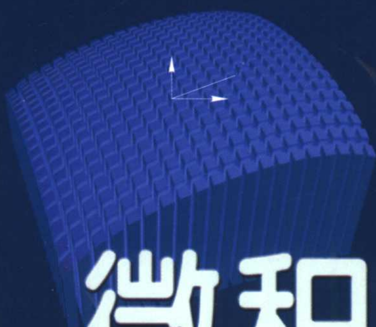
高等职业院校数学系列教材



微积分辅导教程

主编 刘 密 陈祥霞

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

高等职业院校数学系列教材

微积分辅导教程

主编 刘 密 陈祥霞

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导教程/刘密,陈祥霞主编. —杭州:浙江大学出版社,2006.7
ISBN 7-308-04766-0

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘…②陈… Ⅲ.微积分—高等学校:技术学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 061568 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 徐素君
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 浙江大学世纪数码印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 9.5
字　　数 180 千
版 印 次 2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04766-0/O·344
定　　价 13.00 元

高等职业院校数学系列教材编写委员会成员名单

高等职业院校数学系列教材

微积分应用基础	云连英主编	高等教育出版社
工程应用数学	曹勃，云连英主编	高等教育出版社
经济应用数学	汪荣伟主编	高等教育出版社
微积分辅导教程	刘密，陈祥霞主编	浙江大学出版社

前 言

《微积分辅导教程》是高职院校数学系列教材之一《微积分应用基础》(高教版)的配套辅导书。

高职教育培养的是初步掌握高新技术、面向生产和管理第一线的应用性人才,其生源也呈现多元化。高等数学作为高职院校工科类和经管类等专业的公共基础课,它的教学应该“以应用为目的、以必需够用为度”并适应学生的现实基础。基于上述考虑,本书以主教材内容为主线,围绕教材中的基本概念、理论和方法,精心组织典型例题与习题。每章包括教学基本要求、知识结构图、主要解题方法、典型例题分析和习题等内容。全书具有以下特点:

1. 分级编写 本书实行分级编写,以适应高职教学的需求。每章的典型例题和习题均设A、B两级,其中,A级是基础水平的题目,以辅助学生掌握基本概念、基本运算和应用为宗旨;B级题目难度略高,以强化学生的分析解决问题的能力为目标。

2. 突出直观性 在表述形式上,力求简捷直观,以框图的形式给出主要解题方法及各概念、方法间的逻辑关系;在方法的归纳上,言简易记,力求以简洁的口诀表达求解的步骤和方法。

3. 注重举一反三、探索规律 设立“规律与拓展”栏目,注重对典型例题的归纳和拓展,使学生解题时有规律可循。

在本书的编写过程中得到了台州职业技术学院、宁波职业技术学院、浙江警官职业学院和浙江东方职业技术学院等院校的有关领导、老师的支持和指导,在此表示感谢。

本书难免存在缺点和不足,欢迎读者不吝指正。

编 者

2006年2月

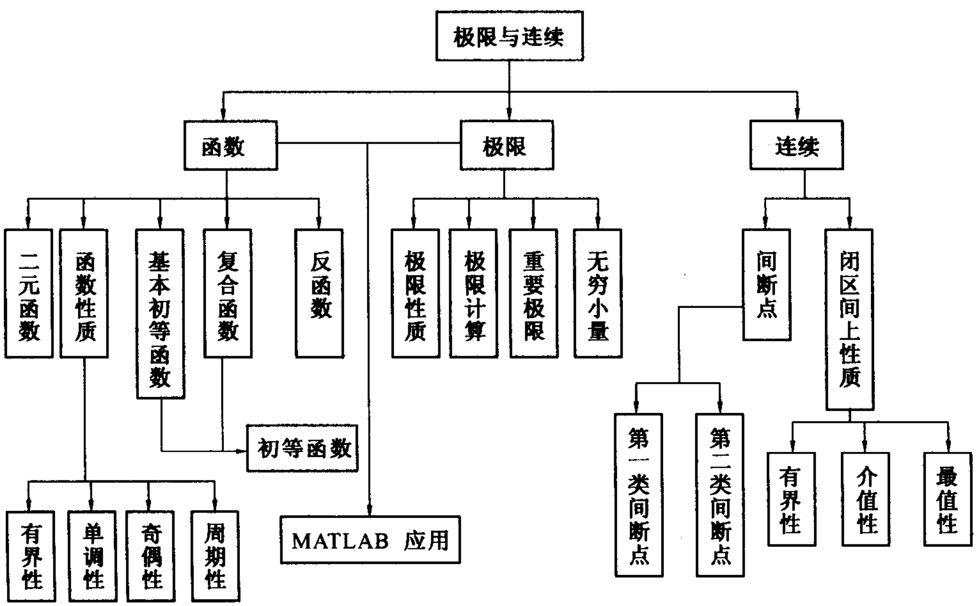
目　　录

第一章　极限与连续

基本要求

- 理解一元函数、二元函数的定义.
- 熟知基本初等函数的图像和性质.
- 理解极限的定义,了解极限存在定理.
- 理解无穷小量和无穷大量的概念,并能利用其简化求极限.
- 熟练掌握求极限的四则运算和两个重要极限.
- 了解闭区间上连续函数的性质,并能简单应用.
- 会用 MATLAB 求极限和作函数的图像.

知识结构图



主要解题方法

一、常用的求极限方法

- 函数求极限
  - 利用极限定义与法则求极限
  - 利用无穷小量求极限
  - 利用两个重要公式求极限
  - 利用函数连续性求极限
  - * 利用洛必达法则求极限
  - 利用 MATLAB 求极限

二、判断函数在该点极限存在的方法

函数在该点极限存在 ⟺ 函数在该点的左右极限存在且相等

函数在该点连续 ⇒ 函数在该点极限存在

三、函数在该点连续的判断方法

- 函数在该点连续必须三条同时成立
  - 函数在该点有定义.
  - 函数在该点的左右极限存在且相等
  - 函数在该点的极限等于在该点的函数值

四、函数在该点间断的判断方法

- 函数在该点间断只要下面有一条不满足即可
  - 函数在该点没有定义 → 间断点类型待定
  - 在该点左右极限存在但不相等 → 第一类间断点
  - 在该点左右极限存在相等但不等于该点函数值 → 第一类间断点
  - 在该点的左右极限至少有一个不存在 → 第二类间断点

典型例题分析

A级

一、函数的两要素（定义域和对应法则）

例1　函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是　　　　（　　）

A. $(-1,+\infty)$　B. $[-1,+\infty)$　C. $[1,+\infty)$　D. $(1,+\infty)$

解　要使函数 y 有意义，则

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-1\geqslant 0 \Rightarrow x>1 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$$

故应选 D.

规律与拓展　已知函数的解析式求定义域，必须掌握基本初等函数的定义域，然后列出不等式组求解. 熟记下述初等函数的定义域：

① 分式中，分母不能为零；

② 偶次根式中，被开方式或数为非负；

③ 对数式中，真数为正，底数大于零且不等于1；

④ 对于 $y=[f(x)]^0$，要求 $f(x)\neq 0$；

⑤ 三角函数、反三角函数各函数本身的有意义范围.

例2　(1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，求 $f(x-5)$ 的定义域.

(2) 已知 $y=f(3^x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求 $y=f(\log_3 x)$ 的定义域.

解　(1) 因 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，所以

$$0\leqslant x-5\leqslant 2$$

则函数 $f(x-5)$ 的定义域为 $\{x|5\leqslant x\leqslant 7\}$.

(2) 令 $t=3^x$，因 $x\in[-1,1]$，所以

$$t\in\left[\frac{1}{3},3\right]$$

所以
$$\frac{1}{3}\leqslant \log_3 x\leqslant 3$$

所以
$$\sqrt[3]{3}\leqslant x\leqslant 27$$

即　函数 $f(\log_3 x)$ 的定义域为 $\{x|\sqrt[3]{3}\leqslant x\leqslant 27\}$.

规律与拓展 求复合函数 $y=f[g(x)]$ 定义域通常是通过换元法，令 $u=g(x)$，通过外层函数的定义域 D_f 与内层函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 的交集非空的关系求解.

例 3 有下列各函数组：① $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；② $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$；③ $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；$f(x)$ 与 $g(x)$ 表示为同一函数的序号为________.

解 ① $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$x\in\mathbf{R}$.

与 $g(x)=x$ 定义域相同，对应法则不同.

② $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)=x$，$x\in\mathbf{R}$.

与 $f(x)=x$ 定义域、对应法则相同.

③ $f(x)=\lg x^2$，定义域为 $x\neq0$.

$g(x)=2\lg x$，定义域为 $x>0$.

定义域不一致.

综上所述，应填②.

规律与拓展 函数二要素为定义域和对应法则，当且仅当两者都一致时，才是同一函数.

例 4 (1) 设 $f(1-x)=2x^2+4x-1$，求 $f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 满足 $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$，求 $f(x)$ 的解析式.

(3) 根据国家发展改革委发改价格[2004]1469 号文《国家发展改革委关于调整浙江省居民生活电价的通知》的规定，从 2004 年 8 月 1 起，浙江省 1300 万户居民将统一按"阶梯式累进电价"支付电费.

一户一表居民用户：月用电量低于 50 千瓦时(含 50 千瓦时)部分不调整，每千瓦时 0.53 元；月用电量在 50 千瓦时至 200 千瓦时(含 200 千瓦时)部分，电价每千瓦时上调 0.03 元，每千瓦时 0.56 元；月用电量超过 200 千瓦时部分，电价每千瓦时上调 0.10 元，每千瓦时 0.63 元.

假定 A 用户为不执行峰谷电价的一户一表用户，单月抄表.

① 试建立月用电量 x 千瓦时与电费 y 元的函数关系式.

② 当抄见总电量为 150 千瓦时，计算该用户本月电费.

(1) **解法一**(换元法) 令 $t=1-x$，得 $x=1-t$

则 $$f(t)=2(1-t)^2+4(1-t)-1=2t^2-8t+5$$

即 $$f(x)=2x^2-8x+5$$

解法二(配方法)　$f(1-x)=2(1-x)^2-8(1-x)+5$

令 $t=1-x$,得

$$f(t)=2t^2-8t+5$$

即
$$f(x)=2x^2-8x+5$$

(2) **解**　因 $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$ ……………………………①

由题知对 $x\neq 0$,①式成立,将 x 换成 $\dfrac{1}{x}$ 得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x} \text{………………………②}$$

由①②消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 得

$$f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{2}{3x}$$

(3) **解**　①
$$f(x)=\begin{cases}0.53x & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 50\times 0.53+(x-50)\times 0.56 & 50<x\leqslant 200\\ 50\times 0.53+150\times 0.56+(x-200)\times 0.63 & x>200\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0.53x & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.56x-1.5 & 50<x\leqslant 200\\ 0.63x-15.5 & x>200\end{cases}$$

② 当 $x=150$ 时,因为 $x\in(50,\ 200]$,所以

$$f(150)=0.56\times 150-1.5=82.5(\text{元})$$

规律与拓展　① 已知 $f[\varphi(x)]$的表达式,求 $f(x)$的表达式,通常方法是换元法.令$t=\varphi(x)$,解出 $x=\varphi^{-1}(t)$,代入化简得.注意换元后确定 t 的取值范围,或用配方法求解.② 求抽象函数表达式,常常由题设条件中,已含有所需函数的隐式,充分利用已知条件,通过变量替换消去其余部分.③ 对于实际应用题函数解析式,要注意实际的函数自变量取值范围,并根据不同的取值范围,求出相应的函数表达式,最后函数表达式要用分段函数统一表示.

例 5　设 $f(x)=2x^2-x+1,g(x)=e^x$,求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=2[g(x)]^2-g(x)+1=2e^{2x}-e^x+1$

$g[f(x)]=e^{f(x)}=e^{2x^2-x+1}$

$f[f(x)]=2[f(x)]^2-f(x)+1=2(2x^2-x+1)^2-(2x^2-x+1)+1$

$\qquad=8x^4-8x^3+8x^2-3x+2$

规律与拓展　函数 $f(x)$中的 x 是代表元,可以用具体的数也可用函数 $g(x)$

替换,要求等号前后中的 x 用同样的数或式来替换.

二、函数的性质

例 6 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{a^{-x}+a^{x}}{2}$ (2) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$ (4) $f(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$

解 (1) 定义域为 $\mathbf{R}$ 关于原点对称,又

$$f(-x)=\frac{a^{-(-x)}+a^{-x}}{2}=f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由 $\frac{1-x}{1+x}>0$,得

$$-1<x<1$$

所以函数定义域关于原点对称. 又

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 函数定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称.

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq f(x)$$

$$f(-x)\neq -f(x)$$

所以 $f(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数.

(4) 因 $x\in\mathbf{R}$,定义域关于原点对称,又

$$f(-x)=0=-f(x)=f(x)$$

所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

规律与拓展 函数的奇偶性的判断:①验证定义域是否关于原点对称,定义域不关于原点对称的函数没有奇偶性;② 第一步成立后,验证 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 或 $-f(x)$ 的关系,由定义加以鉴别和判断;③ 既是奇函数又是偶函数的函数只有一个 $f(x)=0$.

例 7 设 $f(x)=\log_2(1-\sin^2 x)$,则在定义域中下列判断正确的是 ( )

A. 既是奇函数又是周期函数 B. 既是奇函数又是有界函数

C. 既是偶函数又是有界函数 D. 既是偶函数又是周期函数

解 因定义域 $x\in\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},且\ x\in\mathbf{R}\}$ 关于原点对称,

$$f(-x)=\log_2[1-\sin^2(-x)]$$
$$=\log_2(1-\sin^2 x)$$
$$=f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 是偶函数，(A)、(B)错误. 又

$$f(x+\pi)=\log_2(1-\sin^2 x)=f(x)$$

所以 $f(x)$ 是周期函数，π 是它的一个周期.

又在 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)\to-\infty$，所以 $f(x)$ 在定义域中为无界函数.

故选 D.

规律与拓展　① 数学概念就是有效的解题思路，明确各概念的内涵，就能简化解题过程. 所以学习高等数学关键是要理解概念. ② 判断一个概念的不正确性，只要能举一个反例就可. 如判断单调性不成立，从定义出发，找两点不成立就可.

例 8　下列命题中是真命题的序号为________.

(1) 函数 $y=|x|$ 是初等函数.

(2) 函数 $y=\arcsin u, u=x^2+2$ 可以复合成的函数为 $y=\arcsin(x^2+2)$.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$，　$g(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f[g(2)]=4$.

解　(1) $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$

此函数可改写为 $y=\sqrt{x^2}$ 解析式表示，是初等函数，此命题为真命题.

(2) 函数 $y=\arcsin u$ 的定义域 D 为 $[-1, 1]$，函数 $u=x^2+2$ 的值域 R 为 $[2, +\infty)$，则

$$D\cap R=\varnothing$$

由定义知此命题为假命题.

(3) 由 $2>0$ 得 $g(2)=-2<0$，则

$f[g(2)]=4$，此命题为真命题.

所以填(1)(3).

规律与拓展　① 初等函数是由常数、基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次四则运算或有限次复合而成且用一个解析式表示的函数.

② 复合函数要求 $y=f[\varphi(x)]$ 中 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u=\varphi(x)$ 中的值域 R_φ 的交集非空，$y=f[\varphi(x)]$ 复合才有意义.

③ 对复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的求值运算规律是从内层 $\varphi(x)$ 计算，再往外层

$f(x)$进行计算.

三、函数的极限

例 9 求下列各极限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-5n+3}{2n^2-3n+10^5}+\dfrac{1}{2^n}\right)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}[\ln(a+x)-\ln a]$

解 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1-\dfrac{5n}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}}{2-\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{10^5}{n^2}}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^5}{n^2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}$$

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\dfrac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{n}}=1$$

(4) 因为 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0$$

(5) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\left\{\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}\right\}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}$$

规律与拓展

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_{q-1}n+b_q}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & p=q\\ 0 & p<q \quad (p\in\mathbf{N},\ q\in\mathbf{N})\\ \infty & p>q\end{cases}$

这类题可拓展到当 $x\to\infty$ 时,对形如 $\dfrac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_{p-1}x+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_{q-1}x+b_q}$ 分式函数式求极限.

(2) 利用无穷小量运算性质:有限个无穷小量之和、积仍为无穷小量,但无穷个无穷小量的和、积就不能直接用此性质计算,如第 2 小题的计算. 有界量与无穷小量的积为无穷小量,如第 4 小题.

(3) 在某变化过程中,对$\infty-\infty$或$\dfrac{0}{0}$型且含有根式的极限运算,通常是将分子或分母有理化,如第 3 小题的解法可拓展到函数的形式.

(4) 对连续函数求极限可利用函数的连续性$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$,如第 5 小题的求解.

例 10　$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)}{x-3}=-\dfrac{2}{5}$

规律与拓展　就本章而言,对于两个多项式之比当 $x\to x_0$ 时为$\dfrac{0}{0}$型未定式极限,不能用商的极限运算法则进行计算,而应先变形(如因式分解)化为$\dfrac{(x-x_0)^pg(x)}{(x-x_0)^q\varphi(x)}$ $(p\in\mathbf{N},\ q\in\mathbf{N})$,使分子分母消去 $x-x_0$ 因子,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^pg(x)}{(x-x_0)^q\varphi(x)}=\begin{cases}\dfrac{g(x_0)}{\varphi(x_0)} & p=q\\ 0 & p>q\\ \infty & p<q\end{cases}$$

例 11　求极限$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

解　原式$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$