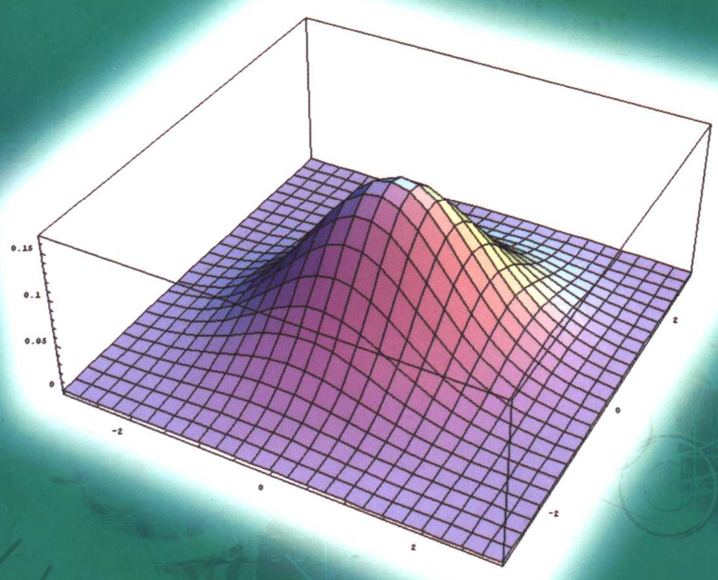
高等学校理工科规划教材

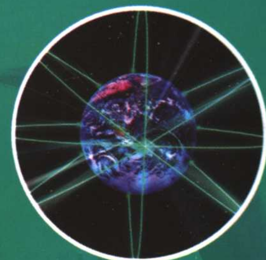
概率论与数理统计

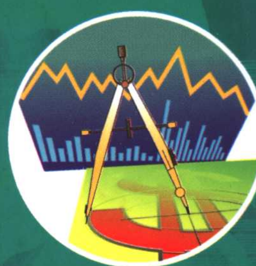
PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

大连理工大学应用数学系/组编

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\quad(x,y\in\mathbf{R})$$







大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

概率论与数理统计

大连理工大学应用数学系　组编

冯敬海　沈玉波
宋立新　杨　剑　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/大连理工大学应用数学系组编 .—大连:大连理工大学出版社,2006.9
ISBN 7-5611-3350-2

Ⅰ.概… Ⅱ.大… Ⅲ.①概率论 ②数理统计 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 104163 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:11.5 字数:257 千字
2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:宋 蕾

定 价:18.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象内在规律的一门科学。最初，它是为了研究赌博现象的规律性而兴起的，因此，也有人将其称为“赌博数学”。（读者千万不要希望本书对你的赌技有帮助，相反，本书会帮助你认清赌博的本质。）

一方面，概率论与数理统计是一门应用性极强的数学学科。首先应该提到的是在经济、金融、保险领域中的应用，数量经济学、保险精算、金融数学、金融工程等无一不是将概率论与数理统计作为最主要的分析工具。其次概率论与数理统计在其他学科的应用也相当多，例如，材料工程中的抗断、抗拉、抗压试验，化学试验，人口调查等方案的设计与分析，仪器仪表的可靠性分析等。毫不夸张地说，概率论与数理统计已成为各个学科的必备工具。

另一方面，概率论与数理统计又是一门趣味性极强的数学学科。下面仅举三例。

(1)每次掷两颗均匀骰子，连掷 25 次。如果在这 25 次中，至少有一次出现双六就算赢。试问，赢的可能性有多大？（此问题是概率论研究中最初的几个问题之一）

(2)在马路边观察过往的汽车共 20 辆，并记录车牌号的后两位数。那么，至少有两辆汽车车牌号的后两位数相同的概率有多大？

(3)中国乒乓球水平世界第一。国际乒联将以往的 5 局 3 胜制改为 7 局 4 胜制，每局比赛由 21 分

制改为11分制。假设一名中国乒乓球选手每局胜的概率为0.7，且每两局之间的结果互不影响，那么，比赛规则的改变对中国队有无影响？如何影响的？影响有多大？

这三个问题用概率论的基本知识就能解决，有兴趣的读者可以自己试着分析一下。本课程更多的趣味问题将出现在后续章节中，此处不多做介绍，希望大家去慢慢品味。

本教材的主要任务是帮助大家学习概率论与数理统计的基本概念，熟悉概率论与数理统计的思维方式，学会分析与解决实际问题的基本方法。

本教材是在多年教学经验的基础上编写而成的，与其他教材相比，主要有以下特点：

(1)主要概念的介绍大多采用直观引入法，注重概念的工程背景与实际应用背景。比如，随机事件的独立性、两个随机变量的独立性、置信区间与假设检验等。

(2)例题的选取尽量照顾到各应用学科，使得例题不再是纯粹的数学问题。习题按难易程度分两个层次，并且工程应用与基本方法的运用并重。

(3)避免纯粹的数学推导，把概率论与数理统计写得有用、有趣、有知识。

(4)补充了随机事件相互独立的四条性质。这四条性质都很简单，它们对于大家理解相互独立的概念将有很大帮助；给出了关于全概率公式应用题型的特征以及统一的解法，使得学起来非常容易；在讲正态总体参数的置信区间与假设检验时，从日常生活中找例子，并通过分析例题找出规律，这样学生既非常感兴趣，又学到了知识，同时也不用记忆一大堆死板的公式。

讲授本教材的全部内容需48学时，如果只讲授概率论部分，即前5章，则需32学时。

本书可供高等院校各专业(数学专业除外)使用，也可供工程技术人员参考。

由于作者水平所限，难免有不足之处，恳请读者给与批评指正。

编著者

2006年8月

目 录

第1章 概率论的基本概念

ELEMENTS OF PROBABILITY

概率论之所以能够成为一门独立的数学学科，是因为它所研究的自然现象与其他的数学学科有本质区别。读者在此之前所学的所有数学学科或物理学科都是研究确定性现象的，而概率论则是研究随机现象的。

确定性现象的结果是唯一的。例如以一定速度一定角度抛出一物体，在该物体落地前的任何一个时刻，其高度都是唯一的，可以精确计算的，落点也是唯一的。如果该物体是一颗骰子，它的落点是唯一的，这些是确定性现象。但是，落地时骰子的哪个点数朝上就不是唯一的了。大家都喜欢看各种各样的比赛，原因之一就在于比赛结果的不确定性。赌博的本质就在于它的随机性，结果是不确定的。赌徒们总希望出现对自己有利的结果，并且越是输越是认为自己下一局能赢，然而，每一局的结果都是随机的，并不以人的意志为转移。随机现象在日常生活中是非常常见的，除了上述例子，彩票、股票价格、寿命、每天的睡眠时间等等都带有随机性。

概率论是研究随机现象的，确切地说，是研究随机现象中的必然规律。在本章中我们需要回答以下几个问题：

问题 1　任意50个人，能否有两人生日相同（在同一天）?

问题 2　在桥牌比赛中4张 A 落在一个人手中的概率是多少?

问题 3　在前言中提到的乒乓球比赛规则的改变对中国队的影响。

问题 4　在抽签的时候，先抽与后抽抽到某一个签的概率是否一样?是否相互影响?

问题 5　各个地方性的报纸上都有对以前彩票中奖号码出现次数的统计分析，其分析结果对彩民购买彩票有无帮助?

问题 6　疾病的传染与否对控制疾病的影响。

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验

在给出随机现象（或随机试验）的定义之前，我们先看几个例子。

E_1：掷一枚硬币，观察出现正面还是反面；

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：掷两颗骰子，观察出现的点数；

E_4：掷两颗骰子，观察出现的点数之和；

E_5：任取一个灯泡，观察其寿命（单位：小时）；

E_6：观察某种放射性元素单位在时间内发射的粒子个数。

上述这些试验（或现象）都具有两个明显的特征：每个试验的所有可能结果都是试验之前已知的；但是在试验之前并不能预知哪个结果会出现。例如骰子的所有点数是 1，2，3，4，5，6，但掷之前并不知道哪个点数会出现；放射性元素在单位时间内发射的粒子个数可能为 0，1，2，…，但不可能预知到底发射多少个粒子。

定义 1-1　一个试验如果具有以下特征，我们就称该试验为一个随机试验（或随机现象）：

(1) 该试验可在相同条件下重复地进行；

(2) 所有可能出现的结果是已知的；

(3) 试验之前不可预知哪个结果会出现。

1.1.2 样本空间

尽管试验之前不可预知哪个结果会出现，但是所有可能出现的结果是已知的。为了便于数学处理，我们给出以下定义。

定义 1-2 随机试验的所有可能出现的结果组成的集合称为该试验对应的样本空间。样本空间的元素称为样本点，即样本点就是可能结果。

【例 1-1】 上述随机试验 E_1 到 E_6 对应的样本空间分别为

$\Omega_1 = \{$正面，反面$\}$；

$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_3 = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,\cdots,6\}$；

$\Omega_4 = \{2,3,\cdots,12\}$；

$\Omega_5 = [0, +\infty)$；

$\Omega_6 = \{0,1,2,\cdots\}$。

由随机试验 E_3 与 E_4 对应的样本空间 Ω_3 与 Ω_4 的区别可以看出，虽然是相同的试验，但由于观察的目的不一样，对应的样本空间则不一样。

1.1.3 随机事件

从数学上来看，样本空间就是一个集合，有了集合，就会有子集，以及子集间的关系与运算，所以自然地就有下面的内容：

定义 1-3 一般地，我们将随机试验对应的样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称事件。事件一般用 $A,B,C,\cdots$ 表示。

该定义与现实是相符的。拿掷骰子来说，“压小”可以表示为$\{1,2,3\}$，“压大”是$\{4,5,6\}$；“压单”是$\{1,3,5\}$，“压双”是$\{2,4,6\}$。这些随机事件都是样本空间$\{1,2,3,4,5,6\}$的子集。再如，某种放射性元素在单位时间内没有发射粒子，这是一个随机事件，可以表示为$\{0\}$，它是 $\Omega_6 = \{0,1,2,\cdots\}$ 的子集。

随机事件是可能发生也可能不发生的事件，如果在试验中，属于某个事件 A 的样本点（即可能结果）出现了，我们就称该事件发生了。例如，骰子出现的点数为2，那么“压小”与“压双”这两个随机事件就发生了，而“压大”与“压单”没有发生。容易看出，若 $A \subset B$，那么 A 发生必导致 B 发生。

样本空间 Ω 作为一个集合，它是自己的子集，也是一个随机事件，由于它包含了所有的样本点，故每次试验它必然发生。我们把样本空间 Ω 称为**必然事件**。另外，空集$\varnothing$作为样本空间 Ω 的子集，也是一个事件，只不过它不包含任何样本点，它在每次试验中都不会发生，也不可能发生，于是我们把空集$\varnothing$称为**不可能事件**。例如买彩票，如果你把所有的组合全买下，那么你必然中奖；反之，如果你一注也不买，那你不可能中奖。

1.1.4 事件间的关系与运算

1. 事件间的关系

由定义 1-3 可知，事件就是样本空间的子集，事件间的关系与运算和集合间的关系与运算是一致的。

(1) 和事件

设 A 与 B 为两个随机事件，事件 $A\cup B$ 称为 A 与 B 的和事件(图 1-1)。$A\cup B$ 有时也记为 $A+B$。

$A\cup B$ 发生的充要条件为 A 与 B 至少有一个发生。

(2) 积事件

设 A 与 B 为两个随机事件，事件 $A\cap B$ 称为 A 与 B 的积事件(图 1-2)。$A\cap B$ 经常写成 AB。

$A\cap B$ 发生的充要条件为 A 与 B 都发生。

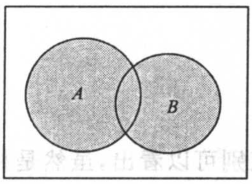


图 1-1

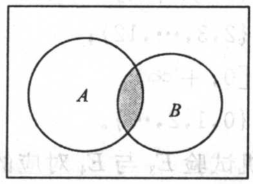


图 1-2

(3) 差事件

设 A 与 B 为两个随机事件，事件 $A-B$ 称为 A 与 B 的差事件。

$A-B$ 发生的充要条件为 A 发生而 B 不发生。

(4) 补事件

设 A 为随机事件，事件 $\overline{A}=\Omega-A$ 称为事件 A 的补事件。一般地我们称 A 与 $\overline{A}$ 互补，或互逆。

(5) 互不相容

若 $AB=\varnothing$，我们称 A 与 B 互不相容，或互斥。

从 A 与 B 互不相容的定义中我们可以看出，A 与 B 不可能同时发生，也就是说如果 A 发生了，B 就不会发生；反之，如果 B 发生了，A 就不会发生。

注意，如果 A 与 B 互不相容，并不是说 A 与 B 没有关系，而是有很大关系。因为其中一个事件的发生会限制另一个事件的发生。

2. 事件间的运算

事件的运算遵循以下原则：

分配律 $B\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_iB)$；$B\cup(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(A_i\cup B)$

德·摩根(De Morgan)法则 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

【例 1-2】 设有三个人各购买了一注福利彩票，以 A 表示“第一个人中奖”，B 表示“第二个人中奖”，C 表示“第三个人中奖”。试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) 至少有一个人中奖；

(2) 恰有一个人中奖；

(3) 至多有一个人中奖。

解 (1)$A \cup B \cup C$；

(2) 恰有一个人中奖是指其中有一个人中奖而另外两个人没中奖，即

$$A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$$

(3) 至多有一个人中奖是指没有人中奖或恰有一个人中奖，即

$$A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

1.2 概率的定义及其基本性质

大家知道，一个随机事件在试验中可能发生，也可能不发生，但我们常常需要知道一个事件在试验中发生的可能性到底有多大。因为事件发生的可能性大小在现实中往往起到非常关键的作用。例如，在寿险业务中，保险公司对身患重病的人一般是不会给予保险的，因为这些人死亡的可能性要远大于健康人群，也就是说，保险公司赔付的可能性就会很大；再如，一家生产出口产品的公司，其经营状况受人民币汇率的影响比较大，如果人民币升值的可能性很大，那么该公司的利润就会受到影响，严重时会造成公司破产。

事件发生的可能性大小使用概率来描述。为了说明概率的意义，我们先从一个非常简单的例子说起。

在掷骰子试验中，样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，取事件 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{4,5\}$，$C = \{1,5\}$，分别用 $Q(A)$，$Q(B)$，$Q(C)$ 表示事件 A、B、C 发生的可能性，显然有

$$Q(A) = \frac{1}{2}, Q(B) = \frac{1}{3}, Q(C) = \frac{1}{3}$$

Ω 为必然事件，所以必有 $Q(\Omega) = 1$。

下面我们看一下 $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 发生的可能性。

由于

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, A \cup C = \{1,2,3,5\}$$

所以

$$Q(A \cup B) = \frac{5}{6}, Q(A \cup C) = \frac{2}{3}$$

而

$$Q(A \cup B) = \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = Q(A) + Q(B)$$

$$Q(A \cup C) = \frac{2}{3} \neq \frac{5}{6} = Q(A) + Q(C)$$

为什么会这样呢？仔细观察后，我们发现 A 与 B 是互不相容的，即 $AB = \varnothing$，而 $AC = \{1\} \neq \varnothing$。这并不是偶然现象，下面是概率的定义。

定义 1-4 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间。如果对于任意事件 $A \subset \Omega$，都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足以下条件：

(1) 非负性　$P(A) \geqslant 0$；

(2) 归一性　$P(\Omega) = 1$；

(3) 可加性　如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

从定义中可以看出，所谓的概率 P 是一个映射，它将 Ω 的任何一个子集(事件)A 映射成一个实数 $P(A)$，但要遵循一定的规则。另外，读者应该知道，只有事件才能有概率，其他任何事物都没有概率。

上述定义是 Kolmogorov 于 20 世纪 30 年代给出的，在此之前许多人将概率论视为伪科学而拒不接受，在 Kolmogorov 给出概率的定义之后，概率论才慢慢发展成为一门科学，并日益应用、渗透到各个领域，已成为目前每个工程技术人员与理论研究工作者必不可少的工具。

一般地，一个事件 A 的概率 $P(A)$ 不是定义出来的，也不是凭空捏造出来的，它是一个现实存在。例如，掷一枚硬币，出现正面的概率必为$\frac{1}{2}$，而不是其他的数。为了证明这一点，历史上曾有许多人做了大量试验，结果见表 1-1。

表 1-1

试验者	投掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

从表 1-1 可以看出，随着投掷次数的不断增加，出现正面的频率越来越接近$\frac{1}{2}$，这说明出现正面的概率为$\frac{1}{2}$。其实，在概率论发展的初期，事件的概率就定义为该事件在大量的重复试验中发生的频率的极限。

在定义 1-4 的三个条件中，可加性尤为重要，使用次数也最多。例如，因为 Ω 与$\varnothing$是互不相容的，且 $\Omega = \Omega \cup \varnothing$，所以 $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$，又 $P(\Omega) = 1$，得 $P(\varnothing) = 0$，即不可能事件发生的概率为 0。

下面是概率的几个基本性质：

性质 1　$P(A) + P(\overline{A}) = 1$；

证明　因为 A 与 $\overline{A}$ 互不相容且 $\Omega = A \cup \overline{A}$，所以

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

性质 2(减法公式)　$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$；

证明　因为 $A = AB \cup A\overline{B}$，且 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容，所以

$$P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$$

即
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

性质 3(加法公式)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

证明　因为 $A\cup B=B\cup A\overline{B}$,且 B 与 $A\overline{B}$ 互不相容,所以

$$P(A\cup B)=P(B\cup A\overline{B})=P(B)+P(A\overline{B})=P(B)+P(A)-P(AB)$$

其中加法公式可以推广到多个事件的情形,例如

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

证明留给读者。

【例 1-3】　设事件 A 与 B 的概率分别为$\frac{1}{2}$与$\frac{1}{3}$,试求下列三种情况下 $P(A-B)$ 的值:

(1)$AB=\varnothing$, (2)$B\subset A$, (3)$P(AB)=\frac{1}{4}$。

解　(1) 因为

$$P(AB)=0$$

所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)=\frac{1}{2}$$

(2) 因为

$$B\subset A$$

所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)=\frac{1}{6}$$

(3)$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$。

【例 1-4】　已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(A-B)=0.3$,求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ 与 $P(A\cup\overline{B})$。

解　由

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$$

及

$$P(A)=0.5$$

知

$$P(AB)=0.2$$

所以

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.8$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(\overline{\overline{A}B})=1-P(\overline{A}B)=1-P(B)+P(AB)=1-0.4+0.2=0.8$$

【例 1-5】　设 A,B,C 为三个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8},P(AC)=0$。求 A,B,C 都不发生的概率。

解　A、B、C 都不发生可以表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

又因为

$$P(AC) = 0$$

所以

$$P(ABC) = 0$$

于是

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - 0 - \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = \frac{1}{2}$$

以上几个例题都是在给定某些事件的概率的情况下，求与这些事件有关的另一些事件的概率。这并不是"真正"的求概率，而是运用概率的性质解题。在下一节我们就介绍如何去"真正的"求概率。

1.3　等可能概型(古典概型与几何概型)

本节主要介绍概率论中研究最早的一类题型，它是概率论最简单的应用之一。

1.3.1　古典概型

定义 1-5　如果一个随机试验具有以下两个特点：

(1) 样本空间中的样本点总数是有限的；

(2) 每个样本点出现的可能性相同。

则称该试验为古典概型。

古典概型是一类非常常见的随机现象，例如掷骰子、抛硬币、抽扑克牌、抽签等都是古典概型。

假设一个古典概型的样本空间中共有 n 个样本点，且 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，由于每个样本点出现的可能性都一样，那么必有

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

如果事件 $A \subset \Omega$，A 中有 k 个样本点，$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\}$，则

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\}) = \bigcup_{j=1}^{k} P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n}$$

即在古典概型中，事件 A 的概率等于 A 中样本点数除以样本点总数。

古典概型是人类研究最早的一类概率题型，此类题型与赌博的关系比较密切，也是概率论中最吸引人的一类题型。利用古典概型的计算公式求概率是很简单的一件事，只需将样本点总数与 A 中样本点数求出即可。然而事情并不那么简单，可以说古典概型是最难的

一类题型，难点在于人们不知道如何求出样本点总数与 A 中样本点数。下面我们通过一个例子来说明用古典概型求概率的方法。

【例 1-6】 设有6个白球和 4 个红球混合后装入袋中，从这 10 个球中任取 5 个。

(1) 在有放回的情形下，求这 5 个球中恰有 3 个白球的概率；

(2) 在不放回的情形下，求这 5 个球中恰有 3 个白球的概率；

(3) 在不放回取球下，求第 3 个球为白球的概率。

解　(1) 设事件 $A=\{$这5个球中恰有3个白球$\}$，先求样本点总数。由于是有放回的，所以每次取球都是从 10 个球中任取一个，连续取 5 次，总的取法即样本点总数为

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$$

下面求事件 A 中的样本点数。要求这 5 个球中恰有 3 个为白球，但 5 个球中哪 3 个是白球是不能确定的，前 3 个是白球可以，后 3 个是白球也可以，中间 3 个是白球也可以，等等，共有 $C_5^3=10$ 种不同的情况。如果前 3 个是白球，后 2 个必是红球，这种情况下取法有 $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 6^3 \cdot 4^2$ 种，同理可以求出每种情况下的取法都是 $6^3 \cdot 4^2$ 种，所以 A 中的样本点数为 $C_5^3 \cdot 6^3 \cdot 4^2$，所以

$$P(A)=\frac{C_5^3 \cdot 6^3 \cdot 4^2}{10^5}=C_5^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2$$

(2) 设事件 $B=\{$这 5 个球中恰有 3 个白球$\}$，还是先求样本点总数。此时是不放回取球，从 10 个球中取出 5 个即可，故样本点总数为 C_{10}^5。

下面求 B 中的样本点数。要求这 5 个球中有 3 个白球 2 个红球，显然这 3 个白球是从那 6 个白球中取出的，2 个红球是从那 4 个红球中取出的，所以 B 中样本点数为 $C_6^3 \cdot C_4^2$，所以此时

$$P(B)=\frac{C_6^3 \cdot C_4^2}{C_{10}^5}$$

(3) 设事件 $C=\{$第 3 个球为白球$\}$，还是先求样本点总数。此时要考虑次序（为何要考虑次序，见下文总结）。从 10 个球中取出 5 个，一个一个地取，不放回，总的取法，即样本点总数为

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

再求 C 中样本点数。事件 C 要求第 3 个为白球，其他的是什么颜色无关紧要。我们可以先取出一个白球“预留”给第 3 次就可以了。先取一个白球的取法为 6 种，其他 4 个球的取法为 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ 种，所以 C 中样本点数为 $6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{6}{10}C_{10}^5 \cdot 5!$，故得

$$P(C)=\frac{\frac{6}{10}C_{10}^5 \cdot 5!}{C_{10}^5 \cdot 5!}=\frac{6}{10}$$

通过此例可以看出，我们在计算例题中的三个样本点总数时，采用的方法都不一样。为什么会这样？

设有 N 个不同的球，要从中任取 n 个球（$n \leqslant N$）：

第一种取法　“可重复”或者“有放回”。其含义是每次取一个球，观察后放回，再取下一个。在这种方法下，实际上不是取了 n 个球，而是取了 n 次，不同的两次取球可能取到同

一个球。这种情况下样本点总数为 N^n。

第二种取法　"不放回"且与次序无关。这种取法的特点是不需要考虑次序，也就是只要一次性地拿出 n 个球即可，此时样本点总数为 C_N^n。

第三种取法　"不放回"但与次序有关。其含义是每次取一个球，但不放回，连续取 n 个。该种取法与第二种取法的区别在于需要考虑次序，这样取球自然有一个排序，即次序。这种情况下样本点总数为

$$N \cdot (N-1) \cdot \cdots \cdot (N-n+1) = P_N^n = C_N^n \cdot n!$$

一般来说，对于古典概型，掌握以上三类就够了。例 1-6 中求 3 个事件 A,B,C 对应的样本点总数时使用的模型，与这里的三种取法一一对应。

【例 1-7】　将 n 个人随机分到 N 个房间中($n \leqslant N$)，每个人分到哪个房间是等可能的，且设每个房间可容纳的人数没有限制，求

(1) 某指定的一个房间(例如第一个房间)恰有 m 个人的概率($m \leqslant n$)；

(2) 每两个人都不在同一个房间的概率。

解　(1) 设 $A=\{$某指定的一个房间恰有 m 个人$\}$

由于每一个人分房间的时候都有 N 种分法，n 个人分完才算结束，所以样本点总数为 N^n。

对 A 中样本点数，房间是固定的，但哪 m 个人分到此房间是不确定的。也就是说哪 m 个人分到此房间都可以，那么我们就先从 n 个人中选出 m 个人来，让这 m 个人在此房间，剩下的 $n-m$ 个人分到其他的 $N-1$ 个房间中，所以事件 A 中的样本点数为 $C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}$。

故得

$$P(A) = \frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

(2) 设 $B=\{$每两个人都不在同一个房间$\}$，样本点总数与(1)一致，为 N^n。B 中样本点数容易求出，为

$$N \cdot (N-1) \cdot \cdots \cdot (N-n+1) = C_N^n \cdot n!$$

故得

$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

例 1-7 的一个直接应用是下面的例 1-8。

【例 1-8】　求 m 个人中至少有两人生日相同的概率($m \leqslant 365$)。

解　设事件 $A=\{m$ 个人中至少有两人生日相同$\}$，那么事件 A 的补事件 $\overline{A}=\{m$ 个人中任何两个人生日都不相同$\}$，它相当于例 1-7 中的事件 B，所以

$$P(A) = 1 - \frac{C_{365}^m \cdot m!}{365^m}$$

经过计算可得结果：

当 $m=23$ 时

$$P(A) = 0.5$$