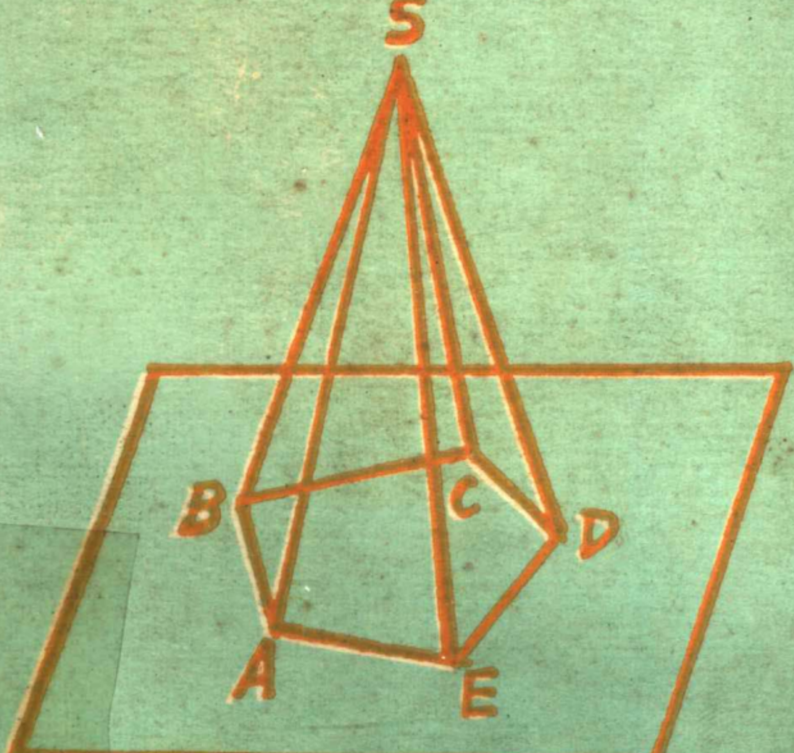
高中各科选修指导丛书

数学

（高中二年级适用）



教育科学出版社

封 面 画：乔 炜
封面设计：阮丽萍

ISBN 7-5041-0805-7/G·767
定价：5.80元

高中各科选修指导丛书

数　学

高　二　年　级

王建民　孙曾彪　邓　均　编

教育科学出版社

(京)新登字第111号
责任编辑：金宏瑛
封面设计：阮丽萍

高中各科选修指导丛书
数 学
高二年级
教育科学出版社出版
（北京·北太平庄·北三环中路46号）
新华书店首都发行所发行
北京飞达 印刷厂印装

开本：787毫米×1092毫米 1/32 印张：13.5 字数：306千字
1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷
印数：1—15000册

ISBN 7-5041-0805-7/G·767 定价：5.80元

编委会名单

主　编：默　一

副主编：燕　岭　王一行　张德政

编　委：（按姓氏笔画为序）

孔令颐　王锡祥　王文元　王　燕

孙增彪　宋国梁　陈育林　沈信予

唐朝智　龚亚夫　简国才　董世奎

序

《现行普通高中教学计划的调整意见》规定：从1991年起，在全国普通高中的高一、高二年级两年进行基础教学，减少课时，删去部分章节，降低难度和广度，并设单课性选修；高三年级开设分科性选修。为了适应这一调整变化，更好地贯彻教育方针，在使学生全面打好基础的前提下，进一步搞好第二课堂的教学，促进学生生动活泼地学习，发展他们的兴趣和特长，满足广大同学选修课外补充读物的渴望与要求，特别是使尚有余力的学生适应国家各个方面及各种层次的选拔，我们试编了这套《高中各科选修指导丛书》。

丛书与新教学大纲同步，源于教材又高于教材。大纲中规定的内容而已讲透的，本丛书略去不讲；讲得不够深透的部分，丛书力求讲深讲透；没有讲到而要涉及到的，丛书有针对性地作些铺垫。丛书作者教学经验丰富，撰写中突出重点，突破难点，起到加深理解，巩固、拓宽课堂教学，扩展学生的视野，启迪思维方法的目的。丛书将使程度上不同层次的学生均有所得。丛书对任课教师亦有一定的参考价值，为教师查找、选择选修读物提供了方便。

丛书以讲座为单元，每个分册设若干个专题讲座，每个专题大多包括概念、例题、分析，附有少量练习及考考答案，着重点出解题思路，以便有效地培养能力，求得巩固提高的目的。

丛书收集八门课程共十九个分册。除历史、地理、生物

各分一个分册外，数学、物理、化学、语文、英语每个年级为一个分册。同时还增加了《高中英语阅读技巧》一书。

丛书近四十位作者来自北京海淀区教师进修学校。北大附中、清华附中、101中、实验中学、师院附中等数十所学校，其中有特级教师，绝大多数为高级教师。

编写选修读物无疑是个重要课题，它具有相当强烈的迫切性和指导性；但丛书能否达到我们预期的宗旨，尚待教学实践的检验。恳切得到专家、同行及广大读者的指正。

默一

1991年4月

说　明

本书是高二学生的参考读物，目的为提高课堂教学质量，减轻学生课外负担，引起学生学习数学的兴趣，使学生有时间发展自己的特长和兴趣，培养具有灵活的分析问题和解决问题的能力。

本书采取讲座的形式，每讲一个问题，共分二十讲，有些讲的内容源于教材，并做了较多的补充和引伸，有些讲是供有能力的同学学习的一些新的知识，在每一讲中对概念的讲解力求准确、清晰，并根据知识点和对数学能力的培养的要求精选了一定数量的例题。对于重点例题，解前作了简明的分析，解后有注解，揭示了一些题的解题规律和技巧，以使在思维方法、数学方法、分析能力上给读者以启迪，每讲还配备了练习题并附答案与提示。

本书分别由北大附中孙曾彪、邓均，中关村中学王建民老师执笔编写，由于水平有限，书中可能会有缺点或错误，欢迎读者批评指正。

编者

1991年5月于北大附中

目　录

第一讲　坐标方法

在平面上建立坐标系，把点和有序实数对(x,y)对应起来，在此基础上把曲线和方程$F(x,y)=0$对应起来，把曲线划分的平面区域和不等式对应起来。这些对应关系使我们能够借助代数的方法研究和解决几何问题，也使我们能够借助几何图形的性质研究和解决代数或三角问题。这样的数学方法就称为坐标方法。平面解析几何就是用坐标方法研究平面曲线的一个数学分支，又称坐标几何。

一、坐标方法在几何上的应用

例1　已知：$\triangle ABC$是等边三角形，P是它的外接圆上劣弧BC上的任一点。

求证：$PA^2=PB\cdot PC+BC^2$。

证法一：如图1-1，建立平面直角坐标系，并设外接圆

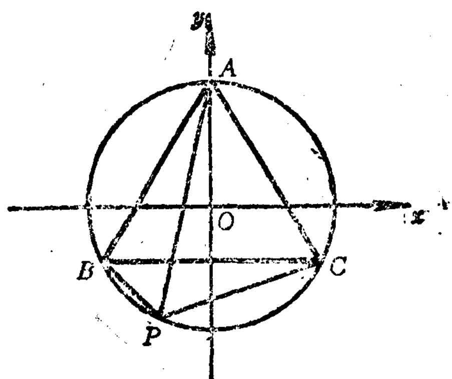


图1—1

半径为1。

则$A(0,1)$，$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$。设P点坐标为(cos$\theta$，sin)，

$$|PA|^2=\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2=2-2\sin\theta$$

$$|PB|^2=\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=2+\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$

$$|PC|^2=\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=2+\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$

$$\therefore\ |PB|\cdot|PC|=\sqrt{(2+\sin\theta)^2-3\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{4\sin^2\theta+4\sin\theta+1}$$
$$=|2\sin\theta+1|$$

$\because$ P在$\overset{\frown}{BC}$上，

$\therefore$ $210°<\theta<300°$，

$\therefore$ $-1\leqslant\sin\theta<-\frac{1}{2}$。

故 $-1\leqslant2\sin\theta+1<0$。

$\therefore$ $|PB|\cdot|PC|=-2\sin\theta-1$。

又 $|BC|=\sqrt{3}$， $\therefore$ $|BC|^2=3$，

这样$|PB|\cdot|PC|+|BC|=-2\sin\theta-1+3=2-2\sin\theta$，

$\therefore$ $PA^2=PB\cdot PC+BC^2$。

证法二：如图1-2，以A为极点，射线AO为极轴建立

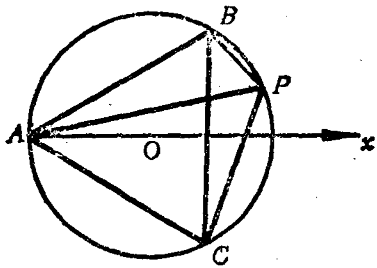


图1-2

平面极坐标系，并设外接圆半径为1。

由于圆的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta$，所以P点坐标设为$P(2\cos\theta, \theta)$。B，C的坐标为$B\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$，$C\left(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$。

在$\triangle PAB$中，由余弦定理得

$$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos60^\circ,$$

即 $PB^2-(2\cos\theta)PB+4\cos^2\theta-3=0$，

同法在$\triangle PAC$中，有

$$PC^2-(2\cos\theta)PC+4\cos^2\theta-3=0.$$

这样PB，PC是方程$t^2-(2\cos\theta)t+4\cos^2\theta-3=0$的两个根，因此有

$$PB\cdot PC=4\cos^2\theta-3.$$

而 $BC=2\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$。

$\therefore$ $BC^2=3$。

$\therefore$ $PB\cdot PC+BC^2=4\cos^2\theta-3+3=4\cos^2\theta$,

$$PA^2=(2\cos\theta)^2=4\cos^2\theta,$$

$$\therefore\quad PA^2=PB\cdot PC+BC^2.$$

注：平面几何中，线段没有方向之分，而直角坐标平面上的线段是有方向的，故证法1中线段长用符号$|PA|$表示，最后结论回到原平面几何的原貌上来，证法2中，在$\triangle PAB$中，如果利用余弦定理计算PB：

$$PB^2=PA^2+AB^2-2PA\cdot AB\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),$$

则会给后面的证明带来困难，根据两个$\triangle PAB$、$\triangle PAC$的"对等"性，预见到PB，PC应满足同一个方程，是发现解法的基础。

例2 已知：$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$。

求证：$AC<2AB$。

证明一：如图1-3。

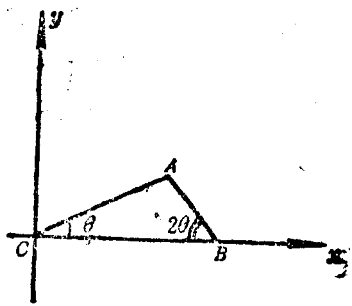


图1-3

设$AC=b$，$AB=c$，由正弦定理有

$$\frac{b}{\sin 2\theta}=\frac{c}{\sin\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta<2$$

$$\therefore \quad b<2c.$$

为了说明坐标方法，给出下面的证法二。

证法二：如图1-4，建立平面直角坐标系，使BC边在x轴上，BC边上的高AO在y轴上。

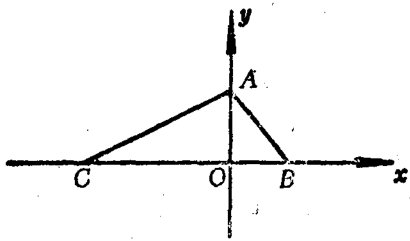


图1-4

设$\angle ACB=\theta$，$|AO|=1$。

则$\angle CBA=2\theta$，$C(-\mathrm{ctg}\theta,$ (

$B(\mathrm{ctg}2\theta,0)$，$A(0,1)$。

$|AB|^2=1+\mathrm{ctg}^2 2\theta$，

$|AC|^2=1+\mathrm{ctg}^2\theta$。

$AC<2AB$

$\Longleftrightarrow 1+\mathrm{ctg}^2\theta<4+4\mathrm{ctg}^2 2\theta$，

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\theta}<3+4\cdot\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\theta}{2\mathrm{tg}\theta}\right)^2$，

$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{tg}^2\theta\cdot(\mathrm{tg}^2\theta+1)>0$，这是显然正确的不等式，这就证明了 $AC<2AB$。

例3　G是等边三角形ABC的中心，过G作直线交AC于E，交CB于F。求证：

$$EG^2+GF^2-9EG^2\cdot GF^2-EG\cdot GF$$为定值。

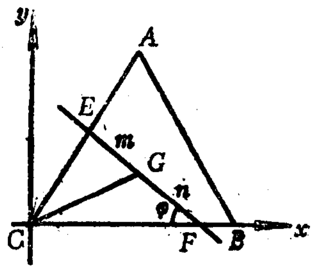


图1-5

分析：设△ABC的边长为1．当过G的直线过B点，即F和B点重合时，$GF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$EG=\frac{\sqrt{3}}{6}$，原式$=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-9\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=0$。可见实质上是证明$EG^2+GF^2-EG\cdot GF=9EG^2\cdot GF^2$。

证明的途径是在边长为已知的情况下，计算EG和GF的长，而计算方法可以考虑使用坐标方法。

证法一：如图1-5，以CB边所在直线为x轴，C点为原点建立平面直角坐标系，并设$AB=1$，则$G\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$，$CA$：$y=\sqrt{3}x$。

过G的直线方程设为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+t\cos\alpha \\ y=\frac{\sqrt{3}}{6}+t\sin\alpha \end{cases}$$

代入$y=\sqrt{3}x$中，得

$$\frac{\sqrt{3}}{6}+t\sin\alpha=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+t\cdot\cos\alpha\right)$$

解之得

$$t_1=\frac{\sqrt{3}}{3(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6\sin(\alpha-60^\circ)},$$

$$|EG|=\frac{\sqrt{3}}{6\sin(\alpha-60^\circ)}.$$

令 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}+t\sin\alpha=0$。

得 $t_2=-\frac{\sqrt{3}}{6\sin\alpha}$.

于是 $|GF|=-t_2=\frac{\sqrt{3}}{6\sin\alpha}$.

$\therefore EG^2+GF^2-EG\cdot GF$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha-60^\circ)-\sin\alpha\sin(\alpha-60^\circ)}{\sin^2\alpha\sin^2(\alpha-60^\circ)}\right]$$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos(2\alpha-120^\circ)}{2}}{\sin^2\alpha\cdot}\right.$$

$$\left.\frac{+\frac{1}{2}\cos(2\alpha-60^\circ)-\frac{1}{4}}{\sin^2(\alpha-60^\circ)}\right]$$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{\frac{3}{4}-\cos(2\alpha-60^\circ)\cdot\cos60^\circ+\frac{1}{2}\cos(2\alpha-60^\circ)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2(\alpha-60^\circ)}\right]$$