



新坐标

省精品课程配套教材

线性代数学习指导

李海燕 李晓红 郭良栋 陈 斌  编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

线性代数学习指导

李海燕 李晓红 郭良栋 陈 斌 编著

大连理工大学出版社

© 李海燕等 2006

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导 / 李海燕等编著. —大连: 大连理工大学出版社, 2006. 8

ISBN 7-5611-3346-4

I. 线… II. 李… III. 线性代数—高等学校—教学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 102782 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市软件园路 80 号 邮政编码: 116023

发行: 0411-84708842 邮购: 0411-84703636 传真: 0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连天正华延彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm×203mm

印张: 6.25

字数: 199 千字

2006 年 8 月第 1 版

2006 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘新彦 于建辉

责任校对: 碧海

封面设计: 张金

定 价: 10.00 元

前 言

《线性代数》是一门重要的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。由于该课程概念、符号较多,有些很抽象,如向量,矩阵,行列式等,初学者往往不易掌握。在考研复习时,面对灵活、多样的线性代数题目,考生常常感到无从下手。为了帮助大家更好地学习线性代数,提高分析问题和解决问题的能力,我们编写了本书。

本书为《线性代数》(辽宁科技大学高等数学部组编)的配套教材,共 7 章:行列式,矩阵, n 维向量,线性方程组,矩阵的特征值与特征向量,二次型,线性空间与线性变换。

本书的编写、试用、出版,得到了辽宁科技大学、教务处和理学院领导的大力支持,高等数学部的老师们给予了积极的协作,在此一并表示感谢!

由于时间仓促,加之编者水平有限,疏漏不妥之处在所难免,欢迎广大读者批评指正。

编著者

2006 年 8 月

目 录

第1章 行列式 / 1

习题 1-1 / 1

习题 1-3 / 5

总习题 1 / 9

习题 1-2 / 2

习题 1-4 / 7

第2章 矩 阵 / 18

习题 2-1 / 18

习题 2-3 / 24

习题 2-5 / 30

总习题 2 / 34

习题 2-2 / 21

习题 2-4 / 27

习题 2-6 / 32

第3章 n 维向量 / 44

习题 3-1 / 44

习题 3-3 / 49

总习题 3 / 53

习题 3-2 / 45

习题 3-4 / 51

第4章 线性方程组 / 59

习题 4-1 / 59

习题 4-3 / 68

习题 4-2 / 64

总习题 4 / 74

第5章 方阵的特征值与特征向量 / 93

习题 5-1 / 93

习题 5-3 / 105

习题 5-2 / 99

总习题 5 / 114

第6章 二次型 / 130

习题 6-1 / 130

习题 6-3 / 136

总习题 6 / 151

习题 6-2 / 132

习题 6-4 / 148

第7章 线性空间与线性变换 / 164

习题 7-1 / 164

习题 7-3 / 173

习题 7-5 / 184

习题 7-2 / 170

习题 7-4 / 180

总习题 7 / 185

第 1 章 行列式

► 习题 1-1 ◀

1. 确定下列排列的逆序数:

$$(1) \tau(134782695) = 10$$

$$(2) \tau(987654321) = 36$$

2. 在 5 阶行列式 $|a_{ij}|_{5 \times 5}$ 中下列各项的符号是什么?

$$(1) a_{31} a_{52} a_{23} a_{44} a_{15}$$

因为 $\tau(35241) = 7$, $(-1)^7 = -1$, 所以带负号。

$$(2) a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51}$$

因为 $\tau(35241) = 7$, $(-1)^7 = -1$, 所以带负号。

$$(3) a_{21} a_{45} a_{14} a_{53} a_{32}$$

因为 $\tau(24153) + \tau(15432) = 10$, 所以带正号。

3. 用定义计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1\ 2)} (-1)(-3) = 3$$

$$\begin{aligned} (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= (-1)^{\tau(1\ 2\ 3)} 2 \times 1 \times (-1) + (-1)^{\tau(2\ 1\ 3)} (-1) \times 4 \times (-1) \\ &\quad + (-1)^{\tau(1\ 3\ 2)} 2 \times 2 \times (-1) \\ &= -2 - 4 + 4 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{r(54321)} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \\
 &= (-1)^{\frac{5 \times 4}{2}} 5! = 5!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} &= (-1)^{(n-1)(n-2)\cdots 321n)} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \\
 &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

► 习题 1-2 ◀

1. 用行列式性质计算下列行列式:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad (2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}_n$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1) 原行列式} & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -14 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -14 & -33 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_4 + 14r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -61 \end{vmatrix} = 61
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2) 原行列式} & \xrightarrow{\text{各列加到第1列}} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{各行减第1行}} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 - 2r_2} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160
 \end{aligned}$$

$$(3) \text{原行列式} \xrightarrow[\text{提取第1列公因式}]{\text{各列加到第1列}} (n+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各行减第1行}} (n+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (n+a)a^{n-1}$$

2. 用行列式性质证明:

$$(1) \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = 4abcdef$$

$$(3) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{证明 (1) 左} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & d-b & b-d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \text{左} \xrightarrow{\text{提取各行各列公因式}} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} -abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{左} & \xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} b+c & a-b & a+b \\ b_1+c_1 & a_1-b_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & a_2-b_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{c_3+c_2} \begin{vmatrix} b+c & a-b & 2a \\ b_1+c_1 & a_1-b_1 & 2a_1 \\ b_2+c_2 & a_2-b_2 & 2a_2 \end{vmatrix} \\
 & = 2 \begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ b_1+c_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & a_2-b_2 & a_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_3} 2 \begin{vmatrix} b+c & -b & a \\ b_1+c_1 & -b_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & -b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{c_1+c_2} 2 \begin{vmatrix} c & -b & a \\ c_1 & -b_1 & a_1 \\ c_2 & -b_2 & a_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右}
 \end{aligned}$$

► 习题 1-3 ◀

1. 写出并计算行列式 D 中 a_{12} 、 a_{31} 、 a_{33} 的余子式及代数余子式。

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{解 } M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -36, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 36$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -9$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 6$$

2. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2a & 4a^2 & 8a^3 \\ 1 & 3a & 9a^2 & 27a^3 \\ 1 & -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}_n$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2a & 4a^2 & 8a^3 \\ 1 & 3a & 9a^2 & 27a^3 \\ 1 & -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i - r_1]{i=2,3,4} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & a & 3a^2 & 7a^3 \\ 0 & 2a & 8a^2 & 26a^3 \\ 0 & -2a & 0 & -2a^3 \end{vmatrix}$

按第1列展开

$$\begin{vmatrix} a & 3a^2 & 7a^3 \\ 2a & 8a^2 & 26a^3 \\ -2a & 0 & -2a^3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} a & 3a^2 & 7a^3 \\ 0 & 2a^2 & 12a^3 \\ 0 & 6a^2 & 12a^3 \end{vmatrix}$$

按第1列展开

$$a \begin{vmatrix} 2a^2 & 12a^3 \\ 6a^2 & 12a^3 \end{vmatrix} = -48a^6$$

(2) 原行列式 $\xrightarrow{\text{按第 } n \text{ 行展开}} y(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} + x(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n+1} \cdot y \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot y^{n-1} + x \cdot x^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} [x^n + (-1)^{n+1} y^n]$$

3. 用拉普拉斯展开定理计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+4+1+2+3+4} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 696$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} (-1)^{2 \times 3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14 \end{aligned}$$

► 习题 1-4 ◀

1. 用克莱姆法则解线性方程组。

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解 } (1) x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = -3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = -1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -13, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{5}{4}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{61}{4}, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -\frac{33}{4}$$

2. k 为何值时, 下列方程组只有零解:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-4)$$

$D \neq 0$, 即 $k \neq -1$ 且 $k \neq 4$ 时方程组只有零解。

3. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个互不相同的实数, $b_1, b_2, \dots, b_n$ 是任意给定的 n 个实数。试用克莱姆法则证明: 存在唯一的次数小于 n 的实系数多项式

$$f(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x^2 + c_{n-1} x + c_n$$

满足

$$f(a_i) = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$f(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x^2 + c_{n-1} x + c_n$$

由 $f(a_i) = b_i (i=1, 2, \dots, n)$, 得

$$\begin{cases} c_1 a_1^{n-1} + c_2 a_1^{n-2} + \dots + c_{n-2} a_1^2 + c_{n-1} a_1 + c_n = b_1 \\ c_1 a_2^{n-1} + c_2 a_2^{n-2} + \dots + c_{n-2} a_2^2 + c_{n-1} a_2 + c_n = b_2 \\ \vdots \\ c_1 a_n^{n-1} + c_2 a_n^{n-2} + \dots + c_{n-2} a_n^2 + c_{n-1} a_n + c_n = b_n \end{cases}$$

这是以 $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$ 为未知数的线性方程组。

系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

是范德蒙德行列式。因为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互不相同, 所以 $D \neq 0$ 。由克莱姆法则知, 方程组有唯一解。即存在唯一的 $n-1$ 次实系数多项式 $f(x)$, 满足

$$f(a_i) = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

总习题 1

1. 用行列式定义确定 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数及常数项。

$$f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x - a_{44} \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义知, x^4 项必包含在 $(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})(x - a_{44})$ 中, 所以 x^4 系数为 1。

x^3 的系数为 $-(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})$ 。

$$\text{常数项为 } f(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}_n$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}_n$$

$$(4) \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}_n$$

解 (1) 原行列式 $\frac{r_2 + r_1, r_3 - 2r_1}{r_4 - r_1, r_5 - 2r_1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -5 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \text{按第1列展开} & 0 & -5 & 3 & 2 \\ & 2 & -4 & -5 & 8 \\ & -3 & 5 & -4 & 4 \\ & -3 & 5 & -4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} r_4 - r_3 & 0 & -5 & 3 & 2 \\ & 2 & -4 & -5 & 8 \\ & -3 & 5 & -4 & 4 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \text{按第4行展开} & 0 & -5 & 3 \\ & 2 & -4 & -5 \\ & -3 & 5 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} r_3 + \frac{3}{2}r_2 & 0 & -5 & 3 \\ & 2 & -4 & -5 \\ & 0 & -1 & -\frac{23}{2} \end{array} = -121$$

$$(2) \text{原行列式} \begin{array}{c|cccccc} \text{各行减第1行} & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{按第2行展开} & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{array} (-1)^{1+2}$$

$$= -2(n-2)!$$

(3) 方法 1

$$\text{原行列式} \begin{array}{c|cccccc} \text{各列加到第1列} & \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{按第 1 列展开 } \frac{(n+1)n}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} (n-1)! \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{2}
 \end{aligned}$$

方法 2

原行列式 从最后 1 列起各列加到前 1 列

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2}-1 & \frac{n(n+1)}{2}-2 & \cdots & 2n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} (n-1)! = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{2}
 \end{aligned}$$

(4) 方法 1

$$\begin{aligned}
 & \text{原行列式 } \text{各列加到第 1 列} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i - m \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$