第一篇

教材内容

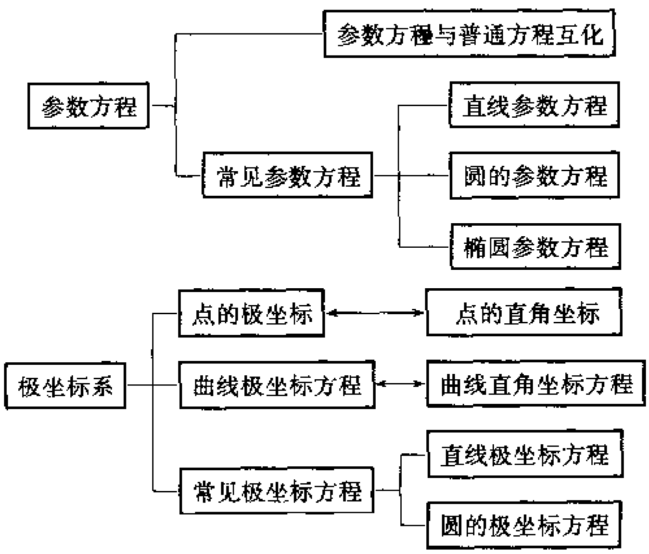
第17章 参数方程、极坐标

第1节 本章综述

一、知识网络

曲线在直角坐标系中，可以以普通方程形式出现，也可以以参数方程形式出现，因此不仅要掌握对普通方程的研究来了解曲线的性质，还要掌握对参数方程的研究，同时还要熟练掌握普通方程与参数方程的互换．在参数方程中尤要注意参数变化的范围，在消去参数后应在普通方程中体现出参数的取值范围．参数方程的一个重要功能是：可在解析几何中拓展为用参数的思想解决一系列问题．

极坐标是解析几何中另一种坐标系，它与直角坐标系最大的区别是：一个点可以有无数个极坐标．在极坐标系中要熟练掌握极坐标系与直角坐标系的互换，特别注意一个特殊点——极点．本章知识网络图如下：



二、重点难点

(1) 重点：理解曲线参数方程的概念，掌握参数方程及直角坐标方程的互化，掌握常见曲线的参数方程，并能利用参数方程解决相关问题. 理解极坐标系及点的极坐标概念，掌握极坐标与直角坐标的互化.

(2) 难点：参数方程与普通方程互化中定义域的确定及利用参数方程解决相关问题. 极坐标系中点的极坐标的确定、互化中的定义域问题和利用极坐标解决相关问题.

三、学习目标

(1) 理解曲线参数方程的概念，掌握参数方程与普通方程的互化.

(2) 掌握常见曲线的参数方程，重点是直线、圆、椭圆，其次是双曲线与抛物线的参数方程.

(3) 能利用参数法解决相关的轨迹问题.

(4) 理解极坐标系及点的极坐标的概念，掌握点的极坐标与点的直角坐标互化.

(5) 掌握曲线的极坐标与曲线直角坐标互化.

第 2 节　学习技能指导

一、典型例题精讲

1. 参数方程

例 1　曲线 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t^2, \\ y = \sqrt{4 - t^2} + 1, \end{cases}$ (t 为参数)的普通方程为________.

【寻找思路】

参数方程化为普通方程要讨论 x, y 的范围，首先确定参数范围. 有些参数方程中给出参数的范围，有些则是从给出的参数方程中确定的. 化为普通方程后是将 x, y 的范围都注上还是只注上一个，注上哪一个，这些都是要注意的.

【问题解答】

$\because 4 - t^2 \geqslant 0$, $\therefore -2 \leqslant t \leqslant 2$.

消去参数得　　$(y-1)^2 + 2(x-1) = 4$,

即　　$(y-1)^2 = -2(x-3)$, $(1 \leqslant y \leqslant 3)$

【评析引申】

参数方程化为普通方程一定要注意定义域问题.

例 2 已知直线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1-t\sin\dfrac{\pi}{6}, \\ y=2+t\cos\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$ (t 为参数)

求直线 L 的倾斜角.

【寻找思路】

要确定直线 L 的倾斜角,要熟悉直线的参数方程或化参数方程为普通方程,可求得倾斜角.

【问题解答】

解法一 ∵ 原方程可化为 $\begin{cases} x=-1+t\cos\dfrac{2}{3}\pi, \\ y=2+t\sin\dfrac{2}{3}\pi. \end{cases}$ (t 为参数)

∴ L 的倾斜角为$\dfrac{2\pi}{3}$.

解法二 ∵ $\dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{-t\cos\dfrac{\pi}{6}}{t\sin\dfrac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}=-\tan\dfrac{\pi}{3}$,

∴ L 的倾斜角为$\dfrac{2}{3}\pi$.

【评析引申】

利用参数方程与普通方程的互化,在普通方程中解决相关问题,不失为解题的一大良策.

例 3 已知在Rt$\triangle ABC$中,斜边 $c=10$,两直角边 a、b 分别为 6 和 8,点 P 是$\triangle ABC$内切圆上的动点,求点 P 到顶点 A、B、C 的距离的平方和的最大值和最小值.

【寻找思路】

建立适当直角坐标系后,可运用圆的参数方程,将此问题转化为三角函数的最值问题.

【问题解答】

以 C 为原点,CA 为 x 轴,CB 为 y 轴,建立直角坐标系,则 $A(8,0)$,$B(0,6)$,$C(0,0)$,$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $r=\dfrac{a+b-c}{2}=2$. 则内切圆方程 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$,

即 $\begin{cases} x=2+2\cos\theta, \\ y=2+2\sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数 $0\leqslant\theta<2\pi$)

∴ $P(2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)$.

$$\begin{aligned} S &= |PA|^2+|PB|^2+|PC|^2 \\ &= (2+2\cos\theta-8)^2+(2+2\sin\theta)^2+(2+2\cos\theta)^2+(2+2\sin\theta-6)^2 \\ &\quad +(2+2\cos\theta)^2+(2+2\sin\theta)^2=80-8\cos\theta, \end{aligned}$$

∴ $S_{\max}=88$,$S_{\min}=72$.

【评析引申】

圆上的动点可用参数形式设出坐标，归结为一个三角式子，运用三角函数的最值求出结果，运算方便简单，相对用代数形式来解，可见优势.

例 4 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$A_1$、$A_2$ 是其长轴两端点，弦 $P_1P_2\perp A_1A_2$，且 A_1P_1，A_2P_2 交于点 M．当 P_1P_2 平行移动时，求点 M 的轨迹方程.

【寻找思路】

用参数交轨法，动点 M 为两直线 A_1P_1 与 A_2P_2 的交点，利用直线 A_1P_1 与 A_2P_2 方程，消去参数即为所求轨迹方程.

【问题解答】

解法一 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$.

设 $P(x_1, y_1)$，$P(x_1, -y_1)$，

则直线 A_1P_1 的方程为 $$y=\frac{y_1}{x_1+a}(x+a) \quad ①$$

直线 A_2P_2 的方程为 $$y=\frac{-y_1}{x_1-a}(x-a) \quad ②$$

$\because$ P_1 在椭圆上，$\therefore$ $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，即

$$y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right) \quad ③$$

①×②得 $$y^2=\frac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}(x^2-a^2) \quad ④$$

把③代入④得 $$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

$\therefore$ M 点的轨迹方程为 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

解法二 设 $P_1(a\cos\theta, b\sin\theta)$，$P_2(a\cos\theta, -b\sin\theta)$，

则直线 A_1P_1 的方程为 $$y=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}(x+a) \quad ①$$

直线 A_2P_2 的方程为 $$y=\frac{-b\sin\theta}{a\cos\theta-a}(x-a) \quad ②$$

①×②得 $$y^2=\frac{-b^2\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta-a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

$\therefore$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

【评析引申】

在解析几何中，任一曲线的普通方程是唯一的，而曲线的参数方程随着参数的不同而不同，但曲线是唯一的.

例 5 过点 $P(-1,\ 0)$，倾斜角是 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与抛物线 $y=x^2$ 的交点是 A 和 B，求 $|PA|+|PB|$ 的值.

【寻找思路】

直线参数方程中的参数 t 对应于有向线段的数量，可考虑运用直线参数方程解.

【问题解答】

设直线参数方程为 $\begin{cases} x=-1+t\cos\frac{\pi}{3}, \\ y=t\sin\frac{\pi}{3}. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=-1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t. \end{cases}$ 代入抛物线方程，得

$\frac{\sqrt{3}}{2}t=\left(-1+\frac{1}{2}t\right)^2$，即 $t^2-(4+2\sqrt{3})t+4=0$,

$\therefore t_1+t_2=4+2\sqrt{3},\ t_1t_2=4$,

$\therefore t_1>0,\ t_2>0$.

$\therefore |PA|+|PB|=t_1+t_2=4+2\sqrt{3}$.

【评析引申】

本题不必求出点 A、B 两点的坐标，即可计算出结果，且运算十分简便，但运用此方法要注意：在直线的参数方程中 t 的系数的平方和必须为 1，否则就不能用上述方法，也不能用上述方法求弦长. 另外必须注意 $t>0$ 的条件，若 $t<0$，则需用 $|t|$ 来计算.

2. 极坐标

例 1 (1) 化下列曲线的直角坐标方程为极坐标方程.

① $x^2+y^2-2ax=0$, ② $x^2+y^2=2\sqrt{x^2+y^2}$.

(2) 化下列曲线的极坐标方程为直角坐标方程.

① $\rho^2=\tan\theta$, ② $\rho\cos 2\theta=1$.

【寻找思路】

互化方程指的是在极点与原点重合、极轴与 x 轴正半轴重合的前提下进行的. 一般只要直接用互化公式 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 及 $x^2+y^2=\rho^2$，但要注意有时互化过程中会乘以 ρ 或除以 ρ，这对方程是否有影响要看 $\rho=0$ 这一特殊情况，此与极点是否在曲线上有关.

【问题解答】

(1) (ⅰ) $\rho^2-2a\rho\cos\theta=0,\ \rho(\rho-2a\cos\theta)=0$,

$\therefore \rho=0$ 或 $\rho-2a\cos\theta=0$.

因 $\rho=0$ 表示极点，而 $\rho-2a\cos\theta=0$ 包含极点 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 即极点 $(0,\ 0)$,

$\therefore \rho-2a\cos\theta=0$.

(ⅱ) $\rho^2=\pm 2\rho$,

$\therefore \rho=0$ 或 $\rho=\pm 2$,

$\rho=2$ 与 $\rho=-2$ 表示同一个圆,

$\therefore \rho=0$ 或 $\rho=2$.

(2) (ⅰ) $\rho^2=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

$\rho^2\cos\theta=\sin\theta$, $\rho=0$ 适合方程，两边乘 ρ 得

$$\rho^2\cdot\rho\cos\theta=\rho\sin\theta,$$

$\therefore (x^2+y^2)x=y$.

(ⅱ) $\rho=0$ 不适合方程，所以方程两边乘 ρ，但 $\rho\neq 0$，

$$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\rho,\ (\rho\neq 0)$$

$\therefore x^2-y^2=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. $(x\neq 0,\ y\neq 0)$

【评析引申】

互化方程首先要注意直角坐标与极坐标的关系，原点必须与极点重合，x 的正半轴必须与极轴重合；其次在方程互化时，特别是在 ρ 是否为零的讨论中，注意题意，既不能重复，也不能遗漏.

例 2 在极坐标系中，若点 $P(\rho,\ \theta)$ 的一个坐标为 $\left(2,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，求以 $\left(\dfrac{\rho}{2},\ \dfrac{\theta}{2}\right)$ 为坐标的不同的点.

【寻找思路】

由于极坐标系中点与其极坐标不是一一对应，即有一个极坐标唯一表示一个点，而一个点可以有无数个极坐标. 不过点的这些极坐标也有其共性，若 ρ 相同则极角终边在从极点出发的同一条射线上；若 ρ 互为相反数，则极角终边也在过极点的直线即以极点为端点的相反方向的两条射线上. 抓住此共性，此题不难解了.

【问题解答】

$P(\rho,\ \theta)$ 的一个坐标是 $\left(2,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$,

$\therefore \rho=\pm 2$.

(ⅰ) $\rho=2$ 时，$\theta=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\dfrac{\theta}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(ⅱ) $\rho=-2$ 时，$\theta=2k\pi+\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\dfrac{\theta}{2}=k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 有四个不同的点，$P_1\left(1,\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$P_2\left(1,\ 2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)$，$P_3\left(-1,\ 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$P_4\left(-1,\ 2k\pi+\dfrac{11\pi}{6}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

【评析引申】

极坐标系中一定要注意，有时点与极坐标并非一一对应，一个点可有无数个极坐标，需注意多个极坐标间关系.

通式为 $(\rho,\ \theta)\Leftrightarrow(\rho,\ 2k\pi+\theta)\Leftrightarrow(-\rho,\ 2k\pi+\pi+\theta)$ $(\rho\geqslant 0,\ k\in\mathbf{Z})$；

$(\rho,\ \theta)$ 与 $(-\rho,\ \theta)$ 关于极点对称；

$(\rho,\ \theta)$与$(\rho,\ -\theta)$关于极轴对称；

$(\rho,\ \theta)$与$(-\rho,\ -\theta)$关于过极点且垂直于极轴的直线对称.

例3 从原点 O 引直线至直线 $2x+4y-1=0$ 于点 M，且 P 为 OM 上一点，已知 $OP\cdot OM=1$，求点 P 的轨迹方程.

【寻找思路】

P，M 在过极点的直线上，易于用极坐标来表示 OP，而直线 $2x+4y-1=0$ 也可用极坐标来表示，从而求出 OM，由 $OP\cdot OM=1$ 得轨迹方程.

【问题解答】

以 O 为极点，OX 为极轴建立直角坐标系，

已知直线为：$2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-1=0$，

设 $P(\rho,\ \theta)$，则 $M(\rho_M,\ \theta)$，

$OP=\rho$，$OM=\rho_M$，$\rho\cdot\rho_M=1$ 即 $\rho_M=\dfrac{1}{\rho}$，

又 M 在直线 $2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-1=0$ 上，

$\therefore\ 2\cdot\dfrac{1}{\rho}\cos\theta+4\cdot\dfrac{1}{\rho}\sin\theta-1=0$，

即
$$2\cos\theta+4\sin\theta=\rho\ (\rho\neq 0).$$

【评析引申】

本题习惯于在直角坐标系中解决，但利用极坐标系来解决显然更简单，且计算量小得多.

例4 过极点作垂直于双曲线 $\rho^2\cos 2\theta=a^2$ 的切线的直线，求垂足轨迹的极坐标方程.

【寻找思路】

本题若直接用极坐标系求方程显然较困难，若转化为直角坐标，在直角坐标系中，求出轨迹方程再转化为极坐标方程，则相对比较容易.

【问题解答】

以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立直角坐标系，双曲线方程化为 $x^2-y^2=a^2$，设$(x_0,\ y_0)$为切点，则切线方程为 $xx_0-yy_0=a^2$，过原点的垂直于切线的直线方程为 $y=-\dfrac{y_0}{x_0}x$，联列得

$$\begin{cases}x_0x-yy_0=a^2,\\ y=-\dfrac{y_0}{x_0}x,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_0=\dfrac{a^2x}{x^2+y^2},\\ y_0=-\dfrac{a^2y}{x^2+y^2}.\end{cases}$$ 又$(x_0,\ y_0)$在双曲线上，

$$\therefore\ \left(+\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right)^2-\left(-\frac{a^2y}{x^2+y^2}\right)^2=a^2,a^2(x^2-y^2)=(x^2+y^2)^2,$$

$\therefore \rho^4 = a^2(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)$,

$\therefore \rho^2 = a^2\cos 2\theta$,

$\therefore$ 所求轨迹为 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$.

【评析引申】

当极坐标系中直接求出轨迹有困难时，一般可将极坐标系转化为直角坐标系，求出直角坐标中的轨迹方程后，再化为极坐标方程.

二、易出错误诊断

例 1 点 $\left(1-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 是否在曲线 $\rho = \frac{1}{1-2\cos\theta}$ $(\rho \in \mathbf{R})$ 上?

【错误解法】

$\because \left(1-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 代入方程不成立,

$\therefore \left(1-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 不在曲线上.

【原因分析】

在极坐标系下，同一点有多种极坐标，一般是极径不变，变极角，或极角、极径都变.

【正确思路】

点 $\left(1-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的另一极坐标为 $\left(\sqrt{2}-1, \frac{5\pi}{4}\right)$,

$\left(\sqrt{2}-1, \frac{5\pi}{4}\right)$ 代入曲线方程成立,

$\therefore$ 点 $\left(1-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 在曲线 $\rho = \frac{1}{1-2\cos\theta}$ $(\rho \in \mathbf{R})$ 上.

例 2 已知 $\rho = \frac{8}{1-\cos\theta}$，求焦点弦的中点的轨迹方程. $\left(\rho = \frac{8}{1-\cos\theta}\right.$ 是焦点在极点的抛物线$\left.\right)$

【错误解法】

设 AB 为焦点弦 $A(\rho_1, \theta)$, $B(\rho_2, \theta+\pi)$,

AB 的中点 $M\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}, \theta\right)$, $\rho_1 = \frac{8}{1-\cos\theta}$, $\rho_2 = \frac{8}{1+\cos\theta}$,

即焦点弦的中点的轨迹 $\rho = \frac{8}{1-\cos^2\theta}$.

【原因分析】

在直角坐标系中 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB 的中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，这个公式不能类比到极坐标系下，设 $A(\rho_1, \theta)$, $B(\rho_2, \theta+\pi)$ 中，ρ_1、ρ_2 均为大于 0 的线段长度，不是坐标.

【正确思路】

设 $A(\rho_1, \theta)$, $B(\rho_2, \theta+\pi)$, $M\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2}, \theta\right)$,

$\therefore \rho=\frac{8\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$ 为焦点弦中点轨迹.

例 3　化参数方程 $\begin{cases}x=t+\frac{1}{t-1},\\ y=2\end{cases}$ 为普通方程.

【错误解法】

普通方程 $y=2$.

【原因分析】

参数方程化为普通方程过程中，一定要注意定义域问题.

【正确思路】

(1) $t-1>0$ 即 $t>1$,

$$x=t+\frac{1}{t-1}=t-1+\frac{1}{t-1}+1\geqslant 3.$$

(2) $t-1<0$ 即 $t<1$,

$$x=t+\frac{1}{t-1}=t-1+\frac{1}{t-1}+1\leqslant -2+1=-1.$$

$\therefore$ 普通方程为 $y=2$ ($x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$), 为两条射线.

三、问题探究与能力拓展

数学沿着自己的道路而无拘无束地前进着，这并不是因为它有什么不受法律约束之类的种种许可证，而是因为数学本来就具有一种由其本性所决定的、并且与其存在相符合的自由.

——赫尔曼·汉克尔(Hermann Hankel, 1839—1873,德国数学家)

数学是科学的大门钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的. 更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施.

——罗吉尔·培根(Roger Bacon)

例 1　(2003 年全国高考题)　已知常数 $a>0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, O 为 AB 中点，点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 交点，问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离之和为定值? 若存在，求出这两点坐标及此定值；若不存在，请说明理由.

【思考与探究】

本题融合了坐标法、直线方程、参数法求轨迹，椭圆定义及基本方法，以及综合运用数学知识的能力，选择参数法先求点 P 的轨迹，再运用椭圆定义及方程，求出符合条件的 P 点.

【问题解答】

解法一　如图 17 - 1 所示.

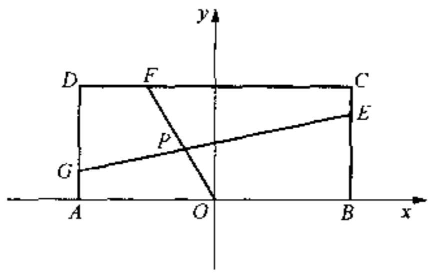


图 17 - 1

设 $E(2,\ t)$，$C(2,\ 4a)$，

$\therefore ABCD$ 为矩形，$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{DG}{DA}$，

$\therefore G(-2,\ 4a-t)$，

又$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}$，

$\therefore F\left(2-\dfrac{t}{a},\ 4a\right)$，

直线 EG：
$$y-t=\frac{2t-4a}{4}(x-2), \qquad ①$$

直线 OF：
$$y=\frac{4a^2}{2a-t}x, \qquad ②$$

由①、②消去参数 t 得　$2a^2x^2+y^2-2ay=0$，

整理得
$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1,$$

(1) 当 $a^2=\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 轨迹为圆弧，不符合题意；

(2) 当 $a^2<\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 轨迹为椭圆一段弧，故点 P 到椭圆两焦点 $\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2},\ a\right)$，$\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2},\ a\right)$ 的距离之和为定长$\sqrt{2}$；

(3) 当 $a^2>\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 到 $\left(0,\ a-\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2}\right)$，$\left(0,\ a+\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2}\right)$ 的距离之和为定长 $2a$.

解法二　由题意 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$C(2,\ 4a)$，$D(-2,\ 4a)$，

设 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}=k\ (0\leqslant k\leqslant 1)$，

则 $E(2,\ 4ak)$，$F(2-4k,\ 4a)$，$G(2,\ 4a)$，

直线 OF：
$$2ax+(2k-1)y=0, \qquad ①$$

直线 GE：
$$-a(2k-1)x+y-2a=0, \qquad ②$$

由①，②消去参数 k，得
$$2a^2x^2+y^2-2ay=0.$$

以下同解法一.

【评析引申】

本题首先是选择适合的参数. 参变量的消去要有整体意识，其次对字母系数取值需进

行合理的分类讨论.

例 2 F 是定点,l 是定直线,点 F 到直线 l 的距离为 p ($p>0$),点 M 在直线 l 上滑动,动点 N 在 MF 的延长线上且满足 $\left|\dfrac{FN}{MN}\right|=\dfrac{1}{|MF|}$.

(1) 求动点 P 的轨迹;

(2) 求 $|MN|$ 的最小值.

【思考与探究】

在所求轨迹中,涉及有关动点与某一定点(可取作极点)的距离,或动点与定点的连线与以这定点为端点的某射线(可取作数轴)的夹角,或到定点与定直线有关距离问题常可建立极坐标系来解决.

【问题解答】

(1) 如图 17-2 建立极坐标系:

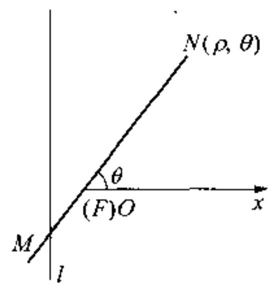


图 17-2

$N(\rho,\theta)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$|MF|=\dfrac{p}{\cos\theta}$, $|FN|=\rho$,

$|MN|=\dfrac{p}{\cos\theta}+\rho$,

由 $\left|\dfrac{FN}{MN}\right|=\dfrac{1}{|MF|}$,

得 $$\frac{\rho}{\dfrac{p}{\cos\theta}+\rho}=\frac{1}{\dfrac{p}{\cos\theta}},$$

即 $$\frac{p}{\cos\theta}+\rho=\frac{p}{\cos\theta}\rho,$$

$$\therefore \rho=\frac{1}{1-\dfrac{1}{p}\cos\theta}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

(2) $$|MN|=\frac{p}{\cos\theta}+\rho=\frac{p}{\cos\theta}+\frac{1}{1-\dfrac{1}{p}\cos\theta}$$

$$=\frac{p}{\cos\theta}+\frac{p}{p-\cos\theta}=\frac{p^2}{\cos\theta(p-\cos\theta)}$$

$$=\frac{p^2}{-\left(\cos\theta-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{4}},$$

$0<p\leqslant 2$, $\cos\theta=\dfrac{p}{2}$, $|MN|_{\min}=4$;

$p>2$, $\cos\theta=1$, $|MN|_{\min}=\dfrac{p^2}{p-1}$.

第3节 综合练习

一、填空题

1. 曲线的参数方程$\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{t},\\ y=1-t^2,\end{cases}$($t$为参数,$t\neq0$)化为普通方程是__________.

2. 以直角坐标系的原点为极点,x轴正半轴为极轴建立极坐标系,若椭圆两焦点极坐标分别为$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\left(1,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,长轴长为4,则此椭圆直角坐标方程为__________.

3. 二次曲线$\begin{cases}x=5\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$的左焦点的坐标是__________.

4. 以极坐标系中的点(1, 1)为圆心、1为半径的圆方程为__________.

5. 直线$\begin{cases}x=3+2t,\\ y=1-5t,\end{cases}$($t$为参数)则直线的倾斜角为__________.

6. 已知两直线分别为$\rho\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=1$,$\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=1$,则两直线位置关系是________.

7. 直线$\begin{cases}x=-2-\sqrt{2}t,\\ y=3-\sqrt{2t},\end{cases}$($t$为参数)上的点到点$A(-2, 3)$的距离等于$\sqrt{2}$的点的坐标为__________.

8. 在极坐标系中,过点$P(1, \pi)$且垂直于极轴的直线方程为__________.

9. 在极坐标系中点$P\left(2,\dfrac{11\pi}{6}\right)$到直线$\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$的距离是__________.

10. 在极坐标系中,过点$P\left(9,\dfrac{2\pi}{3}\right)$作与圆$\rho+2\cos\theta=0$的切线的直线恰好与极轴所在直线垂直,则$\rho=$__________.

11. 极坐标方程$\rho=4\tan\theta\cdot\sec\theta$所表示的曲线的焦点坐标是__________.

12. 已知直线l_1的参数方程是$\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t-1,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}t-1,\end{cases}$($t$为参数)直线$l_2$的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,则$l_1$与$l_2$的夹角为__________.

二、选择题

13. 直线极坐标系中$\begin{cases}x=-1-2t,\\ y=2-4t,\end{cases}$($t$为参数)的倾斜角为( ).

A. $\arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ B. $\arctan(-2)$ C. $\pi-\arctan\dfrac{1}{2}$ D. $\pi-\arctan 2$

14. 方程 $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t}, \\ y = 1, \end{cases}$ (t 为参数)所表示的曲线是(　　).

A. 直线　　B. 两条射线　　C. 线段　　D. 圆

15. 椭圆 $\begin{cases} x = -2 + 3\cos\theta \\ y = 1 + 4\sin\theta \end{cases}$, ($\theta$ 为参数)的焦距为(　　).

A. $2\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. 5　　D. 10

16. 直线 $\theta = \alpha$ 和直线 $\rho\sin(\theta - \alpha) = 1$ 的位置关系是(　　).

A. 垂直　　B. 平行　　C. 相交但不垂直　　D. 重合

三、解答题

17. 已知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，能否在 y 轴左侧的半个椭圆上求一点 M，使点 M 到直线 $x = -4$ 的距离 $|MQ|$ 为 M 到两个焦点 F_1, F_2 的距离的等比中项？若能，求出点 M 坐标；若不能，说明理由.

18. 设点 A 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 上任一点，点 B 为圆 $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上任一点，求 $|AB|$ 的最大值和最小值.

19. 已知 A、B 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上两运动点，且 $OA \perp OB$，过点 O 作 AB 的垂线与 AB 交于点 P，求点 P 的轨迹.

20. $\triangle ABC$ 的两个顶点 A、B 是曲线 $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$ 的两个焦点，点 C 在抛物线 $x = y^2 + 1$ 上移动，求 $\triangle ABC$ 的垂心的轨迹方程.

21. 过点 $M(p, 0)$ 作任一直线 L 交抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 于 A、B 两点，求证 $\dfrac{1}{|MA|^2} + \dfrac{1}{|MB|^2}$ 为定值.

22. 已知方程 $y^2 - 2x - 6y\sin\theta - 9\cos^2\theta + 8\cos\theta + 9 = 0$,

(1) 证明不论 θ 如何变化，方程都表示顶点在同一椭圆上的抛物线，并求这个椭圆方程.

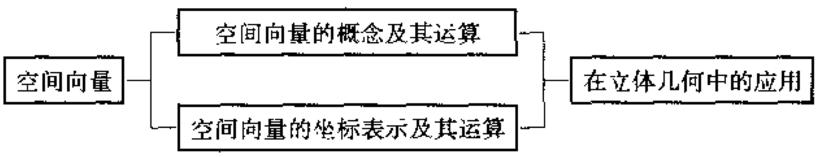
(2) 问 θ 为何值时，抛物线在直线 $x = 14$ 上截得的弦最大？并求此弦长.

第18章
空间向量及其应用

第1节　本章综述

一、知识网络

本章主要介绍空间向量的概念及其运算，并详细叙述了如何用空间向量的相关知识处理立体几何问题，为学生解题提供一个新视角. 在空间特别是空间直角坐标系中引入空间向量，可以为解决三维图形的形状、大小及位置关系等几何问题增加一种理想的代数工具，从而提高学生的空间想象能力和学习效率. 本章知识网络图如下：



二、重点难点

在本章的学习过程中，要求学生在学习平面向量的基础上，把平面向量及其运算推广到空间，并能熟练运用空间向量的相关知识解决立体几何中的某些证明及计算问题，体会向量方法在研究几何图形中的作用，进一步发展空间想象能力和逻辑思维能力. 本章的重点是掌握空间向量的相关概念和运算，熟练掌握使用向量方法解立体几何中有关夹角和距离问题的技能技巧. 难点是如何建立适当的空间直角坐标系，灵活运用向量的方法解决实际问题.

三、学习目标

(1) 把平面向量的相关概念及其运算推广到空间，并理解其意义. 掌握空间向量的线性

运算和数量积;领悟类比和推广的数学思维方法.

(2) 引进基向量,理解空间向量的分解定理.懂得用三个不共面向量的线性组合可以把空间任一向量表示出来.

(3) 建立空间直角坐标系,会用坐标表示空间向量,会把空间向量的运算化为坐标运算.

(4) 掌握直线的平行向量与平面的法向量的概念.会用向量方法证明简单空间图形中线线、线面、面面平行与垂直,以及一些简单的几何证明问题,领会转化思想.

(5) 能利用空间坐标系与向量的有关概念和向量的坐标运算进行立体几何中有关夹角和距离的计算,体会向量方法在研究几何问题中的作用,熟练掌握使用向量方法解立体几何问题的技能技巧.

第2节 学习技能指导

一、典型例题题讲

1. 空间向量的概念及其运算

空间向量的模、零向量、单位向量、相等的向量、一个向量的负向量、向量的夹角等概念,空间向量的和、差、数乘、数量积等运算的定义及其运算律都与同一平面上的向量的相应概念、运算及其运算律具有相同的定义.

例1 如图18-1,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,点 M 是棱 AA_1 的中点,点 G 在对角线 A_1C 上且 $CG:GA_1=2:1$,设 $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1}=\vec{c}$,试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{MG}$.

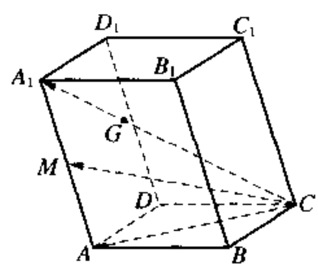


图18-1

【寻找思路】

只需结合图形,根据平行六面体的相关性质,并充分运用空间向量的加减法和数乘运算即可.

【问题解答】

解:$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}$;

$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC_1}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA_1}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$;

$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$.

【评析引申】

用几个向量表示另外的向量是空间向量中很有用的基础,必须要掌握.

例2 已知空间三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$,若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直,$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角都为 $60°$,且 $|\vec{a}|$