GAODAI

GAODENG DAISHU DE
DIANXING FANGFA

高等代数的典型方法

吴险峰　李　立　张世红　编著
堵秀凤　主审

哈尔滨地图出版社

高等代数的典型方法

GAODENG DAISHU DE DIANXING FANGFA

吴险峰　李立　张世红　编著

堵秀凤　主审

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数的典型方法/ 吴险峰,李立,张世红编著. —哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2006.7
ISBN 7-80717-408-0

Ⅰ.高... Ⅱ.①吴... ②李... ③张... Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 082690 号

哈尔滨地图出版社出版发行
(地址:哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮政编码:150086)
哈尔滨市动力区哈平印刷厂印刷
开本:850 mm×1 168 mm　1/32　印张:9.437 5　字数:272 千字
2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
印数:1~1 000　定价:25.00 元

内 容 提 要

本书是作者在长期教学实践基础上，参考国内外大量相关教材、专著、文献并吸纳个人一些科研成果编写而成。

本书共分 8 章。第 1 章多项式理论，第 2 章行列式的计算方法和技巧，第 3 章线性方程组，第 4 章矩阵，第 5 章向量空间，第 6 章线性变换，第 7 章欧氏空间，第 8 章二次型。本书全面系统地归纳总结了高等代数的基本理论和基本方法，便于读者复习和提高。书中有较多的例题说明抽象的理论，有相当丰富的习题培养读者的能力，且易于将读者带入研究领域。本书可作为高等院校数学系高年级学生教材，也可作为考研学生的复习参考资料，也可供数学教师和科研人员参考。

本书第 2，3，4 章由齐齐哈尔大学数学系副教授吴险峰编写；第 5，6 章由齐齐哈尔大学数学系讲师李立编写；第 7，8 章由齐齐哈尔师范高等专科学校高级讲师张世红编写，第 1 章由 3 个人共同编写。

作者

2006 年 7 月

目　录

第 1 章　多项式理论

多项式理论是高等代数的重要内容，是中学数学有关知识的加深和扩充. 多项式理论中的一些重要定理和方法，在进一步学习数学理论和解决实际问题时经常用到，是学习代数学及其它数学分支的必要基础. 多项式理论既相互独立，又贯穿于高等代数的其它章节. 换言之，多项式理论不依赖于高等代数的其它内容而自成体系，又为高等代数的其它章节提供范例和理论依据. 学习本章时，要正确地掌握概念，学会严谨地推导和计算.

1.1　内容提要

1.1.1　数域

1. 设 M 是一个非空数集，若 M 中任意两个数作某一运算的结果仍在 M 中，则称 M 对于该种运算是封闭的.

2. 设 S 是一个非空数集，若对于 $\forall a,b \in S$，都有 $a+b, a-b, ab \in S$，即 S 对于加法、减法、乘法封闭，则 S 称为一个**数环**.

零数环 $\{0\}$ 是惟一的有限数环，两个数环的交仍是数环.

3. 设 F 是含有 1 的数环，对于 $\forall a,b \in F$，当 $b \neq 0$ 时，有 $\frac{a}{b} \in F$，则 F 称为一个**数域**.

(1) 显然，数域都是无限集合，且两个数域的交仍是数域.

(2) 任何数域都包含有理数域 Q，即有理数域 Q 是最小的数域.

(3) 存在无穷多个互异的数域.

(4) 在有理数域 Q 与实数域 R 之间存在无穷多个数域；在实数域 R 与复数域 C 之间不存在其它数域.

1.1.2　一元多项式代数

1. 定义

形式表达式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为数域 F 上文字 x 的**一元多项式**,其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$,$n$ 是非负整数. 当 $a_n \neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 的次数为 n,记为 $\partial^\circ(f(x)) = n$(或 $\deg(f(x)) = n$),并称 $a_n x^n$ 为 $f(x)$ 的首项,a_n 为 $f(x)$ 的首项系数. $a_i x^i$ 称为 $f(x)$ 的 i 次项,a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数. 当 $a_n = \cdots = a_1 = 0$,$a_0 \neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 为**零次多项式**,即 $\partial^\circ(f(x)) = 0$;当 $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ 时,称 $f(x)$ 为**零多项式**,零多项式是惟一不定义次数的多项式.

2. 运算及运算法则

多项式可以进行加、减、乘运算,并有与整数相类似的性质.

3. 多项式的次数定理

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$):

(1) 当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时,

$$\partial^\circ(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\partial^\circ(f(x)), \partial^\circ(g(x))\}.$$

(2) $\partial^\circ(f(x)g(x)) = \partial^\circ(f(x)) + \partial^\circ(g(x))$.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体记为 $F[x]$,称为数域 F 上的一元多项式环;数域 F 上一切次数小于 n 的多项式,再添上零多项式的全体,记为 $F_n[x]$.

1.1.3 多项式的带余除法和整除性

1. 多项式的带余除法

带余除法定理 设 $f(x), g(x) \in F[x]$,$g(x) \neq 0$,则存在惟一的多项式 $q(x), r(x) \in F[x]$,使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\partial^\circ(r(x)) < \partial^\circ(g(x))$. 称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**余式**.

2. 整除

设 $f(x), g(x) \in F[x]$,如果存在多项式 $h(x) \in F[x]$,使

$$f(x) = h(x)g(x),$$

则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除),记为 $g(x) \mid f(x)$,此时

称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**,$f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍式**,商式 $h(x)$ 也可记为 $\frac{f(x)}{g(x)}$,即 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. 用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ **不能整除** $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x)=h(x)g(x)$ 成立.

注　$F[x]$ 中的多项式不能作除法,而整除性不是多项式的运算,而是 $F[x]$ 中元素间的一种关系,即任给 $F[x]$ 中两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,可以判断 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

3. 整除的有关结论

(1) 如果 $g(x)\neq 0$,则 $g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)=0$.

(2) 零多项式只能整除零多项式;任意多项式一定能整除它自身;任意多项式都可以整除零多项式;零次多项式(非零常数)能整除任意多项式.

(3) 多项式 $f(x)$ 与 $cf(x)(c\neq 0)$ 有相同的因式和倍式.

(4) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

4. 整除的性质

(1) 如果 $g(x)\mid f(x)$,则 $kg(x)\mid lf(x)$,其中 k 为非零常数,l 为常数.

(2) 如果 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

(3) 如果 $f(x)\mid g_i(x)$,又 $u_i(x)$ 为任意多项式,$i=1,2,\cdots,m$,则 $f(x)\mid[u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_m(x)g_m(x)]$.

(4) 如果 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid f(x)$,则 $f(x)=cg(x)$,其中 c 为非零常数.

5. 带余除法的计算格式

用多项式 $g(x)(\neq 0)$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 可以通过如下两种格式进行:

(1) 普通除法或长除法

$$
\begin{array}{r}
\text{商式 } q(x) \\
\text{除式 } g(x)\,\overline{)\,\text{被除式 } f(x)} \\
\underline{-\,q(x)g(x)} \\
\text{余式 } r(x)
\end{array}
$$

(2)竖式除法

$$
\begin{array}{r|l|l}
\text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商式 } q(x) \\
 & -q(x)g(x) & \\
\hline
 & \text{余式 } r(x) &
\end{array}
$$

或

$$
\begin{array}{r|l|l}
\text{商式 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x) \\
 & -q(x)g(x) & \\
\hline
 & \text{余式 } r(x) &
\end{array}
$$

注 1　在利用以上两种格式进行计算时,要逐步利用除式 $g(x)$ 确定商式 $q(x)$ 中由高次到低次的项来消去被除式的首项,以得到次数低于 $g(x)$ 的多项式或零多项式 $r(x)$.

注 2　当利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式时,用竖式除法较为方便.

6. 综合除法

(1)设以 $g(x) = x - a$ 除$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 时,所得的商式 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ 及余式 $r(x) = c_0$,则比较 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \cdots, b_0 = a_1 + ab_1, c_0 = a_0 + ab_0.$$

这种计算可以排成以下格式进行:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & ab_{n-1} & ab_{n-2} & & ab_1 & ab_0 \\
\hline
 & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & c_0
\end{array}
$$

用这种方法求商式和余式(的系数)称为**综合除法**.

注 1　用综合除法进行计算时,被除式中所缺的项必须补上 0,否则计算就错了.

注 2　当除式为 $ax + b(ab \neq 0)$ 时,因为

$$f(x) = (ax + b)q(x) + r(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)[aq(x)] + r(x),$$

所以用 $ax + b$ 除$f(x)$ 可以先用 $x - \left(-\frac{b}{a}\right)$ 除$f(x)$,得到商式的 a 倍和余式,再用 a 除商式的 a 倍得到商式.

注3　当除式为一次式时，用综合除法比用带余除法来得方便，特别是有些问题需要多次用一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示出它的优越性.

(2)综合除法的应用

①求 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值，并判定 c 是否为 $f(x)$ 的根及其几重根.

②把 $f(x)$ 表成 $x-c$ 的多项式.

1.1.4　多项式的最大公因式与互素多项式

1. 多项式的最大公因式

(1)设 $f(x),g(x)\in F[x]$，如果 $d(x)\in F[x]$，满足 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式；又如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一公因式都能整除 $d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

(2)最大公因式有以下性质：

①最大公因式存在惟一性定理：$F[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式. 两个零多项式的最大公因式是零多项式，它是惟一确定的. 两个不全为零的多项式的最大公因式总是非零多项式，它们之间只有常数因子的差别；这时，首项系数为1的最大公因式记为 $(f(x),g(x))$.

②设 $f(x),g(x)\in F[x]$，$g(x)\neq 0$，如果有

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式一定是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式，而 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式也一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 特别地，有

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x)).$$

(这也是用辗转相除法求最大公因式的根据)

③最大公因式表示定理：设 $f(x),g(x)\in F[x]$，如果 $d(x)\in F[x]$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则必有 $u(x),v(x)\in F[x]$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

注　如果 $f(x),g(x),d(x)\in F[x]$，且有等式 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 成立，但 $d(x)$ 不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 如取

$f(x)=x, g(x)=x+1, u(x)=x+2, v(x)=x-1, d(x)=2x^2+2x-1$，则有 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，但 $d(x)$ 显然不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

④最大公因式不因数域 F 的扩大而改变.

(3)求最大公因式的辗转相除法：

如果 $f(x), g(x)\in F[x], g(x)\neq 0$，且有 $q_i(x), r_i(x)\in F[x]$，使

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)g(x)+r_1(x),\\ g(x) &= q_2(x)r_1(x)+r_2(x),\\ r_1(x) &= q_3(x)r_2(x)+r_3(x),\\ &\cdots\cdots\\ r_{s-2}(x) &= q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x),\\ r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x)r_s(x)+0. \end{aligned}$$

其中 $\partial^\circ(r_i(x))\geqslant 0$，则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

注 如果能够对多项式进行因式分解，则用因式分解法求多项式的最大公因式要比用辗转相除法求最大公因式简便一些. 但遗憾的是，没有一个一般的方法对多项式进行因式分解. 因此，因式分解法求最大公因式主要具有理论上的用处，它不能代替可以具体求出最大公因式的辗转相除法.

2. 互素多项式

(1)如果 $f(x), g(x)\in F[x]$ 的最大公因式为非零常数，或 $(f(x), g(x))=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素或互质**.

(2)互素的性质

①设 $f(x), g(x)\in F[x]$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是，存在 $u(x), v(x)\in F[x]$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

②如果 $(f(x), g(x))=1$ 且 $f(x)\mid[g(x)h(x)]$，则 $f(x)\mid h(x)$.

③如果 $(f(x), g(x))=1$，且 $f(x)\mid h(x), g(x)\mid h(x)$，则 $[f(x)g(x)]\mid h(x)$.

④如果 $(f(x), g(x))=1$，$(f(x), h(x))=1$，则 $(f(x), g(x)h(x))=1$.

1.1.5　不可约多项式与因式分解惟一性定理

1. 不可约多项式及其性质

(1)如果数域 F 上次数大于零的多项式 $p(x)$ 不能表示成数域 F 上两个次数比它低的多项式的乘积,则称 $p(x)$ 是数域 F 上的**不可约多项式**.

注1　零多项式与零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的.一次多项式总是不可约的.

注2　多项式的可约性与多项式所在的数域密切相关,如 x^2-3 在有理数域 Q 上不可约,而在实数域 R 上可约,即 $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$;又如 x^2+1 在实数域 R 上不可约,而在复数域 C 上可约,即 $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

注3　互素多项式指的是 $F[x]$ 中两个多项式之间的一种关系,而不可约多项式是某个多项式本身的一种特性,这是完全不同的两个概念.但在讨论问题时,互素多项式与不可约多项式的性质又是互相利用的,要学会灵活运用.

(2)不可约多项式的性质

①如果 $p(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式,则 $cp(x)$ 也是 F 上的不可约多项式,其中 c 是 F 中的非零数.

②设 $p(x)$ 是数域 F 上一个不可约多项式,则对 F 上任意多项式 $f(x)$,必有 $(p(x),f(x))=1$,或者 $p(x)\mid f(x)$.

③设 $p(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式,$f(x)$,$g(x)$ 是 F 上的任意两个多项式,如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$,则必有 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$.

④如果不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中 $s\geqslant 2$,则 $p(x)$ 至少可以整除这些多项式中的一个.

2. 因式分解惟一性定理

(1)数域 F 上任意次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以分解成数域 F 上的一些不可约多项式的乘积.如果

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

其中 $p_i(x)$ 与 $q_j(x)(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$ 都是 F 上的不可约多

项式，则 $s=t$，并且适当调换 $q_j(x)$ 的次序后可使

$$q_i(x)=c_ip_i(x)(i=1,2,\cdots,s),$$

这里 c_i 是 F 中的不为零的数. 即如果不计零次因式的差别，多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是惟一的.

(2)数域 F 上任意次数大于零的多项式都有惟一的典型分解式

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 是 F 上首项系数为 1 的互异的不可约多项式，而 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 都是正整数.

(3)如果已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的典型分解式，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是那些同时在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的典型分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积，所带的方幂的指数等于它在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中所带的方幂指数中较小的一个.

3. 重因式

(1)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$，其中 x 是文字，称多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的微商(或导数). 当 $k>1$ 时，规定 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶微商 $f^{(k-1)}(x)$ 的微商，即 $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$. 多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

(2)设 $f(x)\in F[x]$，$p(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式，k 为非负整数. 如果 $p^k(x)\mid f(x)$，且 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式. 当 $k=1$ 时，称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式；当 $k\geqslant 2$ 时，称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**重因式**.

注 由于重因式一定是不可约因式，所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关.

(3)有关结论

①如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(k\geqslant 1)$ 重因式，则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 特别地，$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

②如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(k\geqslant 1)$ 重因式，则它是 $f(x),f'(x),\cdots f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

③不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式,即 $p(x) \mid (f(x), f'(x))$.

注　由此可见 $f(x)$ 的重因式可以在 $(f(x), f'(x))$ 的因式中去找.

④多项式 $f(x)$ 无重因式的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素,即 $(f(x), f'(x)) = 1$.

⑤设多项式 $f(x)$ 的次数 $\partial^{\circ}(f(x)) \geq 1$,则多项式 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式,但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式.即设 $f(x)$ 有典型分解式为

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x).$$

则
$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

注　这是去掉多项式的因式重数的一个有效方法.

1.1.6　多项式函数与多项式的根

1. 多项式函数

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in F[x]$,其中 x 是文字,数 $a \in F$,将 $f(x)$ 的表示式中的 x 用 a 代替得到 F 中的数

$$a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0.$$

称之为当 $x = a$ 时 $f(x)$ 的值,记为 $f(a)$,即

$$f(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0.$$

这样,对每个数 $a \in F$,由多项式 $f(x)$ 确定 F 中惟一的数 $f(a)$ 与之对应,称 $f(x)$ 为 F 上的一个**多项式函数**.

注　前面是用形式的观点来定义多项式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$,其中 x 是一个文字(其本身的意义有待实际应用时再机动地取定),而系数 $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 在数域 F 中变化.在做多项式的加、减、乘等运算及研究多项式之间的整除关系、最大公因式等时都是这样理解的.当把一元多项式 $f(x)$ 中所含的文字 x 的意义看成一个可以在数域 F 中任意变动的变数符号时,则 $f(x)$ 就表示了一个随着 x 的变动而变化的多项式函数,此时系数 $a_i \in F$ 相对地取定,这就是用函数的观点来定义多项式.对于数域 F 上的一元多项式来说可以证明这

两种观点是统一的，在证明过程中数域 F 包含无限多个元素这一性质是很起作用的. 正因为对于数域 F 上的一元多项式来说这两种观点是统一的，才使得在讨论多项式时无论采用上述两种观点中的哪一种都是不会出问题的.

2. 多项式的根

设 $f(x) \in F[x]$，数 $a \in F$，如果 $f(a) = 0$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个**根或零点**. 如果 $x - a$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则称 a 是 $f(x)$ 的 k **重根**；当 $k = 1$ 时，称 a 是 $f(x)$ 的**单根**；当 $k > 1$ 时，称 a 是 $f(x)$ 的**重根**.

3. 多项式函数的性质

①余数定理

设 $f(x) \in F[x]$，$a \in F$，用一次多项式 $x - a$ 去除 $f(x)$ 所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(a)$.

注　余数定理表明可以采用综合除法确定多项式 $f(x)$ 在 $x = a$ 时的值 $f(a)$ 或验证 a 是 $f(x)$ 的单根或重根，这比直接将 a 代入 $f(x)$ 计算要方便得多.

②因式定理

设 $f(x) \in F[x]$，$a \in F$，则 $(x-a) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(a) = 0$.

③多项式根的个数定理

$F[x]$ 中 $n(\geqslant 0)$ 次多项式在数域 F 中的根不可能多于 n 个（重根按重数计）.

④设 $f(x), g(x) \in F[x]$，且 $f(x), g(x)$ 的次数都不超过 n. 如果对 $n+1$ 个不同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 有 $f(a_i) = g(a_i)\ (i = 1,2,\cdots,n+1)$，则 $f(x) = g(x)$.

4. 多项式两种定义等价

数域 F 上两个多项式相等的充分必要条件是它们所定义的数域 F 上的多项式函数相等.

注　$F[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项. 由 F 上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 所确定的函数相等是指对任意 $a \in F$，都有 $f(a) = g(a)$. 这是两个不同的概念，但因为数域 F 中有无穷多个数，所以由上面 ④ 中的结论知，多项式的相等与多项式函数的相等

实际上是一致的. 换言之,数域 F 上的多项式既可以作为形式表达式来处理,也可以作为函数来处理.

1.1.7　复数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 复系数多项式因式分解定理

复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 在复数域上都可惟一地分解成一次因式的乘积. 即复数域上任意次数大于 1 的多项式都是可约的.

2. 典型分解式

复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有典型分解式

$$f(x) = a_n(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\cdots(x-a_s)^{r_s}.$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是不同的复数, $r_1, r_2, \cdots, r_s$ 是正整数且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$.

3. 代数基本定理

每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中至少有一个根.

4. 复系数多项式的根

n 次复系数多项式在复数域内恰有 n 个复根(重根按重数计算).

5. 根与系数的关系

Vieta 定理　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一元 n 次多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0).$$

的 n 个根,则根与多项式的系数之间有下列关系:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \qquad \cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots\alpha_n = (-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$