易过新理念丛书

2007年

考研数学历年真题

【数学四】详解

1995——2006

主 编：黄庆怀

- 把握命题规律与趋势
- 归纳核心考点和难点
- 查漏补缺，有的放矢推进复习
- 提高速度，熟练运用答题技巧

中国社会出版社

2007年

考研数学历年真题详解

【数学四】

主　编：黄庆怀
编　者：葛余博（清华大学教授）
杨　鸿（北京理工大学教授）

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题详解·数学四/黄庆怀 主编. 一北京:中国社会出版社,2005.4
(考研数学历年真题详解)
ISBN 7-5087-0470-3
Ⅰ.考… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学一研究生一入学考试一解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028359 号

丛 书 名:考研数学历年真题详解
书　　名:考研数学历年真题详解·数学四
主　　编:黄庆怀
责任编辑:杨　晖　张国洪

出版发行:中国社会出版社　　邮政编码:100032
通联发行:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
　　　　电话:66016392　　传真:66016392
欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息
经　　销:各地新华书店

印刷装订:北京高岭印刷有限公司
开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:50.25
字　　数:842 千字
版　　次:2006 年 3 月第 2 版
印　　次:2006 年 3 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-5087-0470-3/O·10.
定　　价:70.80 元(全四册)

前　　言

在高等教育大众化的今天,考研热已逐步形成,众所周知,考研的难点在数学,数学是一道门槛。硕士研究生入学考试的数学试题题量适当,主客观性试题在试卷中占分比例为7:3,主观性试题包括计算题,证明题,综合题和应用题,客观性试题有填空题和选择题。纵观几年来的试卷,试题主要以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上注重考查学生的抽象概括能力,逻辑思维能力,空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力;填空题是主要用于考查"三基"以及数学重要性质,以中等难度试题为主;选择题主要考查考生对数学概念,数学性质的理解并能进行简单推论、判定和比较;综合题考查的是知识点之间的有机结合,应用题一般结合与考生专业具有共性的相关背景知识。从而既有利于国家对高等层次人才的选拔,也利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高。

本套丛书共分四册,本册为《考研数学历年真题及详解 · 数学四》。丛书以教育部公布的最新考试大纲为基础,紧扣考试大纲,注重解题方法与技巧,并结合名校名师多年来对考研试题研究的经验和考研高分考生的心得精心编著而成。本册《考研数学历年真题及详解 · 数学四》收录了1995年~2006年12套全国硕士研究生入学考试数学四试题。这些试题凝聚了12年来参加命题的专家、教授的集体智慧,是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求,又充分体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则,而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点,使考生能及早地体会到考研数学试题的"形势",以便尽早做出自己的复习计划。

本书在结构和试题编排上采纳了各名校专家、教授的意见,并通过高分考生的意见反馈对本书进行了如下编排:

1. 在第一部分,我们汇编了1995年~2006年的全部数学四试题。试题按照2006~1995的顺序编排,以便考生能尽快的了解最近几年的考研数学的试题结构、题型特点、试题难度及分值分配等。这样的顺序编排完全是为了让考生能在第一时间里了解考研数学的最新基本形势。

2. 在第二部分,我们对1995年~2006年的全部数学四试题根据《数学考试大纲(数学四)》的考查要求按照学科和知识点进行科学地编排,做到既能紧扣《数学考试大纲》,又能突出解题技巧;既能使各知识点层次清晰,又能使考生融会贯通,灵活运用。在试题分析、详解及评注上,我们把相同或相近的知识点摘录到一起进行解析,这样做便于考生进行比较分析,同时也给考生提供了一个重要信息,即:考生会发现相同或相近的知识点在相隔多年后会重新进行命题以及掌握考查的知识点和题型的变化情况,以增强考生对命题基本规律的感性认识。本部分对每道试题都做出了答案、分析、详解及评注,其中,答案部分用以检验考生的答题正确率;分析部分主要给考生以提示,即解题思路,使考生迅速联想相关知识点,寻找解题方法,以期加强考生的数学思维能力的培养,提高考生的破题能力;详解部分给出了本题的详细解答过

程及步骤,使考生除了正确解答此题之外,能规范自己的书写过程,在平时就达到实战效果;评注部分主要根据本题进行知识点的扩展,引导考生能够做到举一反三,触类旁通。

为了配合本书的使用,我们的建议如下:

(1)注重基础知识

这几年考研数学试题的难度变化不大(但计算量比较大),基本题约占百分之七十,另外的百分之三十略有难度。这就要求考生对基本知识要掌握熟练,但仅仅是对本科教材掌握熟练还是不行的,这是因为考研题有自己的风格和出题思路,需要辅导教师有重点的辅导。

(2)注重解题方法、技巧的训练

一方面由于考研出题的总的思路是数学知识的掌握及其运用能力,考题的计算量较大,同样一道题,解题方法不一样,花费的时间也不一样。

(3)注重答题方式

平时训练应按考研评分标准解题,对不能给出解答的题尽量写出采分点。

(4)注重合理分配答题时间

历年的考试中,都有很多学生并没有答完题。其实没做的题有些是非常简单的,有的学生甚至还没来得及看,这就要求考生平时在做3个小时的套题时,在不会做或较长时间没有做出正确结果的题上不要"恋战",从大局出发,总体把握做题时间,对没有做好的题3小时以后再研究。

参与本书编辑和出版的工作人员在整个过程中时刻本着对广大考生负责的态度,高标准、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有不足和不尽人意之处。敬请广大考生与专家、同行不吝赐教和批评指正。

最后,预祝广大考生复习顺利,考研成功!

编　者

2006年3月

目　　录

第一部分 微积分

第二部分　线性代数

第三部分 概率论与数理统计

历年数学四考研试题分析、详解及评注

第一部分 微积分

硕士研究生入学数学考试历来是考生头疼的问题,数学试卷具有内容多、知识面广、综合性和技巧性较强的特点. 在这里,我们结合部分高分考生的复习经验,提出几点建议,供考生参考.

1. 制定周密的复习计划;
2. 吃透考试大纲;
3. 重视基础知识;
4. 认真分析每一道真题;
5. 练习计算能力;
6. 调整好心态.

下表是1995—2006年高等数学各章分值分布情况,望考生把握好重点.

1995—2006年微积分各章分值分布

内容 / 分值 / 年份	函数极限连续	一元函数微分学	一元函数积分学	多元函数微分学	二重积分	常微分方程
1995		14	28	12		
1996		25	23	7		
1997	6	13	20	6	6	
1998	9	18	12	6	5	
1999	3	12	15	9	10	
2000	6	10	15	12	6	
2001		19	15	9	6	
2002	3	10	23	7	7	
2003	16	13	12	10	12	9
2004	24	17	17		8	8
2005	12	12	12	21	13	4
2006	11	28	8	8	7	12
合计	90	168	197	107	80	33

第一章　函数、极限、连续

函数是高等数学的主要研究对象,微积分主要就是讨论各类函数的各种性质. 极限是一个重要的基本概念,它的思想和方法贯穿于微积分的始终. 连续是一大类函数的重要特性,连续函数是微积分的重点研究对象.

本部分考研大纲的要求是:

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式;

(2) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性;

(3) 理解复合函数及分段函数的概念. 了解反函数及隐函数的概念;

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念;

(5) 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念;

(6) 理解无穷小的概念和基本性质. 掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系;

(7) 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的性质及四则运算法则,会应用两个重要极限;

(8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判断函数间断点的类型;

(9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

一、极限

1. (97,三题,6 分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\quad(a\neq 0)$.

【分析】 本题函数式比较复杂,可先将其化简,判定$\lim\limits_{x\to 0}a^2\ln(1+ax)=0$,可用四则运算将其分出来.

【详解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+2a^2x\ln(1+ax)-a(1-ax)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a^2\ln(1+ax)+\frac{2a^3x}{1+ax}+a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

【评注】 本题主要考查运用洛必达法则求未定式的极限,属基本题型. 本题只需要反复运用洛必达法则就可得出结论,也可对原式直接通分,两次运用洛必达法则,但计算量稍大.

2. (98, 三题,6 分) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$($n$ 为自然数).

【分析】 本题为数列极限,可化为函数极限,由 $x\to 0$, $\tan x\sim x$ 可判定此极限属“1^∞”型.

【详解 1】 因为

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left[\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$$

其中$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

故 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$,

取$x=\dfrac{1}{n}$,则原式$=e^{\frac{1}{3}}$.

【详解2】因为$\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

其中 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

则 $$\lim_{x\to0^+}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

故 原式$=e^{\frac{1}{3}}$

【评注】 一般地,对于需要利用洛必达法则求解的数列极限,只要转化为函数极限(因为数列不能求导),再利用关系:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$ 或$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(\dfrac{1}{n})=A$.

3. (99,填(1)题,3分)设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln a}$.

【分析】 利用对数运算性质可转化为数列极限问题,再运用等差数列的求和公式.

【详解】 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln f(i)=\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln a.$$

4. (00,填(2)题,3分)若$a>0,b>0$均为常数,则$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{3}{x}}=$ $\underline{(ab)^{\frac{3}{2}}}$.

【分析】 本题考查的是未定式"1^∞"的极限.

【详解1】 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{a^x+b^x-2}{x}}=e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+b^x-2}{x}}$$
$$=e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{1}}=e^{\frac{3}{2}\ln ab}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

【详解2】 $$\lim_{x\to0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3\ln(a^x+b^x)-3\ln2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}3\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}$$
$$=e^{\frac{3}{2}\ln(ab)}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

【评注】 对于“1^∞”型未定式极限问题 $\lim f(x)^{g(x)}$ 一般有以下两种处理方法：

(1) $\lim f(x)^{g(x)} = \lim[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$

(2) $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\cdot\ln f(x)}$.

5. (00, 选(1) 题, 3 分) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

(A) 存在且一定等于零. (B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在. (D) 不一定存在.

【 】

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查极限存在的夹逼定理.

【详解】 若令 $\varphi(x) = 1 - e^{-|x|}$，$g(x) = 1 + e^{-|x|}$，$f(x) = 1$，则有

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$，

可排除(A)、(C) 两个选项.

又如 $\varphi(x) = e^x - e^{-|x|}$，$g(x) = e^{-|x|} + e^x$，$f(x) = e^x$，

显然 $\varphi(x)$，$g(x)$，$f(x)$ 满足题设条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在，

因此(B) 也可排除，剩下(D) 为正确选项.

【评注】 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$，推出 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$、$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 存在且相等，该题题设条件并不是夹逼定理的条件，夹逼定理为：设在 x_o 的邻域内，恒有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

6. (02, 填(1) 题, 3 分) 设常数 $a \neq \dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n = \underline{\dfrac{1}{1-2a}}$.

【分析】 本题根据“1^∞”型未定式用第二类重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$ 或 $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$ 的方法来求解的，其方法与无穷小量代换的方法相比较而言，都比较简单.

【详解】 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{n-2an+1}{n(1-2a)}]^n = \lim\limits_{n\to\infty}[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}} = e^{\frac{1}{1-2a}}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n = \ln e^{\frac{1}{1-2a}} = \dfrac{1}{1-2a}$.

【评注】 本题也可以利用无穷小量代换即可得到

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\ln[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}]^n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{1}{n(1-2a)} = \dfrac{1}{1-2a}$.

7. (03,填(1)题,4分) 极限$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = $ ___e^2___.

【分析】 本题属“1^∞”型未定式,一般化为指数函数求极限即可. 也可直接利用公式$\lim f(x)^{g(x)}(1^\infty\text{ 型}) = e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$.

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}} = e^2$.

【评注】 “1^∞”型在考研中常出现,这两种求法务必熟练掌握. 对于“0^0”,“∞^0”,“1^∞”型求极限,一般方法是用对数恒等式$N = e^{\ln N}$化为“$0\cdot\infty$”型,然后再转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型,最后用洛必达法则求解即可.

8. (04,填(1)题,4分) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$,则$a = $ ___1___,$b = $ ___-4___.

【分析】 本题属于已知极限求参数的反问题. 显然,$\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x - b) = 0$. 那么$\lim\limits_{x\to 0}(e^x - a) = 0$即为此题的突破点.

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$,且$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x - b) = 0$,所以

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x - a) = 0$,得$a = 1$.

极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x - b) = 1 - b = 5,\text{得 } b = -4.$$

因此,$a = 1, b = -4$.

【评注】 一般地,已知$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = A$,

(1) 若$g(x)\to 0$,则$f(x)\to 0$;

(2) 若$f(x)\to 0$,且$A\neq 0$,则$g(x)\to 0$.

9. (04,十五题,8分) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【分析】 先通分化为“$\frac{0}{0}$”型极限,再利用等价无穷小与洛必达法则求解即可.

【详解】
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 4x}{6x^2} = \frac{4}{3}.$$

【评注】 本题属于求未定式极限的基本题型,对于“$\frac{0}{0}$”型极限,应充分利用等价无穷小替换来简化计算.

熟记以下等价无穷小替换:

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\tan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,\alpha^x-1\sim x,\alpha^x-1\sim x\ln\alpha$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}^x$.

10. (05,填(1)题,4分) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=$ __2__.

【分析】 本题考查等价无穷小 $\sin x\sim x(x\to 0)$,进而有 $\sin\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2x}{x^2+1}(x\to\infty)$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2.$

【评注】 注意当 $\varphi(x)\to 0$ 时,$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$.

11. (05,十五题,8分) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})$.

【分析】 本题是求“$\infty-\infty$”型未定式极限,先通分,再利用等价无穷小.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x(1+x)}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x+x^2)-e^x+1}{(e^x-1)x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(x+x^2)-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(x+x^2)+e^x(1+2x)-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x+3xe^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+3e^x}{2}=\frac{3}{2}.$$

【评注】 当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$,将求极限式化为“$\frac{0}{0}$”型,用洛必达法则解之.

12. (06,(1)题,4分) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

【分析】 由于 $(-1)^n$ 处于指数位置,只能先分析 u_n 的取值,再计算极限.

【详解】 设 $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$,那么当 $n=2k$ 时,有

$$u_n=\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^1=1+\frac{1}{2k}=1+\frac{1}{n};$$

当 $n=2k-1$ 时,有

$$u_n=\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=\frac{2k-1}{2k}=1-\frac{1}{2k}=1-\frac{1}{n+1}.$$

所以当 $n\to\infty$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}u_n=1.$$

【评注】 本题属于极限计算题,只能从数列极限概念入手,分析通项的取值,再计算极限. 数列极限概念是本题的考点.

13. (06,(15) 题,7 分) 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x>0$, $y>0$. 求

(Ⅰ) $y(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$;

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)$.

【分析】 虽然 $f(x,y)$ 是二元函数,但所求极限实为一元函数的极限. 计算中注意使用洛必达法则.

【详解】 (Ⅰ) 注意当 $y\to+\infty$ 时,x 不变,所以 $x>0$ 时,

$$\begin{aligned}g(x)&=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)\\&=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right]\\&=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy}-\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\dfrac{1}{y}}\right)\\&=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}(1-\pi x)\end{aligned}$$

(Ⅱ) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}g(x)&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right]\\&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right]+\pi\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\arctan x}=I_1+\pi I_2.\end{aligned}$$

当 $x\to0^+$ 时,$\arctan x\sim x$,所以

$$I_2=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\arctan x}=1.$$

而极限 I_1 是 $\infty-\infty$ 型未定式,用洛必达法则计算,于是

$$\begin{aligned}I_1&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right]\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x\cdot\arctan x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x^2}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{2x} = 0$$

所以

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0 + \pi \cdot 1 = \pi.$$

【评注】 本题实际上是带参数的一元函数求极限问题. 极限的四则运算法则、罗必达法则和等价无穷小是本题的知识点和考点.

小　结

1. 根据极限的定义证明某些极限.
2. 利用极限四则运算法则和一些初等方法,如有理化、因式分解、同乘(除)一个因式等.
3. 利用重要极限,$\lim\limits_{n \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{n \to \infty}(1+\frac{1}{x})^x = e, \lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
4. 根据"单调有界数列必有极限"的准则,证明数列极限存在,再求极限.
5. 利用夹逼定理.
6. 利用泰勒展开.
7. 等价无穷小代换.
8. 洛必达法则.
9. 利用定积分概念,把某些和式极限转化为求函数在闭区间上的定积分.
10. 利用函数的连续性和导数定义.

二、连续

1. (98,选(2)题,3分) 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n \to 0}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数 $f(x)$ 的间断点,其结论为

(A) 不存在间断点.　　(B) 存在间断点 $x = 1$.

(C) 存在间断点 $x = 0$.　　(D) 存在间断点 $x = -1$.

【　　】

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查间断点的概念,这种问题通常先求极限得到 $f(x)$ 的表达式,然后再找 $f(x)$ 的间断点.

【详解】 由于 $f(x) = \lim\limits_{n \to 0}\frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1+x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \leqslant -1, \end{cases}$,可见 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

【评注】 函数$f(x)$为极限函数，为讨论$f(x)$连续性，应先求出极限，得到仅用x表示的函数，一般为分段函数，要确定间断点：无定义的点必为间断点，分段函数的分割点可能为间断点.

2.（03，三题，8分）设$f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，试补充定义$f(0)$，使得$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上连续.

【分析】 本题只需求出极限$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，然后定义$f(0)$为此极限值即可.

【详解】 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{\pi x\sin\pi x}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{\pi^2x^2}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi x}{2\pi^2x}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi x}{2\pi^2}\\&=-\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

由于$f(x)$在$(0,\frac{1}{2}]$上连续，因此定义 $f(0)=-\frac{1}{\pi}$，

使$f(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

【评注】 本题考查极限、连续等基本知识点，这在考研中是必考的，应当重视常用的等价形式：

当$x\to0$时，$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，

$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$

在利用上述等价形式时，应注意条件$x\to0$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，而$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，这是根据无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量.

3.（04，选(7)题，4分）函数$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$

(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

【　】

【答】 应选(A).

【分析】 如果$f(x)$在(a,b)内连续，且极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则函数$f(x)$在$(a,b)$内有界.

【详解】 当 $x \neq 0,1,2$ 时,$f(x)$ 连续,而

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\dfrac{\sin 3}{18}, \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{\sin 2}{4}, \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{\sin 2}{4}$,

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$.

所以,函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界,故选(A).

【评注】 一般地,如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界;如函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,且极限 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有界.

4. (04,选(8)题,4 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f(\dfrac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 第一类间断点.

(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

【　　】

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查极限 $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ 是否存在;如存在,是否等于 $g(0)$. 通过换元 $u = \dfrac{1}{x}$,可将极限 $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to \infty} f(u) = a$(令 $u = \dfrac{1}{x}$),又 $g(0) = 0$,

所以,

当 $a = 0$ 时,$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$,即 $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续,

当 $a \neq 0$ 时,$\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq g(0)$,即 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点,

因此,$g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关,故选(D).

【评注】 本题主要考查的是分段函数在分界点处的连续性. 首先应该知道函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续需满足的三个条件:

① 在 $x = x_0$ 处有定义;

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在;

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

注:不满足上述任一条件,就证明函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点处间断.

5. (04,选(11)题,4 分) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$,则下列结论