地形測量經驗小叢書

第七集

測角交会点的計算方法

測繪出版社

地形測量經驗小叢書
第七集
測角交会点的計算方法

編　者　測繪出版社
出版者　測繪出版社
北京宣武門外永光寺西街3号
北京市書刊出版業營業許可証出字第081号
發行者　新华書店
印刷者　崇文印刷厂

印數（京）1—3,500册　1959年4月北京第1版
开本 31″×43″ 1/32　1959年4月第1次印刷
字数 40000　印張 $2\frac{1}{8}$
定价（8）0.22元　統一書号：T15039 242

編者的話

测角交会法是加密圖根点的一点主要方法，在地形测量中广泛地使用着，同时經常地改进着。本書匯編了测角交会点的几种計算方法，其中有交会定位法的發展应用，有前后方交会用对數和計算机的計算方法介紹，同时有双点法的簡捷計算介紹。

在大跃进中，为便于地形测量人員文化革命、技术革命的学習和参考，这先將已有的测角交会点計算方法的文献編匯成册。同时为了便于及时交流經驗，随着大跃进形势的發展，本社將进一步出版該方面先进經驗和革新成就。

目　　录

地形测量中后方交会定位法的發展应用

張 德 本

（八一农学院水利系）

測量工作是工程建設中的第一步基本工作，为了配合祖国的大規模建設工作起見，必須將測量上原来采用的各种方法逐步加以改进，才能达到提高工作效率和提前完成任务的目的。尽管本文所述的改进方法，还是不够完善，我仍把它介紹出来，請大家指正。

測量上一般所采用的后方交会定点法是由三个已知点測定一个所求点。現在我想由三个已知点利用后方交会法測定多个所求点(所求点的多少，視測区的具体情况而决定)，在每一所求点的測站上只观測三个方向，得出兩个夾角。虽然是由三个已知点来測定多个所求点的位置，但在每一所求点的測站上，只須通視一个或兩个已知点就可以解决問題。（首末兩个所求点均須通視兩个已知点）这种方法是根据后方交会定点法的理論导出的，既可以解决測区中某一所求点不能同时看到三个已知点的困难，又可以縮短观測的时間，并可以配合实际的需要同次測設若干个所求点，而在計算工作中更可以縮短几倍的时間。

一、应用范圍

凡測区佈有三角点的地区，只要能通視三个已知三角点，或者在某一方只能通視三个已知三角点当中的第一点及

第二点，而在另一方只能通视第二点及第三点时，都可以采用此法。特别是在起伏地区测繪小比例尺的地形圖时，量导綫边不方便之处，应用此法测定多个所求点当作导綫点应用，更为适宜。

二、公式推演

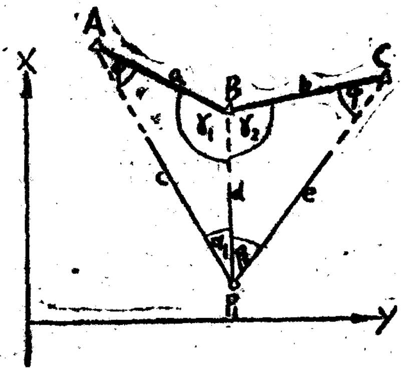

圖 1

由下列的各个圖形中，可以看出每个所求点都必須与三个已知点中的中間点B通視。至于已知点A及C两点，只須分別与第一个及末一个所求点通視即可。在圖2与圖3中除了第一个及末一个三角形之外，其余的三角形均有两个观测角(α和β)。

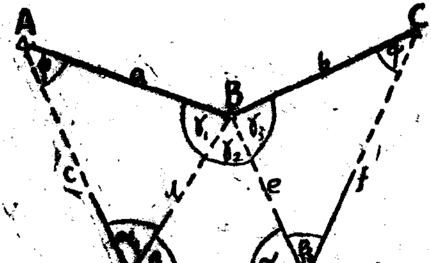

圖 2

因而除了第一个及末一个三角形不能間接的推算出三角形三內角之值外，至其他各三角形都可以分别的推算其三內角之值。因此在第一个及末一个三角形中，均須再求出其中的一

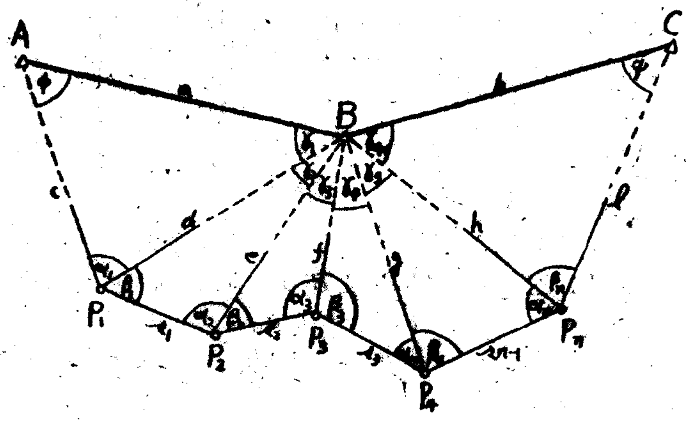

圖 3

个角值 φ 与 ψ，才可以解决其三內角之值，这也就是要推演下面公式的目的。

設已知三个三角点的坐标为：

$$A(X_A,Y_A),\ B(X_B,Y_B),\ C(X_C,Y_C).$$

观測角值为：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n;$$

所求点为：

$$P_1,P_2,\cdots,P_n;$$

式中 n 代表所求点之数目。

根據已知点 A,B 及 C 之坐标，可以求出方位角(AB)与

(CB)，以及边長 AB 与 BC。其計算式如下:

$$\left.\begin{aligned}\tan(AB)&=(Y_B-Y_A)/(X_B-X_A),\\ \tan(CB)&=(Y_B-Y_C)/(X_B-X_C);\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}AB=a&=(Y_B-Y_A)/\sin(AB)=\\ &=(X_B-X_A)/\cos(AB),\\ BC=b&=(Y_B-Y_C)/\sin(CB)=\\ &=(X_B-X_C)/\cos(CB).\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

同时又可以計算出 γ 角之总値为:

$$(BA)-(BC)=(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{n+1}). \quad (C)$$

依圖 1 之三角形 ABP_1 及 BCP_1 中，根据正弦定律得:

$$d=\frac{a\cdot\sin\varphi}{\sin\alpha_1}=\frac{b\cdot\sin\psi}{\sin\beta_1}, \quad (1)$$

或

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{b\cdot\sin\alpha_1}{a\cdot\sin\beta_1}. \quad (2)$$

令

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{b\cdot\sin\alpha_1}{a\cdot\sin\beta_1}=\cot\lambda, \quad (3)$$

則

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{1}{\tan\lambda},\quad \frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi}=\frac{1-\tan\lambda}{1+\tan\lambda},$$

$$\frac{2\cdot\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdot\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{2\cdot\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdot\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}=\frac{1-\tan45^\circ\cdot\tan\lambda}{\tan45^\circ+\tan\lambda},$$

$$\tan\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdot\cot\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=\cot(45^\circ+\lambda),$$

即

$$\tan\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=\tan\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cdot\cot(45^\circ+\lambda). \quad (4)$$

根据公式(3)与(4)，以及$(\varphi+\psi)=360^\circ-[(BA)-(BC)+\alpha_1+\beta_1]$的关系，就可以求出$\varphi$及$\psi$之角值，这是一般后方交会定点法中求$\varphi$与$\psi$的方法。

依圖2之三角形ABP_1及BQ_1P_2中：

$$d=\frac{a\cdot\sin\varphi}{\sin\alpha_1}=\frac{e\cdot\sin\alpha_2}{\sin\beta_1}, \quad (5)$$

或

$$\sin\varphi=\frac{e\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{a\cdot\sin\beta_1}. \quad (6)$$

在三角形BCP_2中：

$$e=\frac{b\cdot\sin\psi}{\sin\beta_2}. \quad (7)$$

以(7)式之e值代入(6)式中，得：

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{b\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{a\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2}. \quad (8)$$

如同(3)式，可設

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{b\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{a\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2}=\cot\lambda. \quad (9)$$

同理，按圖3，可設：

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{b\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_3\cdots\sin\alpha_n}{a\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\beta_3\cdots\sin\beta_n}=\cot\lambda. \quad (10)$$

由上面$\cot\lambda$的公式(3)，(9)及(10)中，得出一个規則：凡是所求点数有若干个，則公式右边的分子是用已知边b乘若干个α_i角度的正弦值，分母用已知边a乘若干个β_i角

度的正弦值。这样就可以解出 $\cot\lambda$ 的角值。

另外 $(\varphi+\psi)$ 的角值，也可以得出一个规则，例如：

若求一个所求点 P_1 时，则

$$\varphi+\psi=360^\circ-[(BA)-(BC)+\alpha_1+\beta_1];$$

若求二个所求点 P_1 及 P_2 时，则

$$\varphi+\psi=540^\circ-[(BA)-(BC)+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2];$$

若求 n 个所求点 P_1，P_2，…，P_n 时，则 $\varphi+\psi=(n+1)\cdot180^\circ-[(BA)-(BC)+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n]$.

根据以上的公式及規則，可以总結出由所設的輔助角 λ 去推算 φ 及 ψ 的角値的一般公式：

$$\varphi+\psi=(n+1)\cdot180^\circ-[(BA)-(BC)+\alpha_1+\alpha_2+$$
$$+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n], \qquad \text{(D)}$$

$$\cot\lambda\left(=\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)=\frac{b\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_n}{a\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2\cdots\sin\beta_n}, \qquad \text{(E)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=\tan\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cdot\cot(45^\circ+\lambda). \qquad \text{(F)}$$

三、坐标計算步驟

（1）由 A, B 及 C 三已知点之坐标，計算方位角 (AB), (BA), (BC) 及 (CB) 之値，并計算 AB 及 BC 間之边長 a 和 b 之値[見公式(A)及(B)]。

（2）由方位角 $(BA)-(BC)$，[或 $(AB)-(CB)=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{n+1}$]，計算出 $(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{n+1})$ 的总角値[見公式(C)]，并由公式 (D) 計算出 $(\varphi+\psi)$ 之値。

（3）由公式(E)算出 λ 角值，然后代入公式(F)得出 $(\varphi-\psi)$ 之值。計算时 $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ 恒取銳角（正或負）。

（4）由公式(D)及(F)之結果，解得 φ 及 ψ 之角值。

（5）依正弦定律由已知边 $AB=a$（或 $BC=b$）推算各三角形之边長，并注意边長閉塞校驗。

（6）由圖3中三角形 ABP_1（或三角形 BCP_n）起，依次应用下列公式之原則計算各所求点之坐标。例如求 P_1 点之坐标，則

$$Y_{P_1}=Y_A+c\cdot\sin(AP_1),$$
$$Y_{P_1}=Y_B+d\cdot\sin(BP_1),$$
$$X_{P_1}=X_A+c\cdot\cos(AP_1),$$
$$X_{P_1}=X_B+d\cdot\cos(BP_1),$$

式中
$$(AP_1)=(AB)+\varphi,$$
$$(BP_1)=(BA)-\gamma_1.$$

求 P_2 点之坐标，則

$$Y_{P_2}=Y_{P_1}+s_1\cdot\sin(P_1P_2),$$
$$Y_{P_2}=Y_B+e\cdot\sin(BP_2),$$
$$X_{P_2}=X_{P_1}+s_1\cdot\cos(P_1P_2),$$
$$X_{P_2}=X_B+e\cdot\cos(BP_2);$$

式中
$$(P_1P_2)=(P_1B)+\beta_1,$$
$$(BP_2)=(BP_1)-\gamma_2.$$

至其余各点之坐标，可依此类推計算之。惟任何所求点之坐标，必須依次由兩已知点之坐标推算，以便校驗是否發生計算上的錯誤，最后也須注意坐标校驗。

四、算　例

下面的計算表格中，所排列的次序不一定完善，仅供参考。表格中分别繪有粗綫条者，系表明分組的情况，在每一粗綫框內左上角所註罗馬数字是表示計算之先后次序。

五、附　言

这种后方交会定点法的应用，須注意所求点之位置，应結合測区地形的具体情况，尽可能使其佈置适宜，以免 γ 角度过小而影响精度。

（轉載"測繪通报"1956年第5期）

原編者按：作者在本文中所建議的方法，虽可节省許多观測和計算时間，但它能达到何种精度以及如何發現和改正观測中的过大誤差甚至規差等并未提及，所以仍有商榷的必要。

对"地形測量中后方交会定位法的發展应用"一文的补充意見

熊駿卿　　張克勤

（黃河水利委員会地形第一測量队，成都城市建設委員会測量队）

張德本同志在本刊二卷五期上所介紹的方法，可以免去"量导边不方便之处"，确是一个优点。該文的理論在数学上是合理的，但在測量上就有些不合理。因为 φ 和 ψ 是 α 与 β 的函数，而观測值 α 与 β 本身含有誤差，因此算得的 φ 与 ψ 必非理論所要求的 φ 与 ψ， 由此而間接算出的 γ 和 P 点坐

标也不可能是測量上的理想数据。

普通的后方交会定点，只需在新点上观測三个已知点的方向即可定位，但因沒有校对条件，更沒有平差条件（虽然应用到測圖上不一定需要平差条件），因此也只能达到定位而已。如果照准錯了一个已知点或者万一抄錯了一个原始数据，仍可由 α 和 β 算出一个新点 P 的位置，但它并不是 P 的实在位置。所以在后方交会定点时需要观測四个已知点方向，利用其中的三个点以計算新点坐标，再按第四个点和新点坐标来反算方向以檢查方位角。

按照張德本同志的方法，許多交会点 P_1 P_2……是根据三个已知点和一系列的观測值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\beta_1\beta_2,\cdots\cdots$ 来确定的；观測值中有一个錯了（虽然測錯的可能性不多，但方向較多时很可能發生錯誤的），整个圖形就变成另一个样子，而在計算中也不可能發現这种錯誤，其后果是不堪設想的。

为了补救这种缺点，只有增加观測，其法有三：

1. φ 与 ψ 中任选一角加以观測，用来和算得的 φ 或 ψ 校对；根据測圖要求訂出限差。但此法不能进行平差。

2. 在某一新点上，观測一、二个其他已知点，算出新点坐标后反算其方向以校对夾角。但此法也不能进行平差，發現問題較晚。

3. 观測 φ 与 ψ 兩个角，構成一个多边形（$\alpha_i,\beta_i,\varphi,\psi$ 为观測値，$\angle CBA$ 系根据原始数据算出）。这样就可以进行平差，而且节約了計算 φ 与 ψ 的时間。不过要多跑兩个較远的点进行观測，这样，以按照原始数据算出的 $\angle CBA$ 和按照观測値 $\varphi,\psi,\alpha,\beta$ 算出的 γ 相比較，可以判別观測値閉塞

情况。所有閉塞差可平均分配于各三角形的 α 与 β 內。

至于誤差大小，因为閉塞差是按导綫方法算出的，所以应該符合于某一等級的导綫限差的要求。

（轉載“測繪通报”1957年第2期）

利用計算机进行前方和后方交会計算*

张才良譯

一、用方向角进行前方交会

A.用簡單的計算机計算

前方交会的起始值系应用已知点 A 与 B 的坐标以及該兩已知点对新点 N 的方向角，或傾斜角。

1.已知点的坐标必須位于第一象限內，也就是說數值前面的符号必須是正(+)的，否則要平行移动。例如：移动系數在 X 方向上 $=10\,000$，Y 方向上 $=10\,000$，

$$\begin{array}{llll} x_a=-400, & y_a=-400, & x_b=+200, & y_b=-6\,000 \\ \underline{+10\,000,} & \underline{+10\,000,} & \underline{+10\,000,} & \underline{+10\,000,} \end{array}$$

则 $x_a=+9\,600$，$y_a=+9\,600$，$x_b=+10\,200$，$y_b=+9\,400$

平行移动要达到使新点也位于第一象限內为止。在計算之后，从算出来的結果中減去移动系數，即得新点的坐标。

2.計算傾斜角或方向角 φ 与 ψ。

(1)計算从 A 到 B 的綫段方向角。

$$\operatorname{tg}(AB)=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}=\operatorname{tg}V_A^B$$

---

* 原文是民主德國測繪專家霍夫曼(Hoffmann)由德寄來的。

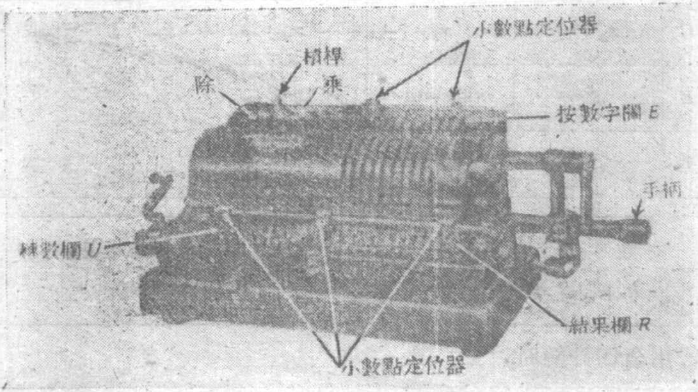

圖 1

(2)从三角自然函数表內查出方向角的角度。

(3)計算方向角 φ(新点位于 AB 綫的右边,見上圖)。

$$\varphi=V_A^B+\alpha$$

(4)計算从 B 到 A 綫段的方向角。

$$(BA)=V_A^B\pm 200\,g \text{ 或 } V_A^B\pm 180^\circ$$

(5)計算方向角 ψ。

$$\psi=V-\beta_B^A-\beta$$

(6)从三角自然函数表內查出方向角 φ 与 ψ 的正切函数,并將函数值記入表格內,若方向角之一接近于90°或100g,則不查兩角之正切而查其余切,計算时將 x 換以 y。

3.前方交会的計算。

計算时按照下列的公式进行:

$$y_b=y_a+(x_b-x_a)\operatorname{tg}\varphi+(x_n-x_b)(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\psi)$$

$$y_n=y_n-(x_b-x_n)\operatorname{tg}\psi$$

若用正切計算时,則計算規則的表式如下:

U	x_a ～～～	-·- x_b -·-·	-·- x_n ～～～	～～ x_b	U=轉数器
E	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\psi$	$\operatorname{tg}\psi$		E=置数器
R	y_a -·-·-	-·- y_h ～～～	～～～ y_b -·-·	-·- y_n	R=得数器

x_a 变为 x_h 則在 R 上得出 y_h	將 y_h 变为 y_b 則在 U 上得出 x_n	x_n 变为 x_b 則在 R 上得出 y_n

若用余切計算时，則：

U	y_a ～～～	～～～ y_b -·-·	--- y_n ～～～	～～～ y_b
E	$\cot\varphi$	$\cot\psi-\cot\psi$	$\cot\psi$	
R	x_a -·-·-	-·-·- x_h ～～～	～～～ x_b -·-	-·- x_n

y_a 变成 y_b 則在 R 上得出 x_h	x_b 变为 x_b 則在 U 上得 y_n	y_n 变为 y_b 則在 R 上得出 x_a

計算的过程如下：

1.將 y_a 撥在 E 上并搖动手柄傳至 R 上。如果可以直接撥在 R 上，那么就無需通过 E 来搖了。

2.去掉 E 上的 y_a，当 E 上都是 0 时，轉动手柄，使 U 上数値等于 x_a。

3.把 $\operatorname{tg}\varphi$ 撥在 E 上。

4.若 $\operatorname{tg}\varphi$ 是正的，則須將橫桿撥到 × （乘）的位置上；若 $\operatorname{tg}\varphi$ 是負的，則須將橫桿撥到 ÷ （除）的位置上，或者若 $\operatorname{tg}\varphi$ 是正的，則須順搖手柄，使 x_a 搖入 U 上（在 U 上的白