高等学校经济管理类数学基础

高等数学学习辅导与解题指南

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　束立生

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO YU JIETI ZHINAN

安徽大学出版社

高等数学学习辅导与解题指南

高 等 学 校 经 济 管 理 类 数 学 基 础

高等数学
学习辅导与解题指南

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　束立生

安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与解题指南:高等学校经济管理类数学基础/孙国正,杜先能主编. —合肥:安徽大学出版社,2006.3

ISBN 7-81110-109-2/O·54

Ⅰ.高... Ⅱ.①孙...②杜... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018346 号

高等学校经济管理类数学基础

高等数学学习辅导与解题指南 **孙国正 杜先能 主 编**

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编 230039)	印 刷	中国科学技术大学印刷厂
		照 排	合肥述而文化传播有限公司
联系电话	编辑室 0551-5108438	开 本	787×960 1/16
	发行部 0551-5107784	印 张	26.5
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	字 数	458千
责任编辑	徐 建 鲍家全	版 次	2006年3月第1版
封面设计	张 犇	印 次	2006年3月第1次印刷
经 销	各地新华书店		

ISBN7-81110-109-2/O·54　　定 价 35.00元

高等数学教材编审委员会

马阳明	叶　明	孙国正	许志才
杜先能	张丛军	陈松林	陈　秀
姚云飞	侯为波	费为银	祝家贵
钱　云	黄己立	梁仁臣	蒋　威

高等数学教材参编人员

王良龙	孙国正	刘树德	朱春华
张敬和	束立生	何江宏	杜先能
宋寿柏	陆　斌	周礼刚	侯为波
祝东进	赵礼峰	胡舒和	郭大伟
徐建华	徐德璋	殷晓斌	蒋　威
葛茂荣	鲍炎红	雍锡琪	

前 言

学习微积分，一方面要对一些基本概念和基本定理做详细的分析，了解这些概念、定理的思想来源与意义；另一方面就是要通过做一定量的习题加以巩固和理解，并且从练习当中提高知识运用能力和掌握各种数学思想方法。许多读者在学习微积分的过程中都会遇到这样的问题：上课都能听懂，拿到题目却无从下手。这个问题，其原因一方面是对基本概念和基本定理的理解不够透彻，对概念的思想、意义和定理的条件、结论理解不够深入；同时缺少对题目类型和方法的总结、归纳，因此拿到题目不会运用所学过的知识进行分析、解答。本书正是针对这一问题，按照高等数学的教学顺序，分章、同步对微积分的概念、定理、方法分别进行详细的讲解与总结。

一　概念剖析

对微积分中的基本概念作进一步诠释，并结合具体的例子，指出理解这些概念需要注意的问题，以及思想由来与意义，帮助读者更深入地理解和掌握这些概念。

二　知识要点

对微积分学中的定理和重要结论做进一步的探讨，着重分析了这些定理成立的条件和应用范围，指出其条件的必要性或充分性，以及部分结论的推广，并给出具体实例加以说明。另一方面指出了它们的意义和作用，突出了定理的思想。

三　方法归类与例题选讲

对问题的类型及其解题方法作了较为全面的分析和总结，结合精选的典型例题和研究生入学考试(数三、数四)近十年的试题进行分析讲解。同时给出各种解法所适用题目的类型和特征。解题过程也做到了步骤详细，指出了其中所运用的知识点，以帮助读者能尽快地学会用所学过的知识分析问题和解决问题。例题的选取难度适中，解答尽量地采用了一般的、技巧性不强的方法，以方便读者由此及彼，举一反三。

四　知识延拓

这一部分给出了大量微积分学在经济学中的直接应用。通过大量

的经济学模型，一方面让读者学以致用，另一方面可以提高读者的理论水平，加深对知识的理解。

最后我们在附录中介绍了微积分发展简史，让读者了解整个微积分发展的历程和现状，以提高读者对学习微积分的兴趣。

本书在编写过程中参考了国内外一些著名的高等数学的教材和辅导用书，谨表示感谢！

本书配合《高等数学》(高等学校经济管理类教学基础，安徽大学出版社，2003)使用，可作为高等学校经济管理专业高等数学的教学参考书，也可作为考研的复习资料。

本书的编写是在安徽大学、安徽师范大学、淮北煤炭师范学院三校数学系的领导下，由鲍炎红和周礼刚编写。三校许多老师对本书提出了宝贵的意见与建议，在此，一并表示感谢。

限于编者学识水平，加之时间仓促，书中错误和疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2005 年 7 月

目 录

第1章

函　数

一　概念剖析

1. 实数与数轴

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\\text{分数(无限循环小数)}\end{cases}\\\text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

数轴三要素：原点，单位长度，正方向.

2. 绝对值及其基本性质

$$|x|=\begin{cases}x,\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\\-x,\text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

注1　几何上，$|x|$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离.

注2　绝对值的基本性质：

绝对值不等式 $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

$|ab|=|a|\cdot|b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$

$|x-a|<b\Leftrightarrow a-b<x<a+b$，$|x-a|>b\Leftrightarrow x>a+b$ 或 $x<a-b$.

3. 区间与邻域

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$，

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，

半开半闭区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，

无穷区间 $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，

$(-\infty,+\infty)=\boldsymbol{R}$.

各种邻域都是针对某个特定的点来说的.

x_0 的 δ 邻域：$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\in\boldsymbol{R}\,||x-x_0|<\delta\}$，

其中 $\delta>0$ 为任意给定的一常数. 点 x_0 称为邻域中心, δ 称为邻域半径.

x_0 的去心邻域: $U^0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$.

为以后讨论方便起见,补充定义:

x_0 的右邻域 $U_+(x_0,\delta)=[x_0,x_0+\delta)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0\leqslant x<x_0+\delta\}$;

x_0 的右去心邻域 $U_+^0(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0<x<x_0+\delta\}$;

x_0 的左邻域 $U_-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0-\delta<x\leqslant x_0\}$;

x_0 的左去心邻域 $U_-^0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0-\delta<x<x_0\}$;

$+\infty$的开邻域: $U(+\infty)=U(+\infty,M)=(M,+\infty)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x>M\}$;

$-\infty$的开邻域: $U(-\infty)=U(-\infty,M)=(-\infty,-M)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x<-M\}$;

∞的开邻域: $U(\infty)=U(\infty,M)=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x>M$ 或 $x<-M\}$.

其中 M 为任意给定的正常数.

注 1 $+\infty$, $-\infty$只是两个记号,不是数. 无穷区间的表示中凡是出现$+\infty$, $-\infty$的一端只能用小括号,不能用中括号. 例如$[a,+\infty)$不可写成$[a,+\infty]$.

注 2 邻域的概念为以后讨论函数在某点的极限,以及各种分析性质提供了很大的方便. 邻域半径 $\delta>0$ 可以为任意正实数,但通常将$\delta>0$取得非常小,用来刻画邻域中心 x_0 点的局部性质; M 取得非常大,用来刻画在无穷远处的性质. 这里函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内满足性质 P 是指:存在 $\delta>0$,函数 $f(x)$对$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内的任一点 x 满足性质 P.

4. 函数

函数本质上是就一个从集合 D 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个对应法则 f,即对于定义域 D 中任一自变量 x,通过对应法则 f,存在惟一的 y 与之相对应,即存在惟一的变量 y,使得 $y=f(x)$.

注 1 对于函数,并没有要求对于一个变量 y 只有一个自变量与之相对应. 可以有多个不同的自变量 x,它们的函数值为同一个 y.

注 2 函数与自变量和变量的符号选取无关,这就是所谓的函数

与表示法的无关性. 函数 $y=f(x)$ 也可以写成 $u=f(x)$, $y=f(t)$, $\cdots$. 只是通常习惯上将 x 作为自变量, y 作为变量. 所以说"函数 f"比"函数$y=f(x)$"和"函数 $f(x)$"更能体现函数的本质.

注 3 两个函数 $f(x)$, $g(x)$ 相等是指: 它们的定义域相同, 且对于定义域内任意一点 x, 都有 $f(x)=g(x)$.

注 4 函数 f 是定义在 D 上的一个函数, D' 是 D 的子集, 记集合 $f(D')=\{f(x)\mid x\in D'\}$. 显然集合 $W=f(D)$ 就是函数的值域.

注 5 几何上, 函数可以用平面曲线 $C:\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$ 来表示. 曲线 C 称为函数 $y=f(x)$ 的图象。显然由函数的定义可知, 平面曲线 C 与直线 $x=x_0$ $(x_0\in D)$ 的交点有且仅有一个.

注 6 在一元函数微积分学里, 主要是讨论从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数, 也可以说是从某个区间到 $\boldsymbol{R}$ 的函数. 而在多元函数微积分学里, 将对函数的定义域作进一步的推广, 即考虑从 $\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R}, i=1,2,\cdots,n\}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数, 用向量(实际上可以看做有序实数组)来作为自变量. 例如 $f(x,y)=x^2+y$.

5. 反函数

设函数 f 的定义域为 D, 值域为 W, 若对 $\forall y\in W$, 存在惟一的 $x\in D$, 使得 $y=f(x)$, 则此时变量 x 可视为变量 y 的函数, 记为 $x=\varphi(y)$, φ 称为函数 f 的反函数. 习惯上, 把函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$ (注意: 此处已经根据函数与表示法的无关性, 将 $x=\varphi(y)$ 中的符号 x, y 对调了, 从而符合一般函数的符号习惯). 但对于对应法则, 有 $\varphi=f^{-1}$.

注 1 原函数的定义域 D 成为反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域, 值域 W 则成为反函数的定义域.

注 2 函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是关于直线 $y=x$ 对称的. 但同一直角坐标系中, $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图象是同一条曲线.

注 3 由反函数的定义, 函数 $f(x)$ 有反函数的充分必要条件是:

对于任意 $x_1, x_2\in D$, 若 $x_1\neq x_2$, 恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. $\quad(*)$

例如 严格单调函数满足(*), 所以严格单调函数一定有反函数.

但是有些 $f(x)$ 不满足(*), 但可以通过缩小 $f(x)$ 的定义域, 以便可以得到相应定义域的反函数. 例如: 函数 $y=x^2$, 在整个定义域 $\boldsymbol{R}$ 上没有反函数, 但在 $[0,+\infty)$ 上就有反函数 $y=\sqrt{x}$, 在 $(-\infty,0]$ 上有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

6. **复合函数**

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的值域为 W_g，若 $D_f\cap W_g\neq\varnothing$，则称函数 $y=f(g(x))$ 为 x 的复合函数，其中称 x 为自变量，u 为中间变量，y 为变量，$f(u)$ 称为外层函数，$g(x)$ 称为内层函数.

还可以对两个以上的函数进行复合. 例如函数 $y=\sin(\ln x^2)$，$x\neq 0$，就是对 $y=\sin u$，$u=\ln w$，$w=x^2$ 的复合，其中 u，w 都是中间变量. 读者须对多层复合函数的复合层次有清晰的认识，这一点对于以后研究复合函数的性质至关重要.

复合过程当中，要注意各层函数的定义域和值域与复合前的变化，尤其是对分段函数的复合.

7. **基本初等函数、初等函数**

将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数和常数函数统称为基本初等函数.

(1)常数函数 $y=c$，(c 是常数)；

(2)幂函数 $y=x^a$，(a 是实数)；

(3)指数函数 $y=a^x$，($a>0,a\neq 1$)；

(4)对数函数 $y=\log_a x$，($a>0,a\neq 1$)；

(5)三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$；

(6)反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$.

将基本初等函数的经过有限次四则运算和复合后所得的函数称为初等函数. 显然，初等函数在其各自的定义域内具有很多良好的性质. 例如：正弦，余弦函数具有有界性、奇偶性、周期性等. 幂函数具有奇偶性、单调性等. 即使以后考虑函数的分析性质时，初等函数在其定义域或定义区间内也都是满足的. 读者务必将五种基本初等函数的定义域、值域，有界性、单调性(单调区间)、奇偶性、周期性做详细的分析并牢牢记住.

注　一般来说，分段函数在各段上是不同的基本初等函数的复合，因此不是初等函数. 但这也不是绝对的，分段函数也有可能是初等函数. 例如：$|x|=\sqrt{x^2}$ 就是初等函数.

8. **需求函数**

一种商品的需求是指消费者(购买者)在一定时期内在各种可能的价格下愿意而且能够购买的该商品的数量，也就是说，只有消费者同时

具备了购买该商品的欲望和支付能力两个条件，才称得上需求.

一种商品的需求是由许多因素决定的，其中主要的因素有该商品的价格、消费者的收入水平、相关商品的价格、消费者的偏好和消费者对该商品的价格预期等. 影响如下：

商品的自身价格对需求量的影响. 一般说来，一种商品的价格越高，该商品的需求量就越小；相反，价格越低，需求量就越大.

消费者的收入水平对商品需求量的影响. 对于多数商品来说，当消费者的收入水平提高时，就会增加对该商品的需求量；相反，当消费者的收入水平下降时，就会减少对该商品的需求量.

相关商品的价格对需求量的影响. 当一种商品本身的价格保持不变，而和它相关的其他商品的价格发生变化时，这种商品本身的需求量也会发生变化. 例如汽油价格提高会引起人们对汽车的需求量的减少.

消费者的偏好对需求量的影响. 当消费者对某种商品的偏好程度增强时，商品的需求量就会增加；相反，偏好程度减弱，需求量就会减少.

消费者对商品的价格预期对需求量的影响. 当消费者预期某种商品的价格在下一期会上升时，就会增加对该商品的现期需求量；当消费者预期某商品的价格在下一期会下降时，就会减少对该商品的现期需求量.

一种商品的需求量可以看成所有影响该商品的需求量的因素的函数，在所考虑的时期范围内，如果把该商品的价格以外的上述诸因素都看做不变的因素，则可以把该商品的价格 p 看做自变量，需求量 D 看做因变量，即需求量 D 可视为该商品价格 p 的函数，称为需求函数，记为

$$D=f(p).$$

9. **供给函数**

一种商品的供给是指生产者在一定时期内在各种可能的价格下愿意而且能够提供出售的该种商品的数量. 这就是说，作为供给必须具备两个条件，一是有出售商品的愿望，二是有供应商品的能力. 两者缺一便不能构成供给.

一种商品的供给数量取决于多种因素的影响. 其中主要的因素有：该商品的价格、生产的成本、生产的技术水平、相关商品的价格和生产者对未来的预期等. 影响如下：

商品自身的价格对供给量的影响. 一般说来，一种商品的价格越高，生产者提供的产量就越大；相反，商品的价格越低，生产者提供的产量就越小.

生产的成本对供给量的影响. 在商品自身价格不变的条件下，生产成本上升会减少利润，从而使商品的供给量减少；相反，生产成本下降会增加利润，从而使得商品的供给量增加.

生产的技术水平对供给量的影响. 在一般的情况下，生产技术水平的提高可以降低生产成本，增加生产者的利润，生产者会提供更多的产品.

相关商品的价格对供给量的影响. 在一种商品的价格不变，而其他相关商品的价格发生变化时，该商品的供给量会发生变化. 例如小麦价格不变而棉花价格提高，生产者将缩减麦地种植面积而增加生产棉花的面积. 这表示棉花价格的提高会引起小麦供给的减少.

生产者对未来的预期对供给量的影响. 如果生产者对未来的预期看好，如预期商品的价格会上涨，生产者在制定生产计划时，就会增加产量供给；如果生产者对未来的预期是悲观的，如预期商品的价格会下降，生产者在制定生产计划时就会减少产量供给.

一种商品的供给量是所有影响这种商品供给量的因素的函数. 如果假定其他因素均不发生变化，仅考虑商品的价格对供给量的影响，则商品的供给量 Q 可以看成这种商品的价格 p 的函数，表示为

$$Q=f(p).$$

10. 总成本函数

产品成本是衡量一个企业生产管理水平高低的重要经济指标. 产品的生产成本是指生产某产品时消耗生产要素所支付的费用. 一般用 $C(x)$ 来表示，这里 x 表示产量. 生产成本由固定成本和可变成本组成. 固定成本是指在一定限度内不随产量变动而变动的费用，如厂房设备等. 固定成本一般用 C_0 表示. 可变成本是指随产量变动而变动的费用，如原材料、燃料、工人工资等. 可变成本一般用 C_v 表示. 这样有

$$C=C(x)=C_0+C_v.$$

总成本函数 $C(x)$ 与产量 x 的比值称为平均成本，记为

$$\overline{C}=\frac{C(x)}{x}.$$

11. 总收入函数和总利润函数

总收入即厂商（生产者）售出一定数量的产量的产品所得到的全部销货价款，它等于单位产品的售卖价格与销售量（产量）的乘积，即总收入函数

$$R=R(x)=px. \qquad x \text{ 表示产量}$$

平均收入是指总收入除以销售量所得收入，即销售一定量产品时平均每一单位产品所得到的收入，它实际上也就是销售任一数量产品时每单位产品的售卖价格，记为 $\overline{R}$：

$$\overline{R}=\frac{R}{x}.$$

设 x 表示产量，L 表示总利润，则总利润函数可表示为

$$L=L(x)=R(x)-C(x).$$

二　知识要点

1. 有界性

函数 $f(x)$ 在 I 内有界是指：存在 $M_0>0$，使得对于 I 内任意一点 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M_0$.

函数的有界性是刻画一个函数在一个区间内的取值范围. 有界性还有另外一种等价定义，即若对于函数 $y=f(x)$，$x\in I$，存在实数 α,β，使得对于任意 $x\in I$，总有 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为有界函数，其中 α 称为下界，β 称为上界.

图象上，函数 $y=f(x)$ 的有界性，就是有两条平行于 x 轴的直线将其图象“套住”.

有界与无界的数学描述

函数在区间 I 内有界：即 $\exists M_0>0$，对于 $\forall x\in I$，均有 $|f(x)|<M_0$，或 $\exists\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，对于 $\forall x\in I$，均有 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$.

函数 $f(x)$ 在区间 I 内无界：即对 $\forall M>0$，$\exists x_M\in I$ 均有 $|f(x_M)|>M$，其中 x_M 表示与 M 有关.

注 1　符号“$\forall$”表示“任意的”，“$\exists$”表示“存在”.

注 2　函数 f 在 I 内有上界是指：存在 $\beta\in\mathbf{R}$，对 $\forall x\in I$，均有 $f(x)\leqslant\beta$. 类似地可定义 f 有下界. 显然，若函数有上(下)界，则其中的上界 β(下界 α)并不唯一. 原定义中的 M_0 也并不唯一.

例如　$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，但 $f(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有下界.

2. 奇偶性

(1) 奇函数等价于 $f(x)+f(-x)=0$；

偶函数等价于 $f(x)-f(-x)=0$.