

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇



第1~15届

希望杯

全国数学邀请赛 试题详解

“希望杯”全国数学邀请赛组委会 编



书中的一个个问题
就是一级级台阶
只要自信、努力、勤奋、坚持……
一步步攀登
就会走出一条自己的成功之路

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年

播种希望

气象出版社





★ 圆形，表示广阔的天空。

★ 英文 hope（希望）形如一只展翅飞翔的鸟。喻意：“希望杯”全国数学邀请赛为广大的青少年在科学思维能力上的健康发展开辟了一个广阔的空间，任他们自由翱翔。

★ “since 1990” 字样表示：“希望杯”全国数学邀请赛是从 1990 年开始创办的。



DI YI ZHI SHIWU JIE XIWANGBEI
QUANGUO SHUXUE YAOQINGSAI SHITI XIANGJIE

ISBN 7-5029-3965-2



9 787502 939656 >

ISBN 7-5029-3965-2/G · 1109

定价：17.00元

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

第1~15届“希望杯”
全国数学邀请赛试题详解

高一

“希望杯”全国数学邀请赛组委会 编

北京出版社

图书在版编目(CIP)数据

第1~15届“希望杯”全国数学邀请赛试题详解(高一).

周国镇主编. —北京:气象出版社, 2005. 7

(“希望杯”数学竞赛系列丛书)

ISBN 7-5029-3965-2

I. 第… II. 周… III. 数学课-高中-解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053674 号

气象出版社 出版

(北京海淀区中关村南大街 46 号 邮编:100081)

总编室:010-68407112 发行部:010-62175925

网址: <http://cmp.cma.gov.cn> E-mail: qxcs@263.net

责任编辑: 黄丽荣 终审: 汪勤模

封面设计: 贾衍凤 责任技编: 刘祥玉 责任校对: 庚 申

*

北京金马印刷厂印刷

气象出版社 发行

*

开本: 850×1168 1/32 印张: 11.625 字数: 302 千字

2005 年 7 月第一版 2006 年 1 月第三次印刷

印数: 10001~15000 定价: 17.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等, 请与本社
发行部联系调换

“希望杯”全国数学邀请赛 组织委员会

顾 问

- 龚 昇** 著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长
- 梅向明** 著名数学家
北京师范大学原院长
- 徐利治** 著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

- 陈德泉** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长、现副
理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 计 雷** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长,现副
理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 徐伟宣** 应用数学家
中科院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任

- 曾任六届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 周国镇** 数学教育专家
《数理天地》杂志社社长、总编
历届“希望杯”组委会秘书长、命题委员会主任
- 刘学红** 中国青年报名记者、中青在线网总裁
- 周春荔** 数学教育专家
首都师范大学教授
- 吕伟泉** 广东省教研室副主任
- 汪江松** 数学教育专家
《中学数学》主编
湖北大学教授
- 肖果能** 数学教育专家
中南大学教授
- 顾宏达** 数学教育专家
上海黄浦教育学院原院长
- 黄建弘** 数学教育专家
上海师资培训中心实验基地主任
- 欧益生** 浙江嘉兴市教研室主任
- 曾大洋** 福建泉州市数学会秘书长
- 龙开奋** 数学教育专家 广西师范大学副教授

委 员

- | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 北 京 | 牛玉石 | | | | | | |
| 天 津 | 王成维 | | | | | | |
| 澳 门 | 吕晓白 | | | | | | |
| 河 北 | 石瑞贞 | 胡天顺 | 张丽晨 | 关登超 | 耿昌敏 | 石扶兴 | |
| | 李本洲 | | | | | | |
| 山 西 | 张起林 | 白 枫 | 温树成 | 宋 校 | 马建党 | 王芝梅 | |
| 内蒙古 | 张志仁 | 王 荣 | 刘爱平 | 刘彦彰 | 南 丁 | 高秀恩 | |

辽	宁	杨素艳	莉颖	教孙家	特逊	根英	张顺清	刘蓉	舒凤杰	魏丽敏
吉	林	陈胜利	华辉	陈桂颖	颖福	王兵	祝承亮	李春花		
黑	龙	于家政	杨威	李熊王	斌珠	王春为	金绍育才	金贵东	李鹏	
上	海	李国威	许云峰	夏建新	刘健	孔德旺	俞颂董	杨浩清	陶建平	
江	苏	任方成	吴明华	李世杰	应建军	马建新		何仁荣	付晋玫	
福	建	曾大洋	熊以情	徐源可	董乐华	毛有祥		肖建中		
江	西	赵水祥	马国军	侯加明	王丽萍			肖炳杰		
山	东	汪江松	肖真武	陈宝亭	刘统菊	杨德焱		赵小平		
河	南	周署文	殷切清	余光明	曾晓牛					
湖	北	刘案江	何浩力	谢细华	徐山洪	郑俊盛		劳兆喜	陈文生	
湖	南	张黎明	李王英	黄文毓	梁小贱	邓志云		林国忠	刘超平	
广	东	何浩江	张黎明	梁秉冠	卢建川	刘仲雄		邓正德	付冠流	
		张李王	张王秋	石永生	钟明德	龙开奋				
海	南	李黎方	王英科	王金玉	莫德勤			冯惠芹	王国风	吴挽蓉
四	川	王荣文	张秋学	王光浓	牟兴华			罗朝兴	罗红	徐云贵
贵	州	王秋学	胡学让	赵颖朝	王兴锐					
云	南	王秋学	胡学让	胡朝双	汪学芳					
陕	西	王秋学	胡学让	欧咏格						
甘	肃	王秋学	胡学让	李占玉						
宁	夏	王秋学	胡学让	黄志清						
青	海	王秋学	胡学让							
新	疆	王秋学	胡学让							

命题委员会

主 任	周国镇	《数理天地》杂志社社长、总编
副主任	周春荔	首都师范大学数学系教授
	那吉生	中国科学院数学科学与系统科学研究所研究员
	余其煌	中国科学院数学科学与系统科学研究所研究员

高中一年级命题组成员

组 长	王人伟	北京航空航天大学附中特级教师
成 员	周沛耕	北京大学附中特级教师
	韩於葵	北京航空航天大学教授
	连四清	首都师范大学副教授
	郭 璋	北京朝阳区中学教研室特级教师
	葛孟增	北京航空航天大学附中高级教师
	葛 军	南京师大数学系副教授
	吴 康	华南师大数学系副教授

希望杯数学邀请赛有
利于学生有利于教师
将促进中国数学教育
的发展

王寿仁 一九九〇年
五月

王寿仁：中国著名老数学家、中国数学奥委会首任主席

寄希望于教育，
寄希望于青少年。

祝首届“希望杯”数学邀请赛
胜利举行

杨乐
1990年5月

杨乐：中国科学院院士、中国科学院数学与
系统科学研究院首任院长、国际著名数学家

有負着祖國的希望，
迎接廿一世紀的到來！

龔昇 95年7月

龔 昇：中國科學技術大學原副校長、著名數學家
華羅庚數學獎獲得者

青出于蓝而
胜于蓝，希望
寄托在年轻
一代身上。

梅向明

90.11.30.

梅向明：北京师范学院原院长、著名数学家、民进中央原副主席

前 言

“希望杯”全国数学邀请赛自 1990 年开始举办，至今已经 15 届了。第 1 届有 11 万名中学生参加，到第 9 届，每年的参赛人数都超过百万。15 届以来，参赛中学生累计超过 1200 万。国内中学生学科竞赛活动，有如此大的规模，有如此众多的中学生参加，除“希望杯”之外，还没有第二个。这充分说明了“希望杯”在中学生中受欢迎的程度。中学生为什么喜欢参加“希望杯”？很重要的一个原因是题目出得好，出得漂亮，有较大的思维空间。“希望杯”命题委员会拥有国内第一流的数学竞赛方面的专家，他们精心地编拟了历届的试题。此外，全国有千余位出色的数学教师、数学教研人员和大中学生也提供了不少自编的题目。同学们正是通过做这些题，学习它们、研究它们，从而更扎实、更开阔地掌握了知识，增长了智慧和才干，使学习更有信心，成绩更出色。“希望杯”如同一把金钥匙，对每个参赛的中学生，它既开启了智慧之门，更开启了信心之门。这正是“希望杯”的魅力所在。

在中学任教的数学老师们，同他们的弟子一样也很喜欢“希望杯”——因为，从这个“杯”中，层出不穷，不断涌现出来的一个一个问题，为改进自己的教学，带出高水平的学生提供了难得的素材和有益的启示。

为了让更多的中学生和他们的老师（尤其是没有参加过“希望杯”赛的），也能共享我们 15 年来的智慧结晶，我们将第 1 届至第 15 届的试题按初一、初二、高一、高二这四个年级分四册出版，供四个年级的师生分别使用。书中不当之处，请读者批评指正。

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会主任 周国镇

2005 年 1 月 1 日

“希望杯”激励我走向灿烂的明天

——一个矿工的儿子对“希望杯”的感动

马维民

(北京航空航天大学赴德国博士研究生)

离12月2日去德国留学只有短短的5天了。当一切准备妥当，只等飞离北京的那一刻时，心情也由当初的激动、兴奋而渐趋平静，任由思绪穿梭于对未来的憧憬和过去的回忆……成长中不间断的挫折，伴随着点滴的荣耀，在我脑海中一幕一幕地闪过，让我不禁地想起了曾在我人生道路上数次给我希望，催我上进的一盏明亮的灯——“希望杯”。

我是在读初二第二学期的时候偶然接触“希望杯”全国数学邀请赛的。一天自习课上，教几何的王禄合老师手里拿着一张《中国青年报》，兴冲冲地走进教室。从他激动而又寄予深切希望的热情话语中，我第一次知道了“希望杯”，并被她那“面向广大同学，激发他们的学习兴趣，树立他们奋斗进取的信心”的宗旨所感染。就这样，我参加了中学生涯里第一次竞赛——第2届“希望杯”全国数学邀请赛。这是在1991年春天。

第一试中，我做出了不少题，分数超过了及格线。到第二试感到力不从心了，只做了不到一半的题。因此，从赛场出来后，我没有再去想“希望杯”的事，更没有企盼着自己能够获奖，我又像往常一样平静地生活、学习……我从小生活在远离城市的一个普普通通的矿工家庭，父亲由于工伤不得不离开工作岗位，退休在家。一直以来，矿上的子弟都是初中毕业后，进入矿务局技校，然后就回矿下井当工人。因此家里对我也没有寄予太高的期

望，能考个中专，回来以后不再下井就行了。而我当时最大的梦想，就是走出煤矿，投入日新月异的大都市，融入一个更广阔的世界。没想到“希望杯”正帮助我悄然改变着我的思想和生活，给我一双腾飞的翅膀。

初二学年结束后，在暑假补英语课的一个下午，王老师兴奋地走进教室，激动地对我们说：“现在向你们宣布一个好消息，我们班的马维民同学获得了‘希望杯’全国数学邀请赛的三等奖——铜牌！我们矿上出了一个探花！”全班沸腾了，而我静静地坐在那里不知所措，这对我来说是太大的惊喜了，我一时承受不了……

就是这块小小的铜牌成了我人生的一个转折点。它使我尝到了学习的乐趣；给了我遨游知识海洋的信心和勇气；点燃了我少年时的豪情和梦想！它仿佛为我打开了一扇门，一扇通往更高目标和迈向成功的大门。从此，我就像换了个人，废寝忘食地拼命学习，真是非常刻苦，因为我有了信心，我看到了自己潜在的能力。于是我便顺风而上，不久又获得了“河北省煤炭厅数学英语竞赛”二等奖；中考时以邢台市并列第十三名的成绩考入省重点中学——邢台市一中；在高中阶段我的成绩始终在年级前十名之内，并先后获得“全国化学奥林匹克竞赛河北赛区”二等奖、“全国英语奥林匹克竞赛河北赛区”三等奖；高中毕业时，因为品学兼优，我被保送到北京航空航天大学，大二时入了党，曾担任系学生会主席，多次获得各种奖学金；1999年又被保送直读博士研究生。

这时的我，在我们矿务局已经是“大名鼎鼎”了。面对自己骄人的成绩，再加上周围不断的称赞，我有些飘飘然……就在这时，1999年7月，“希望杯”全国数学邀请赛组委会邀请我到浙江绍兴参加第10届“希望杯”颁奖仪式，并请我作为往届获奖者代表之一发言。绍兴市领导和一些著名数学家出席并颁奖。在这次会议上我终于见到了仰慕已久的《数理天地》杂志社社长、

“希望杯”组委会秘书长周国镇老师，他以其博学谦虚而又平易近人的独特人格魅力感染着我。跟周老师的交谈中，我才得知我在初二的时候所得到的那块铜牌，并不是因为我在全国考生中有足够的实力，只是因为我在我们地区相对比较优秀。这次会上我还见到了全国各地获得金牌、银牌的同学，和他们交谈时，他们那优秀的综合能力和朝气蓬勃的精神让我在为长江后浪推前浪喝彩时，也感受到无形的压力，更为自己的骄傲无地自容。我暗下决心，一定要在戒骄戒躁中更上一层楼——“希望杯”又一次修正了我的人生观，鞭策着我不断前进。

在研究生阶段，我刻苦认真地学习基础知识，踏踏实实地做相关的课题，科研能力得到了导师邹极（早年留学德国获博士学位）的赞许。就在我攻读博士一年后，由他推荐并经国防科工委批准派我到德国不伦瑞克工业大学（不伦瑞克是近代数学奠基者之一高斯的出生地）公费留学两年，我将在德国研究我国亟需的微型机器人，5天后就要飞越欧亚大陆，前往马克思、恩格斯的故乡，迎接新一轮挑战了……

临别这片我眷恋热爱的祖国大地之际，我想对满溢着关怀和爱意的“希望杯”表达我最深的敬意。感谢她给平凡的我带来了希望，给迷茫的我指明了方向。衷心祝愿“希望杯”越办越好，给更多的青少年带来希望！

2003年11月26日

目 录

“希望杯”全国数学邀请赛组织委员会、命题委员会

王寿仁、杨乐、龚昇、梅向明题词

前 言

“希望杯”激励我走向灿烂的明天

试题及解答

第一届 (1990 年)	(1)
第一试	(1)
第二试	(9)
第二届 (1991 年)	(19)
第一试	(19)
第二试	(31)
第三届 (1992 年)	(46)
第一试	(46)
第二试	(53)
第四届 (1993 年)	(70)
第一试	(70)
第二试	(79)
第五届 (1994 年)	(94)
第一试	(94)
第二试	(103)
第六届 (1995 年)	(117)
第一试	(117)
第二试	(126)
第七届 (1996 年)	(136)