



数学建模方法

李伯德 编著

甘肃教育出版社

数学建模方法

李伯德 编著

甘肃教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学建模方法 / 李伯德编著. —兰州: 甘肃教育出版社, 2006.5

ISBN 7-5423-1561-7

I. 数... II. 李... III. 数学模型 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 048949 号

责任编辑: 冯 娟

封面设计: 余 音

数学建模方法

李伯德 编著

甘肃教育出版社出版发行

(730000 兰州市南滨河东路 520 号)

www.gseph.com 0931-8773231

天水新华印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 11.5 字数 240 千

2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—1,000

ISBN 7-5423-1561-7 定价: 18.00 元

内容提要

本书是兰州商学院科研资助项目的研究成果.本书通过大量的实例,详细介绍了实践中经常用到的数学建模方法.本书按数学建模常用的方法共分为 10 章,包括数学建模概述、初等数学方法、微积分方法、微分方程方法、差分方程方法、插值与数据拟合、线性规划、非线性规划与动态规划、概率统计方法、决策与对策方法等.本书有两大特点:一是突出了经济、管理实践中常见的数学问题的解决;二是通俗易懂,读者只需具备微积分、线性代数、概率统计方面的基础知识就可以阅读、学习本书,对学过运筹学的读者来说,阅读起来更方便.

本书可作为高等财经类院校数学建模课程的教材,也可作为大学生数学建模竞赛培训教材,以及科技工作者参考.

前 言

随着科学技术的发展,尤其是电子计算机的迅速发展,数学的应用不仅在它的传统领域——工程技术、经济建设等领域发挥越来越重要的作用,而且不断地向一些新的领域渗透,形成了许多交叉学科,数学与计算机相结合,形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,数学作为一种“技术”日益受到人们的重视.

培养学生的数学素质,提高学生的应用能力是当前进行的大學数学教学改革中的一项重要内容.由于数学建模课程在培养学生能力方面的重要作用,这门课程的建设已经成为数学教学改革的一个重要方面.数学建模进入大学课堂,既顺应时代发展的潮流,也符合教育改革的要求.作为一门新型的学科,数学建模正日益焕发出其独特的魅力.

我国于1992年由中國工业与应用数学学会(CSIAM)举办了首届全国大学生数学建模竞赛(China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling,简称CUMCM),1994年国家教委正式将其列为全国大学生四大竞赛之一,每年的9月下旬举行,旨在培养大学生的创新意识和团队精神,经过十余年的发展,大学生数学建模竞赛已成为目前全国高校规模最大的课外科技创新活动,2005年,全国有30个省(市、自治区)795所高校的8492个队伍参加.

目前,有关数学建模的教材不少,但针对高等财经、管理类学

生的教材却极少.因此,作者在总结近十年来从事大学生数学建模竞赛经验和教学实践的基础上,编写了本书.本书根据高等财经类院校学生的特点,除了补充一些基本的应用数学的知识之外,从学生掌握的难易程度出发,通过数学建模的范例,进行详细解说来展示数学建模方法的精华部分,使学生容易掌握数学建模的基本方法与技巧,让学生在学习过程中能举一反三.

本书力图贯穿现代教育思想,以介绍数学建模的一般方法为主线,着重训练学生运用数学知识建立数学模型、解决实际问题的技能技巧.虽然书中内容涉及微积分、线性代数、概率统计、运筹学等知识,但读者只要学过微积分、线性代数和了解简单的概率统计知识就可以学习本书,因此利用本书可以使学生在大学二年级就能学习数学建模课程,而不必等到第三、第四学年才开始学习数学建模课程.

全书共分为 10 章,内容包括数学建模概述、初等数学方法、微积分方法、微分方程方法、差分方程方法、插值与数据拟合、线性规划、非线性规划与动态规划、概率统计方法、决策与对策方法.此外,为使学生了解参加 CUMCM,本书在附录中给出了兰州商学院学生参加 CUMCM 的部分获奖论文,这些获奖论文没有经过删减,也没有给出点评,目的是让想参加 CUMCM 的同学通过阅读获奖论文原文,了解 CUMCM 论文的整体情况,自己思考总结,并从这些获奖论文中得到启发.

由于作者水平有限,书中疏漏或不妥之处在所难免,敬请各位专家和读者不吝赐教,以便及时修改订正.

编者

2005 年 10 月

目 录

第 1 章 数学建模概述

§ 1.1 数学模型的概念、分类及作用	(1)
1.1.1 数学模型的概念	(1)
1.1.2 数学模型的分类	(3)
1.1.3 数学模型的作用	(4)
§ 1.2 数学建模的一般步骤与基本方法	(6)
1.2.1 数学建模的概念	(6)
1.2.2 数学建模的步骤	(8)
1.2.3 数学建模与数学模型的关系	(11)
1.2.4 数学建模的基本方法	(12)
习题 1	(13)

第 2 章 初等数学方法

§ 2.1 贷款买房方案的选择	(14)
§ 2.2 公平席位的分配方法	(17)
§ 2.3 双层玻璃的功效	(21)

§ 2.4	围棋中的两个问题	(24)
§ 2.5	商品包装的规律	(31)
§ 2.6	划艇比赛的成绩	(33)
习题 2		(39)

第 3 章 微积分方法

§ 3.1	最优价格	(42)
§ 3.2	存贮模型	(44)
3.2.1	不允许缺货的存贮模型	(44)
3.2.2	允许缺货的存贮模型	(46)
§ 3.3	走路步长的选择	(48)
§ 3.4	洛伦兹曲线与基尼系数	(50)
§ 3.5	下雪时间的确定	(51)
§ 3.6	森林救火费用最小问题	(53)
习题 3		(55)

第 4 章 微分方程方法

§ 4.1	常微分方程的平衡点及其稳定性	(57)
§ 4.2	人口模型	(59)
4.2.1	Malthus 人口模型	(59)
4.2.2	Logistic 模型	(60)
§ 4.3	新产品的推销与广告	(63)
4.3.1	新产品推销模型	(63)
4.3.2	广告模型	(65)
§ 4.4	Horrod-Domer 经济增长模型	(69)
§ 4.5	饿狼追兔问题	(71)
§ 4.6	捕鱼业的持续稳产高效益	(73)

习题 4	(80)
------------	------

第 5 章 差分方程方法

§ 5.1 差分方程的平衡点及其稳定性	(82)
§ 5.2 价格变动模型	(84)
§ 5.3 Samuelson-Hicks 宏观经济模型	(88)
§ 5.4 蛛网模型	(91)
§ 5.5 国民收入的稳定问题	(97)
习题 5	(100)

第 6 章 插值与数据拟合

§ 6.1 插值与数据拟合的一般方法	(101)
6.1.1 一般插值问题	(101)
6.1.2 曲线拟合最小二乘法	(109)
§ 6.2 建模实例——估计水箱的水流量	(114)
习题 6	(122)

第 7 章 线性规划

§ 7.1 线性规划	(124)
7.1.1 线性规划问题及其数学模型	(124)
7.1.2 线性规划问题的图解法	(127)
7.1.3 线性规划问题解的理论	(129)
7.1.4 单纯形法简介	(133)
7.1.5 应用举例	(138)
§ 7.2 整数规划	(141)
7.2.1 整数规划问题	(141)
7.2.2 整数规划的解法	(143)

7.2.3	0-1 型整数规划	(149)
7.2.4	0-1 型整数规划的解法	(151)
7.2.5	应用举例	(153)
§ 7.3	目标规划	(156)
7.3.1	目标规划问题	(156)
7.3.2	目标规划的基本概念	(157)
7.3.3	目标规划的数学模型	(159)
7.3.4	目标规划的解法	(160)
7.3.5	应用举例	(163)
习题 7		(166)

第 8 章 非线性规划与动态规划

§ 8.1	非线性规划的基本理论	(170)
8.1.1	问题的引入	(170)
8.1.2	基本概念	(173)
8.1.3	二维非线性规划问题的图解法	(175)
§ 8.2	非线性规划的求解方法	(176)
8.2.1	非线性规划问题求解的基本思路	(176)
8.2.2	一维搜索方法	(177)
8.2.3	最速下降法:最优生产计划	(183)
8.2.4	拉格朗日方法:石油最优储存方法	(187)
8.2.5	太空饮水杯的设计	(189)
§ 8.3	动态规划	(191)
8.3.1	最短路问题	(192)
8.3.2	基本概念和基本方程	(196)
8.3.3	应用举例	(200)
习题 8		(205)

第9章 概率统计方法

§ 9.1 几个简单模型	(207)
9.1.1 化验问题的数学模型	(207)
9.1.2 票券收集的数学模型	(212)
9.1.3 机器间行走距离的数学模型	(215)
§ 9.2 方差分析	(217)
9.2.1 单因素方差分析	(217)
9.2.2 双因素方差分析	(221)
§ 9.3 回归分析	(225)
9.3.1 一元线性回归分析	(225)
9.3.2 多元线性回归分析	(239)
9.3.3 逐步回归分析	(245)
§ 9.4 判别分析	(249)
9.4.1 判别分析问题	(249)
9.4.2 距离判别方法	(250)
9.4.3 费希尔(Fisher)判别方法	(250)
9.4.4 贝叶斯(Bayes)判别方法	(251)
9.4.5 判别效果检验	(251)
§ 9.5 马尔可夫链预测方法	(252)
9.5.1 马尔可夫链预测模型简介	(252)
9.5.2 市场占有率预测	(254)
9.5.3 最佳服务地点选择	(257)
§ 9.6 建模实例	(258)
9.6.1 蝶的分类	(258)
9.6.2 气象观测站的优化模型	(263)
习题9	(272)

第 10 章 决策与对策方法

§ 10.1 层次分析法	(276)
10.1.1 层次分析法的基本步骤	(277)
10.1.2 简单高校排名	(281)
10.1.3 工作人员的招聘	(284)
§ 10.2 决策方法	(287)
10.2.1 决策的基本概念及分类	(287)
10.2.2 风险型决策	(289)
10.2.3 不确定型决策	(293)
§ 10.3 对策方法	(298)
10.3.1 零和对策	(299)
10.3.2 合作型对策	(305)
§ 10.4 建模实例	(312)
10.4.1 证券组合投资决策分析	(312)
10.4.2 股份公司生产经营决策分析	(317)
习题 10	(323)
附录 A 奥运会临时超市网点设计(CUMCM2004 年 A 题)	
.....	(325)
附录 B 电力市场的输电阻塞管理模型(CUMCM2004 年 B 题)	
.....	(341)
参考文献	(355)
后记	(357)

第 1 章 数学建模概述

随着科学技术的飞速发展,数学在自然科学、社会科学、工程技术与现代化管理等方面获得了越来越广泛而深入的应用,数学模型这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中,从而使人们逐渐认识到了建立数学模型的重要性.本章将对数学模型的概念、分类及作用,数学建模的基本步骤作简要介绍.

§ 1.1 数学模型的概念、分类及作用

1.1.1 数学模型的概念

模型是相对于原型而言的.所谓原型(Prototype)就是人们在社会实践中所关心和研究的现实世界中的事物(或对象).在科学技术等领域常常把所考察的原型用“系统”等术语代之,如经济系统、管理系统、机械系统、电力系统、通信系统、生态系统及生命系统等.系统的观点能让人们更好地认识和把握事物.人们所关心和研究的事物或系统总是存在着矛盾,矛盾就是问题,研究事物或系统就是去解决问题.事物或系统总是处于运动变化的过程之中,如何

把握它们在运动变化过程中的规律性,是研究事物或系统的根本问题.因此,进一步引申,把“现实对象”、“实际问题”、“研究对象”以及“系统”等术语都称为事物的原型.

所谓模型(Model)是为了一个特定的目的,根据原型特有的内在规律,将原型所具有的本质属性的某一部分信息经过简化、浓缩、提炼而构造的原型替代物.一个原型,为了不同的目的可以有多种不同的模型.例如,为了制订大型企业的生产管理计划,模型就不必反映各生产装置的动态特性,但必须反映产品的产量、销售量和库存量等变化情况.也就是说,各装置的动态特性对这种模型来说是非本质的,相反,为了实现各生产装置的最佳运行,模型就必须详细地描述各装置内部状态变化的生产过程的动态特性.这时,各装置的动态特性就变成了本质的.可见,模型所反映的内容将因其使用的目的不同而不同.实物模型、照片、图表、地图、公式及程序等统统称为“模型”.实物模型、照片、玩具等把现实物体的尺寸加以改变,看起来逼真,称形象模型;地图、电路图等在一定假设下用形象鲜明、便于处理的一系列符号代表现实物体的特征,称模拟模型;而图表、公式、程序等则用字母、数字或其他数学符号,以及由它们组成的数学式子、图形等来描述客观事物的特征及其内在联系,这就是数学模型.

数学模型(Mathematical Model)是今天科学技术工作者常常谈论的名词.其实,我们对于数学模型也并不陌生,例如在力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律($F = ma$)就是一个典型的数学模型,还有很多,如计算机自动控制的炼钢过程的数学模型,根据气压、雨量、风速等建立的预测天气的数学模型,根据人口、交通、能源、污染等建立的城市规划的数学模型等.

数学模型的具体定义是什么,尽管目前并没有统一的认识,但都认为是用数学描述实际问题.通俗地讲,所谓数学模型,是指对

于现实世界的某一特定对象,为了某个特定目的,进行一些必要的抽象、简化和假设,借助数学语言,运用数学工具建立起来的一个数学结构.数学模型不是原型的复制品,而是为一定的目的对原型所作的一种抽象模拟,它用数学式子、数学符号、程序及图表等刻画客观事物的本质属性与内在联系,是对现实世界的抽象、简化而又本质的描述.它源于现实,又高于现实,它或者能解释特定事物现象的现实性态;或者能预测特定对象的将来的性态;或者能提供处理特定对象的最优决策或控制等等,最终达到解决实际问题的目的.

1.1.2 数学模型的分类

数学模型按照不同的分类标准有着多种分类.因为分类问题不是本课程的重点,故只列举出几种常见的分类方法,以方便叙述和阅读.

按照建立模型的数学方法分,有几何模型、代数模型、图论模型、规划论模型、微分方程模型、最优控制模型、信息模型、随机模型、决策与对策模型及模拟模型等.

按照模型的特征分,有静态模型和动态模型、确定性模型和随机性模型、离散模型和连续模型、线性模型和非线性模型等.

按照被研究对象的实际领域来分,有人口模型、环境模型、生态模型、水资源模型、再生资源利用模型、交通模型、电气系统模型、通信系统模型、机电系统模型、传染病模型、污染模型、经济模型和社会模型等.

按照人们对原形的认识过程来分,数学模型可以分为描述性的数学模型和解释性的数学模型,描述性的模型是从特殊到一般,它是从分析具体客观事物及其状态开始,最终得到一个数学模型.客观事物之间量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的

数学结构之中.解释性的模型是由一般到特殊,它是从一般的公理系统出发,借助于数学客体,对公理系统给出正确解释的一种数学模型.

按照人们对事物发展过程的了解程度分,有所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.白箱模型主要指那些内部规律比较清楚的模型,如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题,这些问题大多早已经转化为比较成熟的数学问题,解决这些问题大多注重数学方法的改进、优化设计和控制等;灰箱模型主要指那些内部规律尚不十分清楚的模型,在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题,如生态学、气象学、经济学等领域中的模型;黑箱模型指一些其内部规律还很少为人们所知的模型,如生命科学、社会科学等领域的问题.

1.1.3 数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简、化难为易,便于人们采用定量的方法,分析和解决实际问题.正因为如此,数学模型在科学发展、科学预见、科学预测、科学管理、科学决策、调控市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着特殊的重要作用.

回顾科学发展史,数学模型对很多科学概念的表达、科学规律的揭示以及科学体系的形成都起到了重要作用.例如物理学中的很多重要概念,诸如瞬时速度、瞬时电流、物体受力沿曲线做功等很难用语言说清楚,而用导数、积分就清楚而准确地表达了这些概念的意义;又如历史上关于物体运动原因的探讨,开始研究时,科学家们单从质的方面寻找物体运动的原因,由亚里士多德提出的“力是产生运动的原因”一直步入到将物体运动的原因“归结为上帝的错误结论.以后,伽利略不局限于对物体运动的质的分析,他

从量的方面着手,即从揭示物体运动是按照什么样的数量关系处于运动状态的,才发现了物体运动定律.在石油开发中我国数学界进行了长期大量的工作,取得了很大的成绩,科学家通过分析大量的人工地震的数据,以推断地质的构造,为寻找石油、天然气的储藏位置提供依据;运用数理统计、Fourier 分析和时间序列分析等数学方法,成功地开发了具有先进水平的地震数据处理系统.

当代计算机科学的发展和广泛应用,使得数学模型的方法如虎添翼,加速了数学向各个学科的渗透,产生了众多的边缘学科.例如生物数学,它是在生物科学研究中,由其各分支运用数学模型和数学方法产生的生态数学、遗传数学、生理数学、仿生数学等内容构成的.数学在制造业中的应用也越来越广泛,例如波音 767 飞机的成功设计,与应用数学家 Garabedian 对跨音速流和激波进行的计算密切相关,由此设计出了防激波的飞机翼型;工程设计和制造工艺主要靠计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)两大工具,而这两者又都以数学为理论基础.再以飞机设计为例,设计师必须考虑结构强度与稳定性,这是用有限元来分析的,而机翼的振动情况则需解特征值问题;为了使飞机省油与提高速度必须找到一种最佳机翼和整个机体的形状;如何为飞行员选择最优控制参数,也是必须考虑的问题.飞机设计在很大程度上以计算为基础,人们研究描绘机翼和整个机体附近气流的方程,自动导航与自动着陆系统是根据卡尔曼滤波的方法设计的,而后者主要又是数学,数学模型已代替了许多的实验,既便宜、省时,又适用、安全.以前利用风洞设计飞机某一部件,若要改变某一部位,必须在机械车间建一模型;而今天只要设计一数学模型,通过键盘输入新的参数即可.实际上,从家用电器到天气预报,从通信到广播电视,从核电站到卫星,从新材料到生物工程,高科技的高精度、高速度、高安全、高质量、高效率等特点无一不是通过数学模型和数学方法,并