2006年版

根据教育部最新修订考试大纲编写

数学

（理工农医类）

全国各类成人高等学校招生统一考试教材

高中起点升本、专科

中国成人教育考试研究中心 编

人民日报出版社

全国各类成人高等学校招生统一考试教材

数 学

（理工农医类）

中国成人教育考试研究中心 编

人民日报出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国各类成人高等学校招生统一教材. 数学（理）/
中国成人教育考试研究中心编.
—北京：人民日报出版社，2006．3
ISBN 7-80208-341-9
Ⅰ．全...
Ⅱ．中...
Ⅲ．数学—成人教育：高等教育—入学考试—自学参考资料
Ⅳ．G723．4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 021464 号

书　　名：全国各类成人高等学校招生统一考试教材　数学（理）

编　　者：中国成人教育考试研究中心
责任编辑：银　河
封面设计：韩志刚

出版发行：人民日报出版社
社　　址：北京市金台西路 2 号
邮政编码：100733
经　　销：新华书店
印　　刷：北京旭升印刷装订厂

开　　本：787 × 1092　1/16
字　　数：1600 千字
印　　张：117.75
印　　数：3000 套
印　　次：2006 年 3 月第 1 版　2006 年 3 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7-80208-341-9/G · 188
定　　价：180.00 元（全六册）

前　　言

为了使考生在复习备考过程中能全面、系统、高效地复习各门课程，顺利通过成人高校入学考试，我们再次组织多年来从事成人教育的一线教师和专家，在分析历年成人高考考试试题的基础上，同时对2006年教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》进行了认真仔细的研究，重新修订了本《全国各类成人高等学校招生统一教材》。

本教材包括高中起点升本、专科的《语文》、《英语》、《数学》(文科)、《数学》(理科)、《历史地理综合科》、《物理化学综合科》等。

本教材自出版以来，深受广大师生的好评。这次重新修订时，编者依据新大纲的要求，注意把握成人高考命题的变化方向，是一套提高考生应考能力的复习教材。

这套教材既可作为广大考生平日作为学习的教科书，也可作为备考复习用书。

本教材经中国成人教育考试研究中心的专家审定。但限于编者水平，尚有不足之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2006年2月

目　录

第一部分　代　数

第二部分　三　角

第三部分　平面解析几何

第四部分 立体几何

第五部分 概率与初步统计

第一部分 代 数

第一章 集合和简易逻辑

〔复习内容〕

1. 集合的基本概念

集合的意义 把具有某种属性的一些对象看作一个整体,便形成一个集合.一般用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合.

元素 集合里的各个对象叫做集合的元素.一般用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

集合具有以下特征:

(1)确定性:对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素。这是集合的最基本特征。

(2)互异性:集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素。

(3)无序性:在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序,也就是说由 a、b 两个元素组成的集合与 b、a 两个元素组成的集合是相同的。

有限集 含有有限个元素的集合叫做有限集.

无限集 含有无限个元素的集合叫做无限集.

对于一个给定的集合 A 和确定的元素 a,它们之间有且只有以下两种关系:

(1)若 a 是 A 的元素,则说 a 属于 A,记为 $a\in A$.

(2)若 a 不是 A 的元素,则说 a 不属于 A,记为 $a\notin A$.

空集 不含任何元素的集合叫做空集,记为 $\varnothing$.

2. 集合的表示法

列举法 把集合的元素一一列举出来,写在大括号{ }内表示集合的方法,叫做列举法.如小于5的正整数集合可表示为 $\{1,2,3,4\}$.

描述法 把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号{ }内表示集合的方法,叫做描述法.如不等式 $x-5>2$ 的解集可表示为 $\{x|x-5>2\}$ 或 $\{x:x-5>2\}$.

常见的几种数集的表示符号:

$\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$)表示正整数集.

N 表示非负整数集,即自然数集.

Z 表示整数集.

Q 表示有理数集.

R 表示实数集. R^+(R^-)表示正(负)实数集.

说明 根据国家标准,自然数集包括“0”,请与以前沿用的所谓自然数集不包括“0”区别开.

3. 集合与集合的关系

子集 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 就叫做集合 B 的子集,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”. 若 A 是 B 的子集且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 就叫做集合 B 的真子集,记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$. 如果 $A\subseteq B$ 同时 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$.

说明 在国家标准中,用符号$\subsetneqq$(或$\supsetneqq$)表示集合间的真子集关系;用符号$\subseteq$(或$\supseteq$)表示集合间的子集关系,这个关系也可用符号$\subset$(或$\supset$)表示.

规定空集是任何集合的子集. 并由此及真子集的概念知,空集是任何非空集合的真子集.

子集的性质:(1)$A\subseteq A$;

(2)若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$.

交集的性质:(1)$A\cap A=A$;(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$.

并集的性质:(1)$A\cup A=A$;(2)$A\cup\varnothing=A$.

全集 在研究集合与集合之间的关系时,所讨论的集合往往都是某一给定的集合的子集,这个给定的集合叫做全集,用符号 U 表示.

补集 若 $A\subseteq U$,由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 的补集,表示为$\complement A$.

补集的性质:(1)$A\cap\complement A=\varnothing$;(2)$A\cup\complement A=U$;

说明 以前用 $\overline{A}$ 表示 A 的补集,现按国家标准用$\complement A$ 表示.

集合相等

对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$. 我们就说这两个集合相等。即如果 $\forall a\in A\Rightarrow a\in B$;$\forall x\in B\Rightarrow x\in A$ 则 $A=B$. 例如同解方程与同解不等式,其实质就是集合相等.

4. 简易逻辑

(1)命题的条件和结论

一个数学命题都有条件和结论两部分. 如果把条件和结论分别用 A、B 表示,那么命题可以写成“如果 A 成立,那么 B 成立”,或简写成“若 A,则 B”.

(2)充分条件

如果 A 成立,那么 B 成立,即 $A\Rightarrow B$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的充分条件.

(3)必要条件

如果 B 成立,那么 A 成立,即 $B\Rightarrow A$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的必要条件.

(4)充要条件

如果 A 既是 B 成立的充分条件,又是 B 成立的必要条件,即既有 $A\Rightarrow B$,又有 $B\Rightarrow A$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的充分必要条件,简称充要条件.

〔例题〕

例1 选择题:

(1)已知集合 $A=\{0,3\}$,$B=\{0,3,4\}$,$C=\{1,2,3\}$,则$(B\cup C)\cap A=$______.

(A)$\{0,1,2,3,4\}$ (B)$\varnothing$ (C)$\{0,3\}$ (D)$\{0\}$

(2)以下说法中正确的个数有______.

①$M=\{(1,2)\}$与$N=\{(2,1)\}$表示同一个集合;②$M=\{1,2\}$与$N=\{2,1\}$表示同一个集合;③空集是唯一的;④$M=\{y|y=x^2+1,x\in R\}$与$N=\{x|x=t^2+1,t\in R\}$,则集合$M=N$.

A. 3 个　B. 2 个　C. 1 个　D. 0 个

(3)设集合$M=\{x|-1\leq x\leq 10\}$,$N=\{x|x>7$ 或 $x<1\}$,则$M\cap N=$______.

(A)$\{x|7<x\leq 10\}$　(B)$\{x|-1\leq x<1$ 或 $7<x\leq 10\}$

(C)$\{x|-1\leq x<1\}$　(D)$\{x|1<x\leq 10\}$

(4)已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合$M=\{1,3,5\}$,$N=\{2,4,6\}$,则$\complement M\cap N=$______.

(A)$\varnothing$　(B)U　(C)N　(D)M

(5)下列关系中,正确的有______.

(A)$\{0\}=\varnothing$　(B)$\varnothing\in\{0\}$　(C)$\varnothing\subsetneqq\{0\}$　(D)$0\subsetneqq\varnothing$

(6)设集合$M=\{(x,y)|xy>0\}$,$N=\{(x,y)|x>0$ 且 $y>0\}$,则______.

(A)$M\cup N=M$　(B)$M\cup N=N$　(C)$M\cap N=M$　(D)$M\cap N=\varnothing$

(7)下列命题:①空集没有子集;②空集是任何集合的真子集;③任何集合必有两个或两个以上的子集;④用列举法表示集合时,只能表示有限集,不能表示无限集,其中正确的有______.

A. 3 个　B. 2 个　C. 1 个　D. 0 个

解　(1)$B\cup C=\{0,1,2,3,4\}$,$(B\cup C)\cap A=\{0,3\}$,选(C).

说明　求两个集合的并集,相同的元素只写一个,如$B\cup C$中的元素 3.

在集合的运算中,如有小括号应先算小括号内的.

(2)②、③、④为正确,选(A)

说明　由不等式定义的集合运算,可利用数轴直观地求解.

(3)$M\cap N=\{x|-1\leq x<1$ 或 $7<x\leq 10\}$,选(B).

(4)$\complement M=\{2,4,6\}$,$\complement M\cap N=\{2,4,6\}$,选(C).

(5)$\{0\}$是只含有一个元素 0 的单元素集合,而$\varnothing$是空集,所以(A)不正确;符号"$\in$"用于元素与集合的关系,故(B)也不正确;因为空集是任何非空集合的真子集,所以(C)正确.

(6)M与N都是点的集合.

由$xy>0$知,点(x,y)的横、纵坐标同号,集合$M=\{$第一或第三象限的点$\}$;

由$x>0$且$y>0$知,点(x,y)的横、纵坐标的值均为正,集合$N=\{$第一象限的点$\}$.

因此　$M\cup N=M$,选(A).

(7)$\because\varnothing\subseteq\varnothing$　$\therefore$ A 错;$\varnothing$为任何非空集合真子集,为任何集合子集,故 B 错;$\varnothing$只有一个子集;用列举法可以表示无限集,例如$\{2,4,6,8\cdots\}$,表示正偶数组成的集合. 选(D)

例 2　填空题:

(1)若$A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=k+3,k\in\mathbf{Z}\}$,则$A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

(2)若$A=\{1,2,3,4,5\}$,$A\cap B=\{1,3,5\}$,$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,则$B=$______.

(3)若$A\subseteq C$,化简$(A\cup B)\cup(B\cup C)=$______.

(4)若$M=\{x|2x+a=0\}$,$P=\{x|1<x<4$,且$x\in\mathbf{N}_+\}$,且$M\cap P$为非空集合,则$a=$______.

解　(1)A为奇数集合,而B其实为整数集合,则$A\cap B=A$;$A\cup B=B$.

(2)由A及$A\cap B$知,$1,3,5\in B$且$2,4\notin B$;由A及$A\cup B$知,$0,6\in B$. 故$B=\{1,3,5,0,6\}$.

(3)由于$A\subseteq C$,所以$A\cup B\subseteq B\cup C$,则$(A\cup B)\cup(B\cup C)=B\cup C$.

(4)由已知,$P=\{2,3\}$,把 $x=2$、3 分别代入 $2x+a=0$ 中,得 $a=-4$ 或 $a=-6$.

例3　设 $A=\{2,3\}$,$B=\{2,3,4,5\}$,$U=\{0,1,2,3,4,5\}$,求集合 $CA\cap CB$ 的所有的子集

解　因为 $CA=\{0,1,4,5\}$,$CB=\{0,1\}$.

所以　$CA\cap CB=\{0,1\}$.

因此　$CA\cap CB$ 的所有的子集为:$\{0\}$、$\{1\}$、$\{0,1\}$、$\varnothing$.

例4　设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|-5<x<5\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 7\}$.求 CA, CB, $C(A\cap B)$, $CA\cup CB$.

解　由已知,得 $CA=\{x|x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 5\}$,$CB=\{x|x<0$ 或 $x>7\}$.

所以　$CA\cup CB=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$,

因为　$A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\}$,所以 $CA\cap B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$.

思考与练习:

1. 选择题:

(1)已知全集 $U=\{0,-1,-2,-3,-4\}$,集合 $M=\{0,-1,-2\}$,$N=\{0,-3,-4\}$,则 $CM\cap N=$______.

(A)$\{0\}$　　(B)$\{-3,-4\}$　　(C)$\{-1,-2\}$　　(D)$\varnothing$

(2)设集合 $M=\{x|x\geqslant -4\}$,$N=\{x|x<6\}$,则 $M\cup N=$______.

(A)$\mathbf{R}$　　(B)$\{x|-4\leqslant x<6\}$　　(C)$\varnothing$　　(D)$\{x|-4<x<6\}$

(3)设全集 $U=\mathbf{R}$,a、$b\in\mathbf{R}$,$CP=\{x|x\geqslant a\}$,$CQ=\{x|x\geqslant b\}$,若 $P\cap Q$,则______.

(A)$a\geqslant b$　　(B)$b\geqslant a$　　(C)$a>b$　　(D)$b>a$

(4)设 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{10}\}$,$a=3$,下列各式正确的是______.

(A)$a\subsetneqq M$　　(B)$a\notin M$　　(C)$\{a\}\in M$　　(D)$\{a\}\subsetneqq M$

(5)已知集合 M 满足条件:$\{1,2\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,6\}$,那么这样的集合 M 有______.

(A)6 个　　(B)7 个　　(C)8 个　　(D)9 个

(6)若 M、P 为非空集合,且 $M\subsetneqq P$,$P\subsetneqq U$,U 为全集,则下列集合中空集是______.

(A)$M\cap P$　　(B)$CM\cap CP$　　(C)$CM\cap P$　　(D)$M\cap CP$

2. 填空题:

(1)若 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,6\}$,则 $A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

(2)若 $A=\{$正数$\}$,$B=\{$非负数$\}$,则 $A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

(3)若 $A=\{x|x>-1\}$,$B=\{x|x>-3\}$,则 $A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

(4)若 $A=\{x|x\geqslant -2\}$,$B=\{x|-1<x\leqslant 4\}$,则 $A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

(5)若 $A=\{x|1<x\leqslant 5\}$,$B=\{$小于 10 的自然数$\}$,则 $A\cap B=$______.

(6)若 $A=\{$等边三角形$\}$,$B=\{$等腰三角形$\}$,则 $A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

(7)若 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x|x>-1\}$,则 $CA=$______.

(8)若 $U=\{$三角形$\}$,$A=\{$直角三角形$\}$,则 $CA=$______.

(9)若 $A=\{1,2\}$;$B=\{2,3\}$,$C=\{3,4,5\}$,则 $(A\cap B)\cup C=$______,$(A\cup B)\cap C=$______,$(A\cap B)\cap C=$______,$A\cap(B\cup C)=$______,$B\cap(A\cup C)=$______.

(10)若 $A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B=$______,$A\cup B=$______.

3. 在下列各题横线上填写适当的符号($\in$,$\notin$,$=$,$\supsetneqq$,$\subsetneqq$):

(1)$\varnothing$ ______ $\{a\}$;(2)a ______ $\{a\}$;(3)$\{a\}$ ______ $\{a\}$;(4)$\{a\}$ ______ $\{a,b\}$;
(5)6 ______ $\{0,1,2\}$;(6)0.5 ______ $\mathbf{Q}$;(7)$\mathbf{R}$ ______ $\mathbf{Q}$;(8)$\mathbf{N}$ ______ $\mathbf{Z}$.

4. 分别用符号"$\subsetneqq$"或"$=$"表示下列各题中 A 与 B 的关系:

(1)$A=\{$正整数$\}$和 $B=\{$非负整数$\}$;

(2)$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$和 $B=\{2,3\}$.

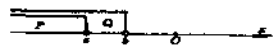
5. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$的所有子集,并指出其中哪个集合不是集合 A 的真子集.

【参考答案】

1. 解　(1)$\complement M=\{-3,-4\}$,$\complement M\cap N=\{-3,-4\}$,选(B).

(2)$M\cup N=\mathbf{R}$,选(A).

(3)$P=\{x\mid x<a\}$,$Q=\{x\mid x<b\}$.



(第1(3)题)

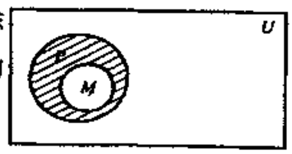
由 $P\cap Q=P$ 知,$P\subsetneqq Q$ 或 $P=Q$.

当 $P\subsetneqq Q$ 时,由图知 $b>a$;

当 $P=Q$ 时,$a=b$.

从而 $b\geqslant a$,选(B).

(4)符号"$\subsetneqq$"用于表示集合与集合的关系,而 a 是元素,可排除(A);因为 $3<\sqrt{10}$,故可排除(B);符号"$\in$"用于表示元素与集合的关系,而$\{a\}$、M 都是集合,可排除(C),故(D)正确.



(第1(6)题)

(5)有集合$\{1,2\}$及它分别与下列集合:$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$,$\{3,4\}$,$\{3,5\}$,$\{4,5\}$的并集,共七个.故选(B).

(6)由 $M\cap P=M$ 可排除(A);由 $\complement M\cap\complement P=\complement P$ 可排除(B);由 $M\subsetneqq P$ 知$\complement M\cap P$是由集合 P 中除去 M 中所有元素组成的非空集合(图中斜线部分),所以可排除(C),故(D)正确.

2. 解　(1)$A\cap B=\{2,4\}$;$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

(2)$A\cap B=A$;$A\cup B=B$.

(3)$A\cap B=A$;$A\cup B=B$.

(4)$A\cap B=B$;$A\cup B=A$.

(5)$A\cap B=\{2,3,4,5\}$.

(6)$A\cap B=A$,$A\cup B=B$.

(7)$\complement A=\{x\mid x\leqslant -1\}$.

(8)$\complement A=\{$斜三角形$\}$.

(9)$(A\cap B)\cup C=\{2,3,4,5\}$,$(A\cup B)\cap C=\{3\}$,$(A\cap B)\cap C=\varnothing$,$A\cap(B\cup C)=\{2\}$,$B\cap(A\cup C)=B$.

(10)$A=\{$偶数$\}$,$B=\{$奇数$\}$,则 $A\cap B=\varnothing$;$A\cup B=\mathbf{Z}$.

3. 解　(1)$\subsetneqq$　(2)$\in$　(3)$=$　(4)$\subsetneqq$　(5)$\notin$　(6)$\in$　(7)$\supsetneqq$　(8)$\subsetneqq$.

4. 解　(1)$A\subsetneqq B$.　　(2)$A=B$.

说明　非负整数包括正整数和零.

5. 解　集合 A 的所有子集为:$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$及 $\varnothing$.其中$\{0,1,2\}$不是集合 A 的真子集.

第二章 不等式和不等式组

〔复习内容〕

1. 不等式的意义和性质

(1)对于两个实数 a 与 b,有

$$a-b>0\Longleftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0\Longleftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0\Longleftrightarrow a<b.$$

(2)不等式的性质

1)$a>b\Longleftrightarrow b<a$;

2)$a>b,b>c\Longleftrightarrow a>c$;

3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$;

4)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

5)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;

6)$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$;

7)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

8)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>1)$;

9)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1)$.

2. 解不等式

(1)不等式的解集和解不等式

在含有未知数的不等式中,能使不等式成立的未知数所有可取值的集合,叫做这个不等式的解的集合.求不等式的解集的过程,叫做解不等式.

(2)一元一次不等式及其解法

1)一元一次不等式的一般形式为 $ax>b$.

2)解的讨论:

(i)当 $a\neq0$ 时

如果 $a>0$,那么解集是$\left\{x\middle|x>\frac{b}{a}\right\}$,也可写成 $x>\frac{b}{a}$,下面也作类似写法.

如果 $a<0$,那么解集 $x<\frac{b}{a}$.

(ii)当 $a=0$ 时

如果 $b\geqslant0$,那么 $ax>b$ 无解,即解的集合是空集 $\varnothing$.如果 $b<0$,那么 $ax<b$ 的解为全体实数,即解的集合是 $\mathbf{R}$.

(3)一元一次不等式组及其解法

1)一般形式为$\begin{cases}ax+b>0\\cx+d>0.\end{cases}$

2)解的讨论:

(i)不等式组$\begin{cases}x>m\\x>n\end{cases}$当$m>n$时的解集是$x>m$;

(ii)不等式组$\begin{cases}x<m\\x<n\end{cases}$当$m>n$时的解集是$x<n$;

(iii)不等式组$\begin{cases}x<m\\x>n\end{cases}$当$m>n$时的解集是$n<x<m$;

(iv)不等式组$\begin{cases}x>m\\x<n\end{cases}$当$m>n$时的解集是$\varnothing$.

(4)一元二次不等式及其解法

1)一般形式为$ax^2+bx+c>0$,这里$a\neq0$.

2)解的讨论:

设$\Delta=b^2-4ac$,x_1、x_2(为讨论方便,不妨设$x_1<x_2$)是方程$ax^2+bx+c=0$的两个根.

(i)当$\Delta<0$时

如果$a>0$,不等式的解集是$\mathbf{R}$;

如果$a<0$,不等式的解集是$\varnothing$.

(ii)当$\Delta=0$时

如果$a>0$,不等式的解集是$x\neq-\dfrac{b}{2a}$;

如果$a<0$,不等式无解.

(iii)当$\Delta>0$时

如果$a>0$,不等式的解集是$x<x_1$或$x>x_2$;

如果$a<0$,不等式的解集是$x_1<x<x_2$.

(5)含有绝对值的不等式的解法

1)若$a>0$,$|x|<a$的解集是$-a<x<a$;

2)若$a>0$,$|x|>a$的解集是$x>a$或$x<-a$.

3. 证明不等式的常用定理

定理1 如果a、$b\in\mathbf{R}$,那么$a^2+b^2\geqslant2ab$(等式仅当$a=b$时才成立).

推论:如果a、$b\geqslant0$,那么$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(等式仅当$a=b$时才成立).

定理2:a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,则$a^3+b^3+c^3\geqslant3abc$(等式仅当$a=b=c$时才成立)

推论:a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,则$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(等式仅当$a=b=c$时才成立)

(1)满足不等式$a<x<b$的一切实数x的集合叫做开区间,记做(a,b);

(2)满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x的集合叫做闭区间,记做$[a,b]$;

(3)满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的一切实数x的集合叫做半开半闭区间,分别记做$[a,b)$,$(a,b]$.

特别地,$\mathbf{R}$可记为$(-\infty,+\infty)$,符号“$+\infty$”读作“正无穷大”,“$-\infty$”读作“负无穷大”,它们不是数,只是记号.$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$分别表示$x\geqslant a$,$x>a$,$x\leqslant b$,

$x<b$ 的一切实数 x 的集合.

〔例题〕

例 1 解不等式 $-8<\frac{-3x-2}{4}-5<-5$.

解 不等式各方同乘以 4,得

$$-32<-3x-2-20<-20,\text{即}-32<-3x-22<-20.$$

不等式各方同时加 22,得 $-10<-3x<2$,

不等式各方同时除以 -3,得

$$\frac{10}{3}>x>-\frac{2}{3}.$$

所以原不等式的解集为 $-\frac{2}{3}<x<\frac{10}{3}$.

说明 本例中的不等式,也可化为不等式组

$$\begin{cases}\frac{-3x-2}{4}-5>-8,\\ \frac{-3x-2}{4}-5<-5.\end{cases}$$

来解.

例 2 解不等式组

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{x}{3}>-1, & ①\\ 2(x-3)-3(x-2)<0. & ②\end{cases}$$

并用数轴表示其解集.

解 由①,得 $x>-6$,

由②,得 $x>0$,

所以,原不等式组化成

$$\begin{cases}x>-6,\\ x>0.\end{cases}$$

即原不等式组的解集为

$$x>0.$$

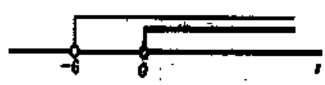


图 2-1

在数轴上表示,如图 3-1 中 x 轴上粗线部分.

说明 求不等式组的解集,就是求不等式组中各个不等式的解集的交集.

例 3 解不等式组

$$\begin{cases}5+4x\leqslant 6+5x, & ①\\ 9x-4\leqslant 7x, & ②\\ 11+3x>5x+9. & ③\end{cases}$$

解 由①,得 $x\geqslant-1$. 由②,得 $x\leqslant 2$. 由③,得 $x<1$.

所以原不等式组化为

$$\begin{cases} x \geqslant -1, & ④ \\ x \leqslant 2, & ⑤ \\ x < 1. & ⑥ \end{cases}$$

由⑤、⑥组成的不等式组的解集为

$$x < 1. \quad ⑦$$

由⑦、④组成的不等式组的解集为 $-1 \leqslant x < 1$.

所以原不等式组的解集为 $-1 \leqslant x < 1$.

说明　解三个一元一次不等式的不等式组时，整理后，至少有两个不等式的不等号同向. 因此，在求不等式的解集时，可先将同向的两个不等式化成一个，再求它与第三个不等式解集的交集即可.

例 4　解不等式 $12x^2-5x-3>0$.

解　因为方程 $12x^2-5x-3=0$ 的根是 $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=\frac{3}{4}$.

又因为 x^2 的系数是 $12>0$，所以原不等式的解集是 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{3}{4}$.

例 5　解不等式　$-2x^2 \geqslant 3x-4$.

解　原不等式可化成　$2x^2+3x-4 \leqslant 0$.

因为方程 $2x^2+3x-4=0$ 的根是 $x_1=\frac{-3+\sqrt{41}}{4}, x_2=\frac{-3-\sqrt{41}}{4}$，又 x^2 的系数是 $2>0$，所以，原不等式的解集是 $\frac{-3-\sqrt{41}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$.

例 6　解不等式 $\frac{3x+6}{5x-15}<0$.

解　要使分式 $\frac{3x+6}{5x-15}$ 小于零，必须而且只须分子和分母异号，所以这个不等式可化为两个不等式组：

$$(\text{I})\begin{cases} 3x+6>0, \\ 5x-15<0, \end{cases} \quad \text{或}(\text{II})\begin{cases} 3x+6<0, \\ 5x-15>0. \end{cases}$$

不等式组(Ⅰ)的解集是 $\{x \mid -2<x<3\}$；不等式组(Ⅱ)的解集是空集(即(Ⅱ)无解).

所以，原不等式的解集是 $\{x \mid -2<x<3\}$.

说明　因为不等式 $\frac{3x+6}{5x-15}<0$ 与不等式 $(3x+6)\cdot(5x-15)<0$ 同解，所以也可按照解一元二次不等式的方法来解，且解法简便.

解此不等式，不可两边同乘以 $5x-15$，因为 $5x-15$ 的值正、负未定.

例 7　解不等式 $\frac{3x+2}{x-3}>1$.

解　移项，得

$$\frac{3x+2}{x-3}-1>0.$$

整理化简，得

$$\frac{2x+5}{x-3}>0.$$

其同解不等式为

$$(2x+5)(x-3)>0.$$

方程$(2x+5)(x-3)=0$的根是$x_1=-\frac{5}{2}$,$x_2=3$,又$(2x+5)(x-3)$中含x^2项的系数是$2>0$,因此,原不等式的解集为$x>3$或$x<-\frac{5}{2}$.

说明 解此类型不等式可先移项后通分化成例6的类型再解.

例8 解不等式$|2x-3|>5$.

解 原不等式同解于$2x-3>5$或$2x-3<-5$,所以,原不等式的解集为$x>4$或$x<-1$.

例9 解不等式$|3x+5|\leqslant 8$.

解 原不等式同解于

$$-8\leqslant 3x+5\leqslant 8,\quad -13\leqslant 3x\leqslant 3,\quad -\frac{13}{3}\leqslant x\leqslant 1.$$

这就是所求的不等式的解集.

说明 解含有绝对值的不等式的要点是根据绝对值的意义,把绝对值的符号去掉,从而化成不含绝对值的不等式或不等式组,然后求解.

例10 解不等式$2<|3x-2|<3$.

解 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases}|3x-2|>2, & ①\\ |3x-2|<3. & ②\end{cases}$$

由①,得$3x-2>2$或$3x-2<2$,则

$$x>\frac{4}{3}\text{或}x<0 \qquad ③$$

由②,得$-3<3x-2<3$,

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}. \qquad ④$$

使③、④同时成立,得$-\frac{1}{3}<x<0$或$\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$,此为原不等式的解.

例11 已知不等式$ax^2+bx+4>0$的解集为$\{x|-1<x<2\}$求实数a、b的值.

【解析】 二次不等式的解与判别式有关,与韦达定理紧密相联.

解:由题意知$a<0$,原不等式可化为$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{4}{a}<0$.

由$\begin{cases}-1+2=-\frac{b}{a}\\ -1\cdot 2=\frac{4}{a}\end{cases}\Rightarrow a=-2,b=2.$

另法:由$(x+1)(x-2)<0$,即$x^2-x-2<0$.

将原不等式变形为$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{4}{a}<0 \quad (\because a<0)$

比较系数得:$a=-2,b=2$.

例 12 解不等式 $\sqrt{4x^2-4x+1}<1$.

解法一 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} 4x^2-4x+1\geqslant 0, & ① \\ 4x^2-4x+1<1. & ② \end{cases}$$

由①,得 $(2x-1)^2\geqslant 0$,故不等式的解为全体实数.

由②,得 $$x(x-1)<0,$$

所以 $$0<x<1.$$

由①、②知,原不等式的解为 $0<x<1$.

解法二 原不等式可化为

$$\sqrt{(2x-1)^2}<1,$$
$$|2x-1|<1,$$

所以 $$-1<2x-1<1,$$

即 $$0<x<1.$$

例 13 已知 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$,$B=\{x|x^2+4x+p<0\}$,且 $A\cup B=A$,求实数 P 的范围。

解 由 $A\cup B=A$,则 $B\subseteq A$,(但不要忽略 $\varnothing$ 是任何集合的子集)

$\because A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

所以当 $P\geqslant 4$ 时,$B=\varnothing$

当 $P<4$ 时

$$B=(-2-\sqrt{4-P},-2+\sqrt{4-p})$$

故 $P\geqslant 4$ 时,显然有 $B\subseteq A$;$P<4$ 时,若满足 $B\subseteq A$,必须 $-2+\sqrt{4-P}\leqslant -1$,即 $\sqrt{4-P}\leqslant 1$,$3\leqslant P\leqslant 4$。

综上所述,$P\in[3,+\infty)$

例 14 $a>0,b>0$,则 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$______ $a+b$(用"$\geqslant$"或"$\leqslant$"号连接).

【分析】 **法一:** $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}-a-b=(a-b)\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$

$\because (a-b)^2\geqslant 0 \quad a+b>0,ab>0$

$\therefore \dfrac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geqslant 0$,故用"$\geqslant$"连接.

法二:(用比商法)

$\because \dfrac{\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}}{a+b}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab}\geqslant\dfrac{2ab-ab}{ab}=1$

$\therefore$ 用"$\geqslant$"号连接.

说明 本例证法一叫做比较法,即将要证的 $A>B$(或 $A\geqslant B$)转化为证 $A-B>0$(或 $A-B\geqslant 0$).

本例证法二叫做比商法。

例 15 若 $a,b,c>0$,且 $a+b+c=1$,求证 $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$.

证明 由已知,$1-a=b+c$,$1-b=a+c$,$1-c=a+b$.

又 $$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}, \quad ①$$
$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac}, \quad ②$$
$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}. \quad ③$$

①×②×③,得 $(b+c)(a+c)(a+b)\geqslant 8abc$.