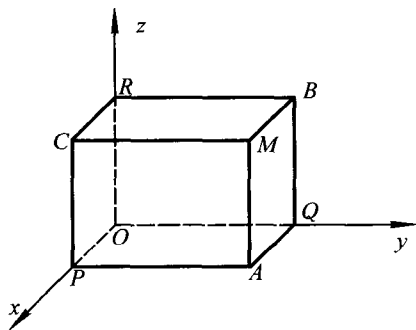


图 7-3

## 二、空间两点间的距离

设  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间两点, 为了用两点的坐标来表达它们间的距离  $d$ , 我们过  $M_1, M_2$  各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以  $M_1, M_2$  为对角线的长方体(见图 7-4). 根据勾股定理, 有

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2. \end{aligned}$$

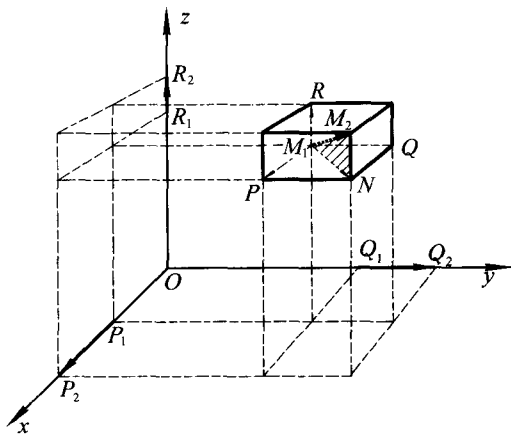


图 7-4

因为

$$\begin{aligned} |M_1P| &= |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, \\ |M_1Q| &= |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以  $d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ , 这就是两点间的距离公式.

特别地, 点  $M(x, y, z)$  与坐标原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## 第二节 向量代数

### 一、向量及其线性运算

#### 1. 向量概念

我们曾经遇到的物理量有两种: 一种是只有大小的量, 叫做数量, 如时间、温度、距离、质量等; 另一种是不仅有大小, 而且还有方向的量, 叫做向量或矢量, 如速度、加速度、力等.

在数学上, 往往用一条有向线段来表示向量, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 如图 7-5 所示, 以  $M_1$  为始点、 $M_2$  为终点的有向线段所表示的向量, 用记号  $\overrightarrow{M_1M_2}$  表示. 有时也用一个黑体字母或上面加箭头的字母来表示向量, 如向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{i}, \mathbf{u}$  或  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{i}, \vec{u}$  等.



图 7-5

向量的大小叫做向量的模, 向量  $\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{a}$  的模分别记为  $|\overrightarrow{M_1M_2}|, |\mathbf{a}|$ .

在研究向量的运算时, 将会用到以下几个特殊向量:

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量.

逆向量(或负向量) 与向量  $\mathbf{a}$  的模相等而方向相反的向量称为  $\mathbf{a}$  的逆向量, 记为  $-\mathbf{a}$ .

零向量 模等于 0 的向量称为零向量, 记作  $\mathbf{0}$ , 零向量没有确定的方向, 也可以说它的方向是任意的.

相等向量 两个向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$ , 如果它们平行、同向, 且模相等, 就说这两个向量相等, 记作  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

自由向量 与始点位置无关的向量称为自由向量(即向量可以在空间平行

移动,所得向量与原向量相等).我们研究的向量均为自由向量,今后,必要时可以把一个向量平行移动到空间任一位置.

## 2. 向量的线性运算

### (1) 向量的加(减)法.

仿照物理学中力的合成,我们可如下规定向量的加(减)法.

**定义 1** 设  $a, b$  为两个(非零)向量,把  $a, b$  平行移动使它们的始点重合于  $M$ ,并以  $a, b$  为邻边作平行四边形,把以点  $M$  为一端的对角线向量  $\overrightarrow{MN}$  定义为  $a, b$  的和,记为  $a + b$ (见图 7-6). 这样用平行四边形的对角线来定义两个向量的和的方法,叫做平行四边形法则.

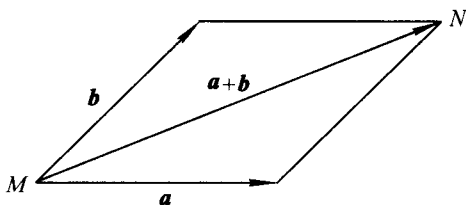


图 7-6

由于平行四边形的对边平行且相等,所以从图 7-6 可以看出,  $a + b$  也可以按下列方法得出:把  $b$  平行移动,使它的始点与  $a$  的终点重合,这时,从  $a$  的始点到  $b$  的终点的有向线段  $\overrightarrow{MN}$  就表示向量  $a$  与  $b$  的和  $a + b$ (见图 7-7). 这个方法叫做三角形法则.

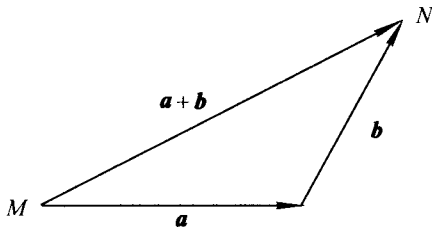


图 7-7

**定义 2** 向量  $a$  与  $b$  的差规定为  $a$  与  $b$  的逆向量  $(-b)$  的和

$$a - b = a + (-b).$$

按定义容易用作图法得到向量  $a$  与  $b$  的差.把向量  $a$  与  $b$  的始点放在一起,则由  $b$  的终点到  $a$  的终点的向量就是  $a$  与  $b$  的差  $a - b$ (见图 7-8).

向量的加法满足下列性质:



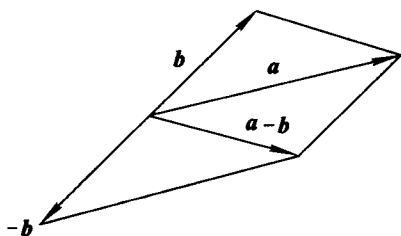


图 7-8

$$a + b = b + a; \quad (\text{交换律})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c); \quad (\text{结合律})$$

$$a + 0 = a; \quad a + (-a) = 0.$$

(2) 向量与数量的乘法.

**定义 3** 设  $\lambda$  是一实数, 向量  $a$  与  $\lambda$  的乘积  $\lambda a$  是一个这样的向量:

当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  的方向与  $a$  的方向相同, 它的模等于  $|a|$  的  $\lambda$  倍, 即  $|\lambda a| = \lambda |a|$ ;

当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  的方向与  $a$  的方向相反, 它的模等于  $|a|$  的  $|\lambda|$  倍, 即  $|\lambda a| = |\lambda| |a|$ ;

当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a$  是零向量, 即  $\lambda a = 0$ .

向量与数量的乘法满足下列性质 ( $\lambda, \mu$  为实数):

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a; \quad (\text{结合律})$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a; \quad (\text{分配律})$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b. \quad (\text{分配律})$$

设  $e_a$  是方向与  $a$  相同的单位向量, 则根据向量与数量乘法的定义, 可以将  $a$  写成

$$a = |a| e_a.$$

这样就吧一个向量的大小和方向都明显地表示出来. 由此也有

$$e_a = \frac{a}{|a|}.$$

就是说吧一个非零向量除以它的模就得到与它同方向的单位向量.

## 二、向量的坐标表示

### 1. 向量在轴上的投影

为了用分析方法来研究向量, 需要引进向量在轴上的投影的概念.