经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-1

几何证明选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

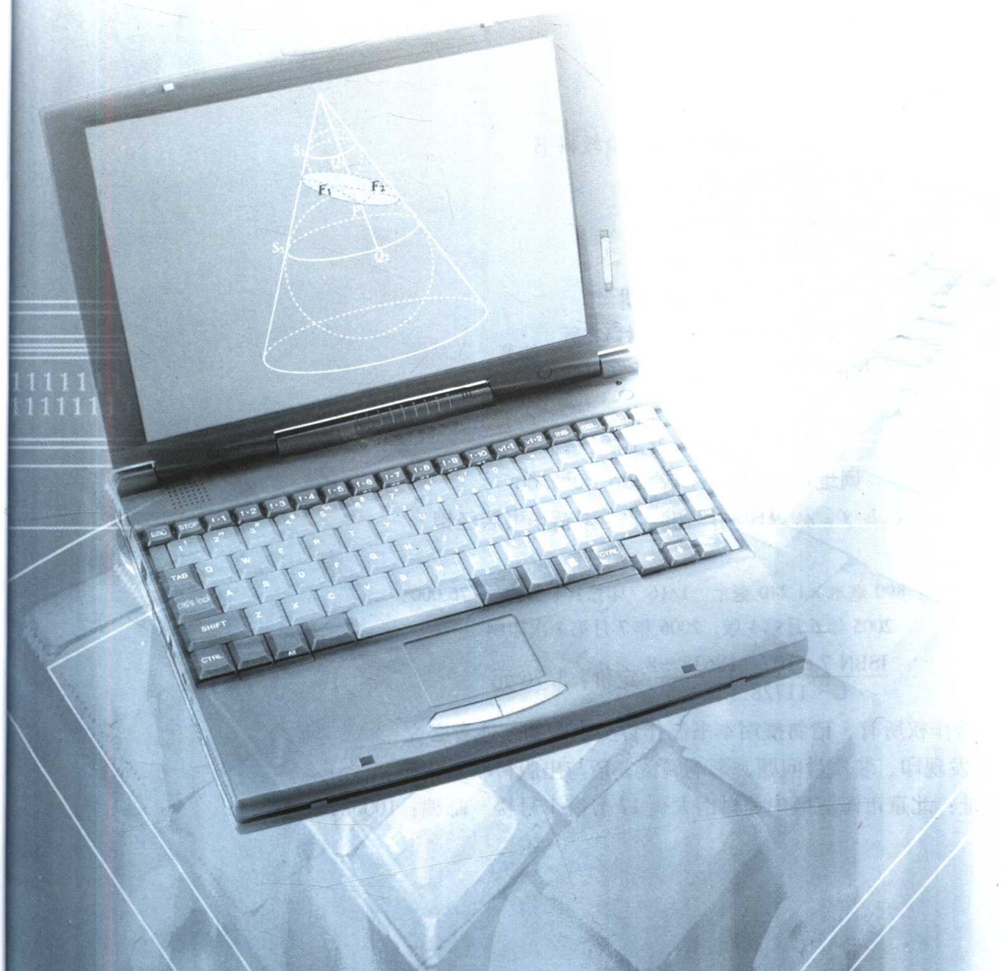
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-1

几何证明选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4－1

A 版

几何证明选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张：4 字数：76 000

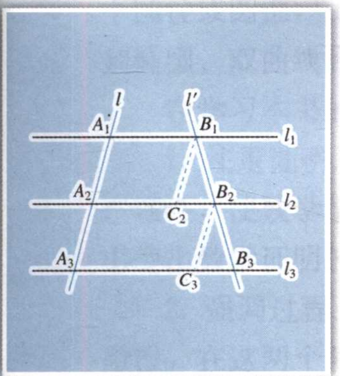
2005 年 6 月第 1 版 2006 年 7 月第 7 次印刷

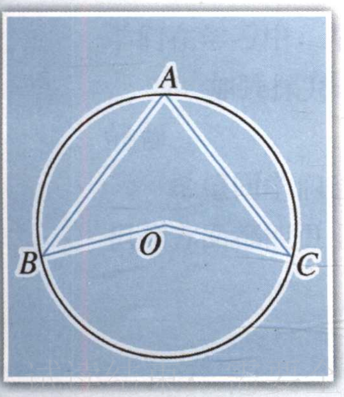
ISBN 7－107－18638－8
G·11728（课） 定价：3.76 元

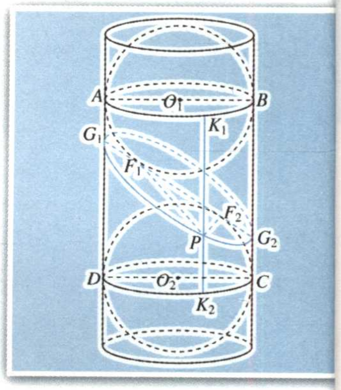
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

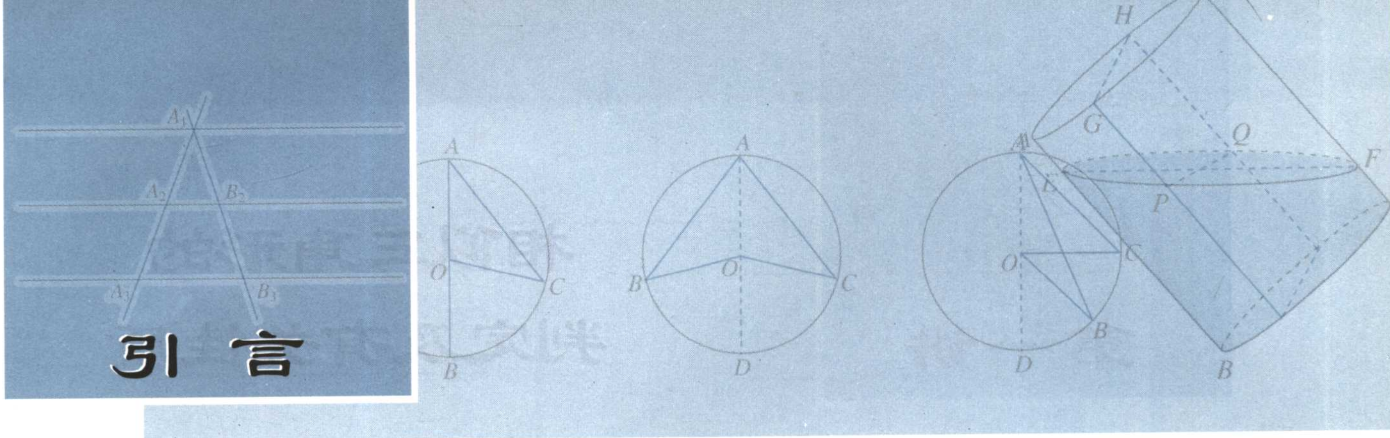
编　　者：喻　平
责任编辑：章建跃
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

目录






A
O_1
B
K_1
G_1
F_1
F_2
P
G_2
D
O_2
C
K_2



引言

我们依据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了本册教科书.

本书是高中数学选修课程系列 4 中的一个专题，内容包括相似三角形的判定和性质、直线与圆的位置关系、圆锥曲线性质的探讨等.

在初中，同学们已经学习了相似图形的概念以及相似三角形的某些性质，但当时并没有对相似三角形的有关定理进行严格的证明. 本书的第一讲，主要内容就是对这些定理进行证明，并应用它们去解决一些问题. 为了证明这些定理，我们引入了平行线等分线段、平行线分线段成比例的有关内容，以组成一个相对严谨的逻辑体系.

第二讲，讨论直线与圆的位置关系，涉及圆周角、圆的内接四边形、圆的切线、弦切角、与圆有关的线段间的度量关系等内容. 其中有的概念同学们在初中阶段已经学习过. 本讲力求使这些知识融为一体，对相关定理进行严格论证，并注重知识的应用.

第三讲，讨论圆锥曲线的概念和性质. 圆锥曲线包括椭圆、双曲线和抛物线，它们是解析几何研究的重要内容. 在本讲中，我们选择了一个新的视角，用一个平面去截一个圆柱或圆锥，由平面与所截圆柱或圆锥中轴线的夹角变化去考察截口曲线的形状，得到椭圆、双曲线和抛物线，同时给出相关结论的证明.

在学习本书的过程中，应注意以下几点：

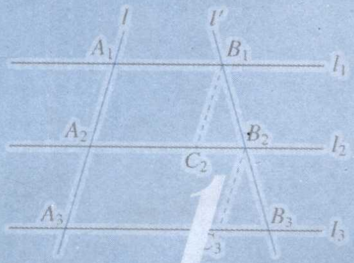
1. 注重证明. 数学是一门严谨的科学，得出的结论都要经过严格的证明. 正是这种严谨性，使数学学习成为训练同学们逻辑推理技能、提高逻辑思维能力的有效途径. 本书突出数学证明的目的也在于此.

2. 强调过程. 一般说来，正确的数学结论的形成需要“发现”和“证明”两个主要阶段，在这两个阶段中都包含着“过程”. 数学知识有一个发生发展过程，通过数学学习，同学们可以领悟知识产生的背景，经历知识发展的过程，从而提高自己提出问题和解决问题的能力. 因此，本书许多定理的引入和证明，都突出了其发生发展的过程.

3. 突出思想. 在陈述知识的同时，力求突出概念所反映的数学思想方法. 因此，同学们在学习中，掌握知识的同时要努力领悟数学思想方法.

4. 加强探究. 学习中，同学们应跟随书中的“观察”“思考”“探究”等，大胆探究问题.

希望同学们通过本书的学习，在知识的积累、数学能力的提高、对数学的理解和认识等方面都能更上一个台阶.



第一讲 相似三角形的判定及有关性质

在初中，我们已经在平面几何中讨论过平行线的一些性质和判定的问题．例如，如果两条直线同时平行于第三条直线，那么这两条直线互相平行；同位角相等，两直线平行；两直线平行，内错角相等……下面我们继续研究平行线的性质．

你还能回忆起更多的关于平行线的知识吗？

一　平行线等分线段定理

研究平行线的性质，就是在已知一组直线平行的条件下，探究可以推出哪些结论．例如，一组平行线被另一组平行的或非平行的直线所截（图 1-1），所得到的图形具有哪些性质呢？

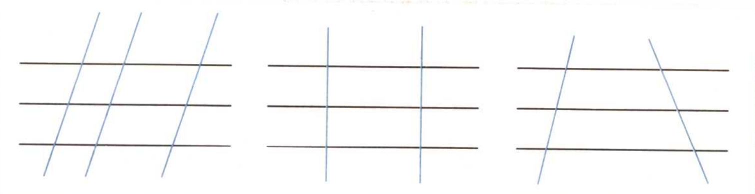


图 1-1

观察

如图 1-2，三条直线 l_1、l_2、l_3 满足 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 $l /\!/ l'$，且分别与 l_1、l_2、l_3 相交于 A_1、A_2、A_3 和 B_1、B_2、B_3．当 $A_1A_2 = A_2A_3$ 时，观察图形，并测量线段 B_1B_2、B_2B_3 的长度，它们有什么关系？如果 l 与 l' 不平行（如图 1-3），上述关系还成立吗？

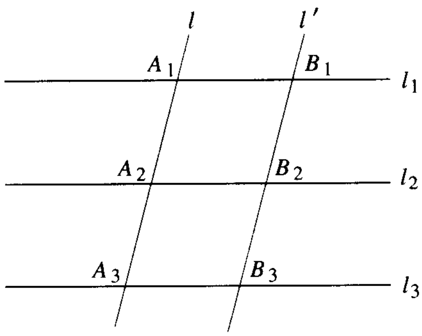


图 1-2

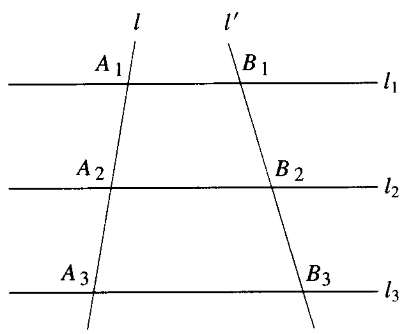


图 1-3

通过观察并测量，可以发现，无论 l 与 l' 是否平行，只要 $A_1A_2=A_2A_3$，就有 $B_1B_2=B_2B_3$. 因此可以猜想：

已知 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 l、l' 与 l_1、l_2、l_3 分别交于 A_1、A_2、A_3 和 B_1、B_2、B_3，如果 $A_1A_2=A_2A_3$，那么 $B_1B_2=B_2B_3$.

由观察或测量得到的结论不一定可靠，必须通过严格的数学证明，才能得到正确的、具有一般意义的结论. 你能证明这个猜想吗?

下面我们给出这个猜想的证明.

证明：(1) 如图 1-2，当 $l /\!/ l'$ 时，

∵ $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$l /\!/ l'$，

∴ 四边形 $A_1B_1B_2A_2$ 是平行四边形.

∴ $B_1B_2=A_1A_2$.

同理可证 $B_2B_3=A_2A_3$.

∵ $A_1A_2=A_2A_3$，

∴ $B_1B_2=B_2B_3$.

(2) 当 l 与 l' 不平行时，如图 1-4，过 B_1 作 $B_1C_2 /\!/ A_1A_2$，交 l_2 于 C_2；过 B_2 作 $B_2C_3 /\!/ A_2A_3$，交 l_3 于 C_3. 同 (1) 的证明方法可得 $B_1C_2=B_2C_3$.

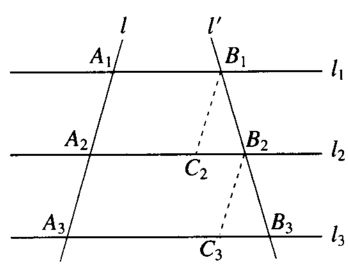


图 1-4

考察 $\triangle B_1C_2B_2$ 和 $\triangle B_2C_3B_3$.

∵ $B_1C_2 /\!/ B_2C_3$（为什么?），

∴ $\angle C_2B_1B_2=\angle C_3B_2B_3$.

又∵ $\angle B_1B_2C_2=\angle B_2B_3C_3$，$B_1C_2=B_2C_3$，

∴ $\triangle B_1C_2B_2 \cong \triangle B_2C_3B_3$.

∴ $B_1B_2=B_2B_3$.

于是，我们有

平行线等分线段定理 **如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等.**

将图 1-4 中的直线 l' 平移，使 l' 与 l_1 相交于 A_1（图 1-5），考察 $\triangle A_1A_3B_3$. 因为 $A_1A_2=A_2A_3$，所以根据平行线等分线段定理可得 $A_1B_2=B_2B_3$. 于是有

推论 1 经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边.

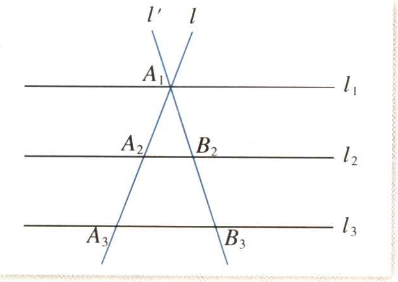


图 1-5

你能证明这个推论吗？

探究

考察图 1-4 中的梯形 $A_1A_3B_3B_1$，你能发现什么结论？

推论 2 经过梯形一腰的中点，且与底边平行的直线平分另一腰.

例 1 如图 1-6，要在一块钢板上的 A、B 两个小孔间再钻三个小孔，使这些小孔都在直线 AB 上，并且每两个相邻的小孔中心的距离相等. 如果只有圆规和无刻度直尺，应当怎样确定小孔的中心位置？

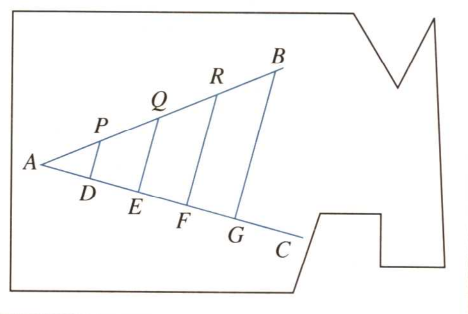


图 1-6

作法：（1）连结 AB，过点 A 作适当射线 AC；

（2）在射线 AC 上，以适当长 r 为半径，用圆规顺次截取 $AD=DE=EF=FG=r$；

（3）连接 GB；

（4）过点 F、E、D 分别作 GB 的平行线 FR、EQ、DP，分别交 AB 于点 R、Q、P. 则 P、Q、R 就是中间三个小孔的中心位置.

你能说说上述作图方法的依据吗？

例 2 如图 1-7，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC 边和 AC 边的中点. 求证：$DE/\!/BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{2}BC$.

这是已经学过的三角形中位线定理. 下面我们用平行线等分线段定理证明它.

证明：过 D 作 $DE'/\!/BC$. 根据推论 1，E' 为 AC 的中点，而 E 是 AC 的中点，故 E 与 E' 重合，即 $DE/\!/BC$.

同样，过 D 作 $DF /\!/ AC$，交 BC 于 F，
则 $BF=FC$.

$\because$ $DE /\!/ FC$，$DF /\!/ EC$，

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形.

$\therefore$ $DE=FC$.

又 $\because$ $FC=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore$ $DE=\frac{1}{2}BC$.

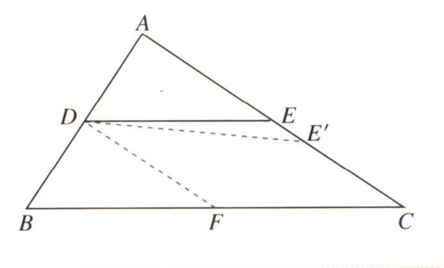


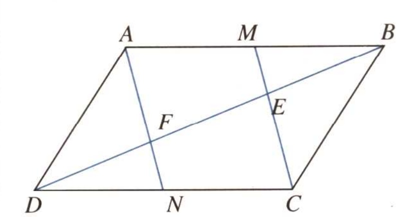
图 1-7

一个数学命题的发现往往来自于对特例的观察和概括，因为在特例中，其命题的各种信息会更加明显，容易被人们捕捉，从而更容易发现条件与结论的内在联系．将问题特殊化，通过观察特殊现象而得出一般结论的猜想，或者通过解决特例而获得解决一般问题的思想方法的启示，这是数学研究中常用的方法．请同学们回顾平行线等分线段定理的概括过程，从中体会从特殊到一般的思考方法.

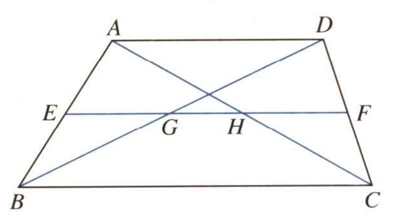
习题1.1

1. 画一条 6 厘米长的线段，并把它 7 等分.
2. 已知：如图，M、N 分别是□$ABCD$ 的 AB、CD 边的中点．CM 交 BD 于点 E，AN 交 BD 于点 F．请你探讨 BE、EF、FD 三条线段之间的关系，并给出证明.
3. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，E、F 分别是 AB、DC 的中点．连接 EF，且 EF 交 BD 于 G，交 AC 于 H.

   求证：$GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$.



（第 2 题）



（第 3 题）

二　平行线分线段成比例定理

我们看到，平行线等分线段定理以“相邻两条平行线间的距离都相等”为条件．如

果一组平行线中相邻两条平行线间距离不相等，又可以得出怎样的结论呢?

观察

如图 1-8，两条直线被一组平行线所截，当平行线间的距离不相等时，所截得的线段 AB 与 BC、DE 与 EF 之间有什么关系?

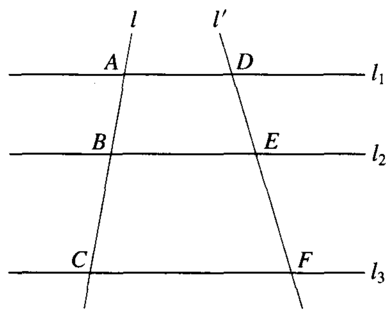


图 1-8

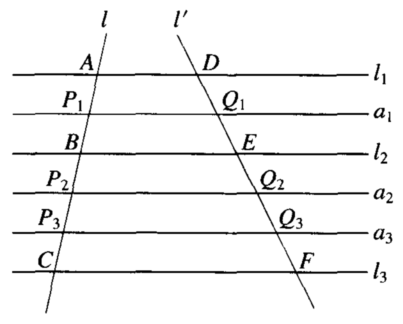


图 1-9

容易发现，$AB \neq BC$，$DE \neq EF$.

由以往学习平面几何的经验，当几何图形不全等时，可以考察它们是否相似，而相似是通过“对应边成比例，对应角相等”来表现的. 由此得到启发，我们可以研究被一组平行线截得的线段是否有“对应边成比例”?

探究

在图 1-8 中，$\dfrac{AB}{BC}$与$\dfrac{DE}{EF}$相等吗? 取$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$的特殊情形进行探讨.

我们可以将上述问题化归为平行线间距离相等的情形.

如图 1-9，如果$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$，设线段 AB 的中点为 P_1，线段 BC 的三等分点为 P_2、P_3，这时有

$$AP_1=P_1B=BP_2=P_2P_3=P_3C.$$

分别过点 P_1、P_2、P_3 作直线 a_1、a_2、a_3 平行于 l_1，与 l' 的交点分别为 Q_1、Q_2、Q_3. 由平行线等分线段定理可知:

$$DQ_1=Q_1E=EQ_2=Q_2Q_3=Q_3F.$$

$\because$ $DE = DQ_1 + Q_1E = 2DQ_1$,

$EF = EQ_2 + Q_2Q_3 + Q_3F = 3DQ_1$,

$\therefore$ $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{2DQ_1}{3DQ_1} = \dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$. (1)

当$\dfrac{AB}{BC}$为有理数时，即$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m}{n}$（$m$，$n$ 是互质的正整数），AB 是长度单位的 m 倍，BC 是长度单位的 n 倍，依照上面的方法，可以证明（1）成立. 更一般地，可以证明，当 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，且$\dfrac{AB}{BC}$是实数时，（1）式也成立.

如果$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$，那么$\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$，$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$成立吗？设$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = t$，请你证明这两个等式（比例的性质）.

由（1）式和比例性质，可以得到

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},\ \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF},\ \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}.$$

一般地，我们有

平行线分线段成比例定理 **三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.**

观察图 1-10 和图 1-11，它们是图 1-8 的特殊情形，即 l 与 l' 的交点分别在 l_1、l_2 上. 根据平行线分线段成比例定理，可得：

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

如果把图 1-10、1-11 中的直线 l_2 看成是平行于$\triangle ABC$ 的 BC 边的直线，那么可以得到：

推论 **平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例.**

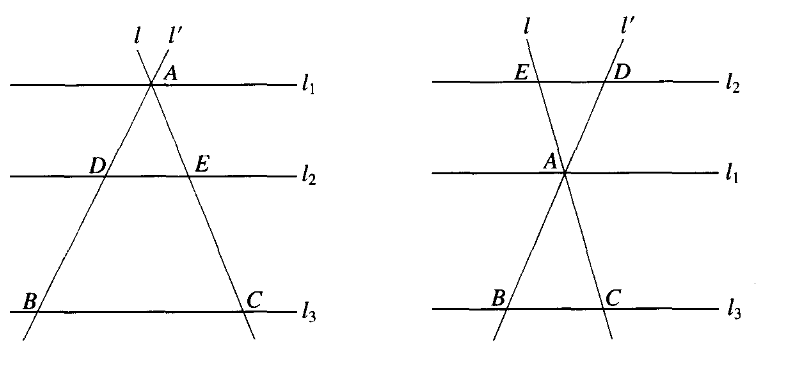


图 1-10 图 1-11

例 1 如图 1-12，$\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$DF /\!/ AC$，$AE = 4$，$EC = 2$，$BC = 8$. 求 BF 和 CF 的长.

解：∵ $DE /\!/ BC$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. （1）

∵ $DF /\!/ AC$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{CF}{CB}$. （2）

由（1）（2）式得：

$\frac{2}{3}=\frac{CF}{8}$，即 $CF=\frac{16}{3}$.

∴ $BF=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$.

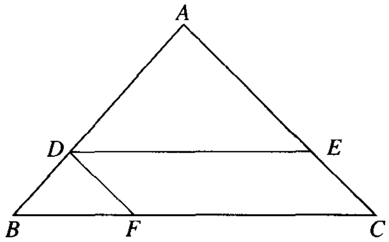


图 1-12

例 2 如图 1-13，$\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$EF /\!/ CD$. 求证：AD 是 AB 和 AF 的比例中项.

证明：在$\triangle ABC$ 中，∵ $DE /\!/ BC$，

∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$. （1）

在$\triangle ADC$ 中，∵ $EF /\!/ CD$，

∴ $\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AE}$. （2）

由（1）（2）式得

$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AF}$.

∴ $AD^2=AB\cdot AF$，即 AD 是 AB 和 AF 的比例中项.

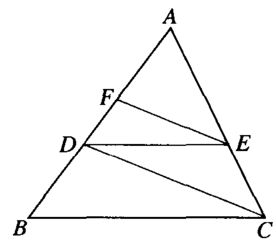


图 1-13

例 3 用平行于三角形一边且和其他两边相交的直线截三角形，所截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

已知：如图 1-14，$DE /\!/ BC$，DE 分别交 AB、AC 于点 D、E.

求证：$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

分析：由平行线分线段成比例定理的推论可直接得到$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. 为了用平行线分线段成比例定理证明$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$，需要构造一组平行线，使 AE、AC、DE、BC 成为由这组平行线截得的线段. 只要过点 E 作 $EF /\!/ AB$，交 BC 于点 F，就可以达到上述目的.

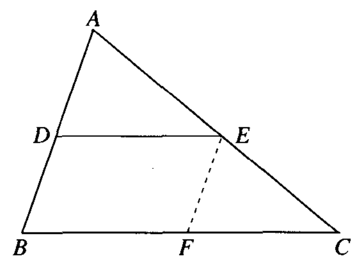


图 1-14

证明：过点 E 作 $EF /\!/ AB$，交 BC 于点 F，

∵ $DE /\!/ BC$，$EF /\!/ AB$，

$\therefore\ \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC},\ \dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AC},$

且 四边形 $DEFB$ 为平行四边形.

$\therefore\ DE=BF.$

$\therefore\ \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}.$

$\therefore\ \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}.$

"平行线分线段成比例定理"是平面几何中的定理，一个自然的想法是，这个定理在空间中也成立吗？请你自己完成这个探究.

实际上，命题的推广可以有不同的方向. 例如，在"平行线分线段成比例定理"中，如果将平行线改为平行平面，也可以探究相应命题是否成立. 请完成下列探究.

探究

如图 1-15，直线 l_1、l_2 被三个平行平面 α、β、γ 所截，直线 l_1 与它们的交点分别为 A、B、C，直线 l_2 与它们的交点分别为 D、E、F. $\dfrac{AB}{BC}$与$\dfrac{DE}{EF}$相等吗？

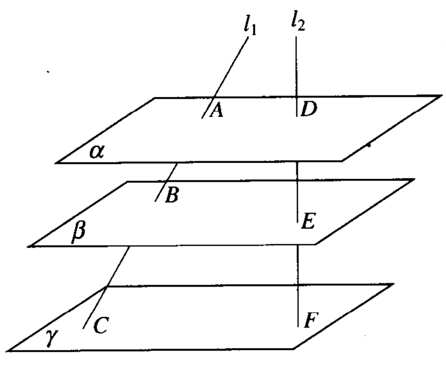


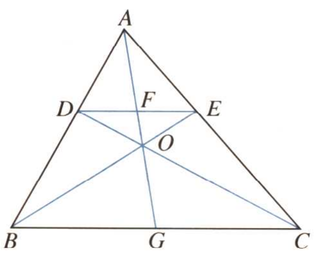
图 1-15

习题1.2

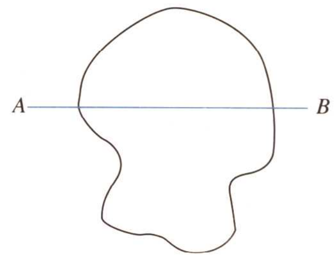
1. 已知 AB、CD 为梯形 $ABCD$ 的底，对角线 AC、BD 的交点为 O，且 $AB=8$，$CD=6$，$BD=15$. 求 OB、OD 的长.

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，作平行于 BC 的直线交 AB 于 D，交 AC 于 E. 如果 BE 和 CD 相交于 O，AO 和 DE 相交于 F，AO 的延长线和 BC 相交于 G. 证明：

   (1) $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DF}{FE}$；　　(2) $BG=GC$.



（第 2 题）



（第 3 题）

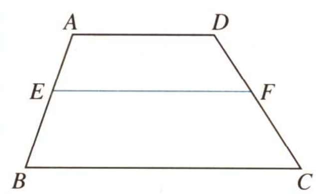
3. 如图，A、B 两点间隔一个湖泊，因而 A、B 两点间的距离无法直接测量. 请你设计一个间接测量 AB 长度的方案，并说明所设计方案的合理性.

4. 如图，梯形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 AB、CD 上，$EF/\!/AD$. 假设 EF 作上下平行移动，

   (1) 如果 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{1}{2}$，求证：$3EF=BC+2AD$；

   (2) 如果 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$，求证：$5EF=2BC+3AD$；

   (3) 请你探究一般结论. 即如果 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{m}{n}$，那么可以得到什么结论.



（第 4 题）

三　相似三角形的判定及性质

1. 相似三角形的判定

先回顾初中已学的相似三角形知识.

定义　对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形. 相似三角形对应边的比值叫做相似比（或相似系数）.

由于从定义出发判断两个三角形是否相似，需要考虑 6 个元素，即三组对应角是否

分别相等，三组对应边是否分别成比例，显然比较麻烦．所以我们曾经给出过如下几个判定两个三角形相似的简单方法：

（1）两角对应相等，两三角形相似；

（2）两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似；

（3）三边对应成比例，两三角形相似．

下面对这些判定方法进行严格证明．

如图 1-16，在△ABC 中，D、E 分别是 AB、AC 边上的点，且 $DE/\!/BC$．由上一节的例 3 可知，△ADE 和△ABC 的三边对应成比例．又由 $DE/\!/BC$ 可得，$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，而$\angle A$ 是公共角，因此△ADE∽△ABC．

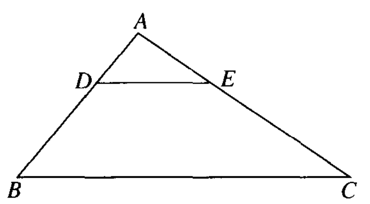


图 1-16

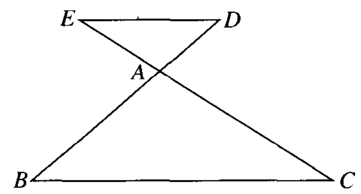


图 1-17

探究

如果 D、E 交于 BA、CA 的延长线上，且 $DE/\!/BC$（图 1-17），那么结论是否还成立？

对于图 1-17 的情形，同样可以证明△ADE∽△ABC．这是判定两个三角形相似的一个定理，我们把它称为预备定理．

预备定理　平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似．

下面从预备定理出发，看看能否得出一些新的结论．

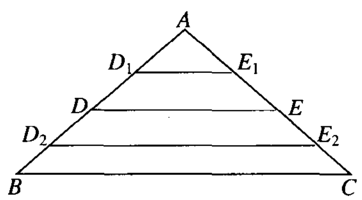


图 1-18

可以发现，只要 $DE/\!/BC$，无论 D、E 在 AB、AC 边上的什么位置，都有△ADE∽△ABC．如图 1-18，如果 $D_iE_i/\!/BC$（$i=1，2，\cdots$），那么也有△ABC∽△AD_iE_i（$i=1，2，\cdots$）．从运动变化的观点看，由于 $DE/\!/BC$，因此在 D、E 的变化过程中，△ADE 的边长在改变，而角的大小始终不变．这说明，只要两个三角形的三个对应角相等，那么它们就相似．又由于三角形的内角和为 180°，所以只要两个