高等学校基础课配套辅导用书

高等数学

测试AB卷

恩 波 组编
姚洪兴 主编

梯度设计 同类首创
A卷 全面巩固基础
B卷 综合提高强化

学苑出版社

高等数学测试AB卷

A 卷：巩固基础 知识全面覆盖

B 卷：综合运用 提升数学素质

主　编　姚洪兴

副主编　顾宛成

编　者　丁占文　杨宏林　李　力

　　　　顾宛成　姚洪兴

学 苑 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学测试AB卷/姚洪兴主编. -2版. -北京:
学苑出版社,2002.9(2003年8月)
ISBN 7-5077-2056-X

Ⅰ. 高… Ⅱ. 姚… Ⅲ. 高等数学-高等学校-
试题 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第069145号

责任编辑:刘 涟
责任校对:姜东平
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社 址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼
邮政编码:100078
网 址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010-67675512、84560465
经 销:新华书店
印 刷 厂:北京宏大印刷有限公司
开本尺寸:787×1092 1/16
版 张:19.5
版 次:2003年8月北京第2版
印 次:2004年11月北京第3次印刷
印 数:21001—26000册
定 价:19.80元

前　言

高等数学是高等院校一门重要基础课，也是全国硕士学位研究生入学考试中许多专业指定的必考基础课，且从2003年开始，在全部基础课中所占的分值由100分上升为150分。无论从培养和提高大学生高等数学素质，还是仅仅从备考的意义上讲，教学过程中的阶段性测试都是十分重要的。通过检测，教师可以得到对教学有益的反馈信息，而学生可以加深对学科知识的理解，及时发现自己需要加强的薄弱环节，培养分析问题和解决问题的能力。正是从这一认识出发，我们编写了与教材配套使用的《高等数学测试AB卷》。

《高等数学测试AB卷》编写特点在于：

1. 适用的广泛性。本书中的试题题量和难度选择与控制，依据的是国家教育部颁布的理工科院校的高等数学教学要求，而不限于针对某一本教科书，因此它可以与非数学专业的理、工、农、医各专业的教材配套，用作教学过程中的同步练习册，也可作为经管类的参考用书。

2. 选题的精练性。既坚持对各知识点的全面覆盖，又避免了对知识点或题型相同试题的过于重复，这就使本书不同于传统意义上的高等数学习题集。

3. 题源的权威性。本书的试题有些是选自国内外声誉着著的教科书，有些选自国内著名高校的试卷，有的是以往的考研真题，可以说，不乏国内外专家精心设计、匠心独具之作。

4. 解析的翔实性。对有一定难度的试题，不单单是做出了解答，同时还给出了思路的启发以及难点的剖析，这就使本书不同于常见的习题解答。读者在使用本书时不只是学会一道道题的解法，还将学会由此及彼，举一反三，真正达到通过测试提高解题能力的目的。

5. 测试的梯度性。本书的每一章提供了A、B卷各两份，这是本书最突出的特点。其中A卷为基础巩固题，重在覆盖知识面，难度接近或略高于阶段（期中、期末）考试；B卷则体现了教学的较高要求，其中不少试题具有较强的综合性，对于有志于参加工科院校高等数学竞赛及硕士生入学考试的读者，将得益匪浅。两套试卷可以供不同学校或者不同程度的学生根据自己的实际情况选用，也可供同一学生在不同的学习阶段选用。请注意，虽然A卷和B在整体上体现了两个层次的要求，但这并不表示B卷中的基础题比A卷中的每道题的难度都大。仿照硕士生入学全国统考的试题模式，试卷A、B都采用了填充题、单项选择题、计算题、证明题等形式。

A、B卷的设计，依据的是行之有效的循环训练理论，总体上由浅入深，弥补了一般教辅资料中题目无层次的缺陷。相信很多学生做了A卷后，总是想进一步去做B卷，试探自己的水平，这样可以使得学生在不知不觉中提高高等数学的学习兴趣和成绩，并能对不同层

次的考试(当然也包括考研)应付自如。

本书在广泛调查研究的基础上精心策划,力图满足广大师生对这种测试方法的渴望,它在高等数学领域中是一种全新型的教辅读物。当然,它是否真正符合大学生的需求,还需经过实践的检验。

本书可作为理、工、农、医、军、经、管等大学生一年级的同步训练和测试教材,也可作为报考硕士研究生的复习参考资料。本书由姚洪兴博士任主编,顾宛成老师任副主编,丁占文、杨宏林、李力老师参加编写,南京大学数学系姜东平教授仔细审阅原稿,并提出了不少可贵的建议,编者们深表谢忱。

由于时间仓促,不足之处,期盼批评指正,以便及时修正。

编者

目　录

第一章　函数与极限

阶段测试 A 卷(Ⅰ)

一、填充题(每题 4 分,共 20 分)

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\sqrt{100-x^2}$ 的定义域是______.

2. 已知函数 $y=10^{x-1}-2$,则它的反函数是______.

3. 当 $x\to 2$ 时,$y=3x+1\to 7$.为了使 $|y-7|<0.001$,则 δ 应不大于______.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$______.

5. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,无零点,但有使 $f(x)$ 取正值的点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的符号为______.

二、单项选择题(每题 4 分,共 20 分)

1. 函数 $f(x)=10^{-x}\sin x$ 在 $[0,+\infty]$ 内是(　　).

(A) 偶函数　(B) 奇函数　(C) 单调函数　(D) 有界函数

2. 函数 $f(x)=x\sin x$(　　).

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　(D) $x\to\infty$ 时极限存在

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $g(x)=1-\sqrt[3]{x}$, 则当 $x\to 1$ 时,(　　).

(A) f 与 g 为等价无穷小　(B) f 较 g 为高阶无穷小

(C) f 较 g 为低阶无穷小　(D) f 与 g 为同阶无穷小但不等价

4. 下列等式不成立的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=1$　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=1$　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}=1$

5. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$,则下列结论中错误的是(　　).

(A) $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点　(B) $x=-1$ 为无穷间断点

(C) $x=0$ 为可去间断点　(D) $x=1$ 为第一类间断点

三、(6 分)　设 $f(x)=\begin{cases}1, & e^{-1}<x<1\\ x, & 1\le x<e\end{cases}$, $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$.

四、(6 分)　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

五、(6 分)　已知 $f(x)=\sqrt[x]{1-2x}$, 试计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

六、(6 分)　$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ a+x^2, & x\le 0\end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,应当怎样选取 a?

七、(6 分)　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

八、(6分) 设 $f(x)=x^3+4x^2-3x-1$，试讨论方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 内的实根情况.

九、(8分) 根据函数极限定义证明：$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

十、(8分) 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

十一、(8分) 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a(n\to\infty)$.

参考答案·解析或提示

一、

1. 答 $[-10,1)\cup(1,2)$.

解析 由 $\begin{cases}2-x>0\\2-x\neq1\\100-x^2\geqslant0\end{cases}$，得到 $\begin{cases}x<2\\x\neq1\\|x|\leqslant10\end{cases}$，所以定义域为 $[-10,1)\cup(1,2)$.

2. 答 $y=\lg(x+2)+1$.

解析 由 $y=10^{x-1}-2$，得 $10^{x-1}=y+2$，所以 $x=\lg(y+2)+1$ 故它的反函数为

$$y=\lg(x+2)+1.$$

3. 答 $\delta=\dfrac{0.001}{3}$.

解析 由题意 $|(3x+1)-7|<0.001$，得 $|x-2|<\dfrac{0.001}{3}$，可取 $\delta=0.0003<\dfrac{0.001}{3}$.

4. 答 $\dfrac{1}{3}$.

解析 $$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{\frac{2x}{3}}\cdot\frac{2}{3}\xlongequal{\text{令 } t=\frac{2}{3}x}\lim_{t\to0}\frac{f(3t)}{t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

5. 答 正.

解析 利用反证法，假设存在点 $x_1\in[a,b]$，使得 $f(x_1)<0$. 又由题意知存在点 $x_2\in[a,b]$，$x_2\neq x_1$，使得 $f(x_2)>0$. 由闭区间连续函数介值定理可知，至少存在一点 ξ 介于 x_1 和 x_2 之间，使得 $f(\xi)=0$，显然 $\xi\in[a,b]$，这与已知条件矛盾.

二、

1. 选 D.

解析 $|f(x)|\leq10^{-x}\leq1$，$x\in[0,+\infty)$.

2. 选 A.

解析 对于任意给定的正数 M，总存在着点 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n>\dfrac{2M-\pi}{4\pi}$，使 $|f(x_n)|=|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}|>M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

C错，对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n=|2n\pi|>x$（只要 $|n|>\dfrac{x}{2\pi}$），使 $f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

3. 选 D.

解析 $$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+x)(1-\sqrt[3]{x})}=\frac{3}{2}.$$

4. 选 A.

解析　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=-1$，故选 A.

对于 B，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$. 对于 C，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$.

对于 D，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

5. 选 C.

解析　去掉绝对值符号，将 $f(x)$ 写成分段函数，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ -\dfrac{1}{x+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，故 $x=0$ 为跳跃间断点.

三、解　由 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{e}<g(x)<1\\ g(x), & 1\leq g(x)<e\end{cases}$，得到 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ e^x, & 0\leq x<1\end{cases}$.

解析　在求 $f[g(x)]$ 时，既要把解析式 $f(x)$ 中的 x 都换为 $g(x)$，同时要把表示自变量变化范围的地方的 x 换为 $g(x)$，并由得到的不等式求出复合函数的自变量的变化范围.

四、解　因为 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$，又 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3(3)^{\frac{1}{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot(3)^{\frac{1}{n}}=3$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

解析　事先确定两边用以比较的数列，并且这两个数列的极限一样，然后利用夹逼准则来判断.

五、解　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}=e^{-2}$.

解析　利用 $\lim\limits_{y(x)\to 0}[1+y(x)]^{\frac{1}{y(x)}}=e$.

六、解　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$，又 $f(0)=a$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=a$，得到 $a=0$.

解析　利用 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，确定待定参数.

七、解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

解析　对于 $\infty-\infty$ 型一般通过分子有理化或者通分化成 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型或 $\dfrac{0}{0}$ 型.

八、解　因为 $f(-5)=-11<0$，$f(-1)=5>0$，$f(0)=-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $[-5,-1]$ 及 $[-1,0]$ 上满足零点定理的条件，故存在 $\xi_1\in(-5,-1)$ 及 $\xi_2\in(-1,0)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，所以方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 内存在两个不等的实根. 又因为 $f(1)=1>0$，同样 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足零点定理的条件，在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ_3，使得 $f(\xi_3)=0$，而 $f(x)=0$ 为三次多项式方程，它最多只有三个实根，因此方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 内只有两个不等的实根.

九、提示 将不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 变形，保留 $|x-x_0|$. 一般先适当限制 x 的变化范围（通常给出关于 x_0 的对称区间），再放大不等式，找出 δ 即：

$$|f(x)-A|=|p(x)||x-x_0|<M|x-x_0|<\varepsilon,$$

解出 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

证 $\forall\varepsilon>0$，不等式 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$ 即 $|(1-2x)-2|=|2x+1|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$ 成立. 由此证得

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2.$$

十、提示 先根据 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，找出正数 X，把无穷区间分成无穷子区间和有限闭区间 $[-X,X]$. 而在无穷子区间上根据 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的定义，得到有界；在有限闭区间上，根据闭区间上连续函数的有界性，也有界，所以得到 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，所以对 $\varepsilon=1,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<1$ 成立，于是 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

又因 $f(x)\in C_{(-\infty,+\infty)}$，故 $f(x)\in C_{[-X,+X]}$，由闭区间上连续函数的有界性，$\therefore\exists K>0$，对 $\forall x\in[-X,+X]$，有 $|f(x)|<K$，取 $M=\max\{1+|A|,K\}$，则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|f(x)|<M$ 成立，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

十一、提示 首先要搞清数列是由偶数列和奇数列的项构成，然后利用数列的偶数列和奇数列都收敛到同一极限，关键要找出同时满足 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$ 和 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ 的公共的 N.

证 由 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，对 $\forall\varepsilon>0,\exists K_1>0$，

当 $k>K_1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$ 成立

同样，由 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，对上式的 ε，$\exists K_2>0$，

当 $k>K_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ 成立，所以取 $N=\max\{2K_1-1,2K_2\}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

阶段测试 A 卷(Ⅱ)

一、填充题(每题 4 分,共 20 分)

1. 设 $f(x)=\ln\frac{3+x}{3-x}+1$,则 $f(x)+f\left(\frac{3}{x}\right)$的定义域为______.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$ ______.

3. 当 $x\to 0$ 时,$2x^2+3x^{\frac{5}{2}}$ 是关于 x 的______阶无穷小.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$ ______.

5. 已知数列 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=$ ______.

二、单项选择题(每题 4 分,共 20 分)

1. 若 $f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$,以 $x=1$ 为可去间断点,则(　　).

(A) $a=0,\ b\neq 1$　　(B) $a=1, b=e$　　(C) $a\neq 1,\ b=e$　　(D) $a\neq 1, b=1$

2. 奇次多项式 $p(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}(a_0\neq 0)$ 存在实根情况是(　　).

(A) 1 个　　(B) $2n+1$ 个　　(C) $2n$ 个　　(D) 至少 1 个

3. 设 $y=f(x)$ 在(a,b) 内连续,则 $f(x)$ 在(a,b) 内(　　).

(A) 有界　　(B) 无界　　(C) 存在最大值最小值　(D) 不一定有界

4. 若 $f(x)$ 在(a,b) 内单调有界,则 $f(x)$ 在(a,b) 内间断点的类型只能是(　　).

(A) 第一类间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　　(D) 结论不确定

5. 两个无穷小比较的结果是(　　)

(A) 同阶　　(B) 高阶　　(C) 低阶　　(D) 不确定

三、(6 分)　利用极限定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}=0$.

四、(8 分)　设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A\ (a>0,a\neq 1)$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

五、(6 分)　利用极限存在准则证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求这一极限.这里 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$,$x_1=\sqrt{2}$.

六、(6 分)　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数,试确定 a 和 b 的值.

七、(6 分)　设 $f(x)$ 对一切 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,证明函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

八、(6 分)　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,2a]$上连续,且 $f(0)=f(2a)$,证明在$[0,a]$上至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

九、(8 分)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,则在$[x_1,x_n]$上必有 ξ,使 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

十、(6 分) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

十一、(8分) 数列$\{x_n\}$的定义为:$x_0=a,x_1=b,x_n=\dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}(n\geqslant 2)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

参考答案·解析或提示

一、

1. 答　$(-3,-1)\cup(1,3)$.

解析　先求出$f(x)$的定义域D_1,解不等式$\dfrac{3+x}{3-x}>0$,得到$\begin{cases}3+x>0\\3-x>0\end{cases}$或$\begin{cases}3+x<0\\3-x<0\end{cases}$,解得定义域$D_1=\{x\,\big|\,|x|<3\}$. 次求$f\left(\dfrac{3}{x}\right)$的定义域$D_2$,应满足$\left|\dfrac{3}{x}\right|<3$,所以$|x|>1$. 于是$f(x)+f\left(\dfrac{3}{x}\right)$的定义域$D=D_1\cap D_2=\{x\mid 1<|x|<3\}=(-3,-1)\cup(1,3)$.

评注　这类题不必去求函数$f\left(\dfrac{3}{x}\right)$的表达式,否则较繁琐.

2. 答　$f(x)$.

解析一　
$$f(f(x))=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}=f(x).$$

解析二　因为$f(x)\geqslant 0$,所以$f(f(x))=\begin{cases}0, & f(x)=0\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}=f(x)$.

3. 答　2.

解析　由k阶无穷小的定义,现考察当k取何值时,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x^2\sqrt{x}}{x^k}=C\neq 0$,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(2+3\sqrt{x})}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+3\sqrt{x}}{x^{k-2}}$,可见取$k=2$时,这个极限为2,所以$x\to 0$时,$2x^2+3x^{\frac{5}{2}}$是$x$的2阶无穷小.

4. 答 e.

解析
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)\right]^{x+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$$

5. 答$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解析　因为$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]$,而

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right],$$

所以$\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}$,由于$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$,这样$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\to 0(n\to\infty)$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

二、

1. 选 C.

解析　$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为 $\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\dfrac{e(e^{x-1}-\frac{b}{e})}{(x-a)(x-1)}$，又当 $x\to1,x-1\to0,e^{x-1}-1\sim x-1$. 所以当 $a\neq1$，而 $b=e$ 时，有 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e}{x-a}=\dfrac{e}{1-a}$. 故选 C.

2. 选 D.

解析　不妨设 $a_0>0$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2n+1}(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}})=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2n+1}\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)=-\infty$. 所以存在 $X>0$，使 $p(X)>0,p(-X)<0$，又因为多项式 $p(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，由零点定理可知在 $(-X,X)$ 内至少存在一点 ξ，使 $p(\xi)=0$.

3. 选 D.

解析　例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续，但在 $(0,1)$ 内无界，正确的说法是若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有界.

4. 选 A.

解析　不妨设 $f(x)$ 单调增加，且 $|f(x)|\leqslant M$，对任一点 x_0，当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 单调增加且有上界，故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在；当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 单调减少且有下界，故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，故 x_0 只能是第一类间断点.

5. 选 D.

解析　如 $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x},\beta(x)=x$，当 $x\to0$ 时，都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较高低.

三、证　$\forall\varepsilon>0$，欲使 $\left|\dfrac{(-1)^n n}{2^n}-0\right|=\dfrac{n}{2^n}<\varepsilon$，由 $2^n=(1+1)^n=1+n+\dfrac{n(n-1)}{2!}+\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}$，得 $2^n>\dfrac{n(n-1)}{2}$（不妨设 $n>1$），故 $\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{2n}{n(n-1)}=\dfrac{2}{n-1}$. 欲使 $\dfrac{n}{2^n}<\varepsilon$，只需 $\dfrac{2}{n-1}<\varepsilon$，即只需 $n>1+\dfrac{2}{\varepsilon}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{1,\left[1+\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，总有 $\left|\dfrac{(-1)^n n}{2^n}-0\right|<\varepsilon$ 成立，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}=0$.

解析　利用 ε-N 方法，在找 N 时，由于一般不是直接就能找出 N，通常采用上述先分析，后综合的叙述方式，并辅以不妨设 $n>N_0$ 及不等式放大等技巧.

四、提示　首先利用极限与无穷小的关系，然后运用适当的等价无穷小代换.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A$，所以 $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$，又 $x\to0$ 时，$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$.

这样 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\sim Ax\ln a+\alpha\cdot x\ln a$，所以 $1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim a^{Ax}$，因此 $f(x)\sim(a^{Ax}-1)\sin x\sim Ax\ln a\cdot\sin x$.

于是得到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ax\ln a\sin x}{x^2}=A\ln a$.

五、解 先证明数列 x_n 有界，利用数学归纳法证明.

因为当 $n=1$，$x_1=\sqrt{2}<2$；假定 $n=k$ 时，$x_k<2$；则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，所以 $x_n<2$，$(n=1,2,\cdots)$，然后证明数列 x_n 单调增加.

因为 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{2+x_n-x_n{}^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\dfrac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}$，由于 $x_n<2$，所以 $x_{n+1}-x_n>0$. 这样由单调有界准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 由于 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，即 $x_{n+1}^2=2+x_n$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n)$，从而有 $A^2=2+A$. 解得 $A_1=2$，$A_2=-1$（舍去），故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

评注 先证有界时，一般都要用到数学归纳法；在证单调性时，若有上界要证明单调增加，若有下界要证明单调减少.

六、解 当 $|x|>1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}$；当 $|x|<1$，$f(x)=ax^2+bx$；当 $x=1$，$f(x)=\dfrac{1+a+b}{2}$；当 $x=-1$，$f(x)=\dfrac{-1+a-b}{2}$.

所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\\ ax^2+bx, & |x|<1\end{cases}$ 为分段函数，在分段点 $x=1$ 处，

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=a+b$；$f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}$. 在分段点 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax^2+bx)=a-b$，$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x}=-1$，$f(-1)=\dfrac{a-b-1}{2}$，因为 $f(x)$ 为连续函数，因此有 $1=a+b=\dfrac{a+b+1}{2}$ 和 $a-b=-1=\dfrac{a-b-1}{2}$. 于是解得 $a=0$，$b=1$.

七、提示 要证明 $f(x)$ 在 x_0 处连续，按定义要证$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，由条件 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 可得 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)$，所以只要证明$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$即可.

证 已知 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，令 $x_2=0$，则 $f(x_1)=f(x_1)+f(0)$，可得 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\triangle x)=f(0)=0$，而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)$，两边取极限得到$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$，故函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

八、提示 求方程 $f(x)=g(x)$ 的根的问题，可转化为求 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的零点问题.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$. 因为 $f(x)$ 在$[0,2a]$上连续，所以 $f(x+a)$ 在$[0,a]$上连续，从而 $F(x)$ 在$[0,a]$上连续，注意到 $F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=-[f(0)-f(a)]$.

① 若 $f(0)-f(a)=0$，则 $f(a)=f(0)=f(2a)$，取 $\xi=0$ 或 a 时，有 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

② 若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(0)\cdot F(a)<0$，由零点定理可知，存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综合 ①②，得在$[0,a]$上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$ 成立.

九、提示 利用介值定理,并注意$\xi \in (x_1, x_n)$,而不是$\xi \in (a,b)$,所以不能在$[a,b]$上利用介值定理.

证 令$m = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$,$M = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$,则$x_1, x_2, \cdots, x_n$中至少有一个$x_i$使$f(x_i) = m$,至少有一个$x_j$使$f(x_j) = M$,不妨设$x_i < x_j$.显然有$m = f(x_i) \leqslant$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant f(x_j) = M \tag{1}$$

当(1)式中的两个"$\leqslant$"中有一个取等号时,则对应的x_i或x_j即为ξ.

当(1)式中两个"$\leqslant$"都不取等号时,由于$f(x)$在闭区间$[x_i, x_j]$上连续,由介值定理知,至少存在一点$\xi \in (x_i, x_j) \subset (x_1, x_n)$,使得$f(\xi) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.所以在以上两种情形下,都存在$\xi \in [x_1, x_n]$,使得

$$f(\xi) = \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{n}$$ 成立.

十、解 令$x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}$,则

$$x_n - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n}\right) = 3.$$

解析 要注意x_n的分子每项相差2,分母相差2倍,这样利用数列的简单运算很方便地求得x_n的表达式.

十一、解 由$x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$,有$x_n - x_{n-1} = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \dfrac{x_{n-2} - x_{n-1}}{2}(n \geqslant 2)$.由$x_1 - x_0 = b - a$,$x_2 - x_1 = \dfrac{x_0 - x_1}{2} = \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{(-1)(b-a)}{2}$,$x_3 - x_2 = -\dfrac{x_2 - x_1}{2} = (-1)^2\dfrac{(b-a)}{2^2}$,这样$x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{b-a}{2^{n-1}}$

所以$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0)$

$$= (b-a)\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2^2} + 1\right] = (b-a)\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}(b-a)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

因此$x_n = x_0 + \dfrac{2}{3}(b-a)\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left\{a + \frac{2}{3}(b-a)\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]\right\} = a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}.$$

阶段测试B卷(Ⅰ)

一、填充题(每题4分,共20分)

1. 设 $x \to 0$ 时,$\sqrt{1-2x} = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$,则 a 和 b 分别为______.

2. 设数列 $x_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,若要求 n 大于 N 时,$|x_n - A| < 0.001$ 成立,则 N 可以取______.

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^{\alpha}} = \beta > 0$,则 α, β 的值为______.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1-x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a =$ ______.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}} - 1}{x} =$ ______(β 为自然数).

二、单项选择题(每题4分,共20分)

1. 下列函数中为奇函数的是(   ).

(A) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| > 1 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$ (B) $\varphi(x) = \begin{cases} x, & |x| \geqslant 1 \\ 1, & 0 \leqslant x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$

(C) $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0 \\ -\dfrac{1}{e^x}, & x < 0 \end{cases}$ (D) $h(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\dfrac{1}{e^x}, & x < 0 \end{cases}$

2. $0 < a < b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} =$ (   ).

(A) 1   (B) 0   (C) a (D) b

3. 设函数 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$,则其反函数 $y = f^{-1}(x) =$ (   )

(A) $\begin{cases} 1-x, & x < 3 \\ (x+1)^2, & x \geqslant 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x-1, & x < 3 \\ \sqrt{x+1}, & x \geqslant 3 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 1-x, & x < 2 \\ (x+1)^2, & x \geqslant 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x-1, & x < 2 \\ \sqrt{x+1}, & x \geqslant 2 \end{cases}$

4. 当 $x \to 0^+$ 时 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ 与(   )是等价无穷小.

(A) $\sqrt{x}$ (B) $\sqrt[4]{x}$ (C) $\sqrt[8]{x}$ (D) x

5. 下列运算过程正确的是(   ).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+n} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$

(B) 当 $x \to 0$ 时,$\tan x \sim x$,$\sin x \sim x$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - x}{x^3} = 0$

(C) 当 $x \to 0$ 时,$\tan x \sim x$,$\sin x \sim x$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$