

根据普通高中（课程标准）实验教科书编写

新课标

教材全解

数学是严谨的 ◆ 数学是抽象的 ◆ 数学是奇妙的 ◆ 学数学趁年青

高中数学

人教A版

1
必修



【审订】山师大附中高级教师

延边人民出版社

总策划 / 风雅颂
责任编辑 / 金河范
封面设计 / 袁丰琳

尊贵与时尚的体现，实用与经济的凝聚，知识与品位的结合，
翻阅自如，心随意动……



教材全解

高中语文（人教版）
高中语文（鲁人版）
高中语文（江苏版）
高中语文（粤教版）
高中语文（语文版）
高中数学（人教A版）
高中数学（人教B版）
高中数学（北师大版）
高中数学（湘教版）
高中数学（北大版）
高中英语（人教版）
高中英语（外研版）
高中英语（冀教版）

高中英语（北京版）
高中英语（北师大版）
高中英语（第1中译版）
高中英语（重庆大学版）
高中物理（人教版）
高中物理（鲁科版）
高中物理（粤教版）
高中物理（北京版）
高中物理（沪科版）
高中化学（人教版）
高中化学（鲁科版）
高中化学（江苏版）
高中历史（人教版）

高中历史（岳麓版）
高中历史（人民版）
高中历史（大象版）
高中地理（人教版）
高中地理（中国版）
高中地理（鲁教版）
高中地理（湘教版）
高中生物（人教版）
高中生物（中国版）
高中生物（冀少版）
高中生物（浙科版）
高中生物（江苏版）
高中政治（人教版）

ISBN 7-80698-430-5



9 787806 984307 >

¥14.80

版权所有 侵权必究

ISBN 7-80698-430-5/G · 322

总定价：248.40元

根据普通高中（课程标准）实验教科书编写

新课标

教材全解

数学是严谨的 ◆ 数学是抽象的 ◆ 数学是奇妙的 ◆ 学数学趁年青



高中数学

人教A版

1

必修

【审订】山师大附中高级教师

延边人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

教材全解·数学/崔开文主编.
—延吉:延边人民出版社,2005.6
ISBN 7-80698-430-5

I. 教… II. 崔… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 022877 号

总 策 划:风雅颂
责任编辑:金河范
封面设计:袁丰琳

教材全解 (高中)
崔开文 主编

延边人民出版社 出版
(吉林省延吉市友谊路 363 号, <http://www.ybcbs.com>)

山东鸿杰印务有限公司印刷

延边人民出版社发行 印数:1—5000 册
880×1230 毫米 32 开 198 印张 3800 千字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-80698-430-5/G·322
定价:248.40 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

序

FOREWORD

本书是依据人教(R)A版普通高中课程标准实验教科书《数学·必修1》和《普通高中课程标准(实验)》为指导,结合数学教学的实际情况编写的,供使用人教A版数学高一学生学习使用。

《教材全解》丛书以《普通高中课程标准(实验)》要求为基本编写思想,全面渗透最新教育教学理念,努力从新知识、新视角、新形式的出发点出发,对教材进行详细分析讲解,开发学习资源,设计以发展能力和培养创新意识为目的的训练项目,为同学们的自主、合作、探究学习提供切实有效的帮助。丛书主要有以下显著特色:

一、全新理念

丛书以最新各学科课程标准为指导思想,从“知识与技能”、“过程与方法”、“情感、态度与价值观”三个维度出发整体设计,重在引导学生在学习活动和实践过程中,全面提高综合素养。

二、全新全解

通过潜心研究,细致调研新课标思想下“全解”的学习理念,以及学生对“全解”的新需求,突出时代特色,从不同的角度对学科学习要点、能力培养点细致解析,使同步学习与学科备考相一致,方向更明确。

三、全新方法

基础与能力并重,综合与创新相结合,丛书在提供充分学习材料的同时,关注学习过程,重在方法引导,提高学科素养。

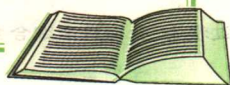
四、全新设计

体例设置灵活,全书在大栏目统一的基础上,小栏目的设置由编者根据教材内容需要而变化。采用双色印刷,重点突出,要点明确,内容条理,体现人文关怀,激发学习兴趣。

总之,丛书整体编写全面、透彻,具有预习、同步、查询等多项实用功能,希望同学们在使用本书过程中,把它当成“助手”,而不是完全的依赖;把它当成探究、创新的借鉴和桥梁,而不是去寻找和记取惟一的答案。只有这样,本书的作用才能得到充分的发挥,同学们才会得到更多更好的帮助和启发。

“长风破浪会有时,直挂云帆济沧海。”祝愿我们的读者通过本书的帮助,有一个远大的前程和光明的未来。

全解,绝不是限制思想;
全解,是激发思维的重要阶段。
解得透彻,才能引爆思维的火花!



编者

2005年8月

栏目编排特色

第一章

集合与函数概念

(课标标准)整体解读

对单元学习目标总体解说。

一、目标解读

本章主要讲述了集合与函数知识两部分内容。集合知识包括集合的有关概念、表示方法、集合间的关系及其基本运算;函数部分主要研究了函数的概念、定义域、值域、表示方法;

对单元核心内容分课解说,总体解读。

二、内容解读

1. 理解集合、空集的意义,了解属于、包含、相等关系的含义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合。

学好单元知识,提供最优学法。

三、学法解读

1. 注意和初中数学知识衔接。这就需要认真重新整理初中数学知识,形成良好的知识基础,在此基础上,再根据本章知识特点,较快地吸收新的知识,形成新的知识结构。

1.1 集合

1.1.1 集合的涵义与表示

核心要求,概括说明,明确方向。

一、知识技能

1. 了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系。
2. 了解集合元素的三个特性。

课标新理念

二、过程方法

能选择自然语言、图形语言、集合语言描述不同的具体问题。

三、情感、态度与价值观

体会数学文字语言与符号语言的统一,加深对集合语言描述客观现实和数学问题的认识。

课文一维目标:着眼基础,培养技能。

【点1全解】 集合的概念

一般地,我们把研究对象统称为元素(element),把一些元素组成的总体叫做集合(set)(简称集)。

【点2全解】 集合中元素的特性

- (1)确定性:设 A 是一个给定的集合, x 是某一具体对象,则 x 或者是 A 的元素,或者不是 A 的元素,两种情况必有一种而且只有一种成立。
- (2)互异性:集合中的元素必须是互异的。
- (3)无序性:集合与其中元素的排列次序无关,如集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{b, c, a\}$ 是同一个集合。

知识技能诠释

课文二维目标:着眼过程,培养综合分析能力。

一、基础巩固题

(一)集合的判定

【例1】 已知集合 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 若 $1 \in A$, 求实数 a 的值。

思路分析 $\because 1 \in A$, 则 $a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3$ 都可能为 1, 则需分类讨论解决, 但必须验证。

若 $a+2=1$ 则 $a=-1$, 所以 $A = \{1, 0, 1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾, 舍去

若 $(a+1)^2=1$ 则 $a=0$ 或 $a=-2$

当 $a=0$ 时, $A = \{2, 1, 3\}$ 满足题意

当 $a=-2$ 时, $A = \{0, 1, 1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾, 舍去

若 $a^2+3a+3=1$

则 $a=-1$ (舍去) 或 $a=-2$ (舍去)

综上所述 $a=0$

思想方法小结 在求解有关集合中元素的问题时, 互异性至关重要, 要引起重视。

思维方法探究

课文三维目标：着眼情感价值，发展兴趣，启迪创新。

情感价值体验

一、诵读聆听

本小节给出了两种集合的表示方法：列举法、描述法。教科书中的例1、例2，不仅要让大家学习两种表示法，同时还要让大家体会如何恰当选择表示法表示集合。因此建议大家在学时，先阅读教科书，然后进行交流，在阅读与交流中理解概念并掌握应用。

三、经典之道

教学语言各种形态之间的互译与转化

一切用以反映数量关系和空间形式的语言都是数学语言，如自然语言（包括口头的、文字的日常生活用语）、几何语言、集合语言。同一数学研究对象，往往可用不同的语言形态表达。

数学语言的不同形态各有自己的特点。几何语言易给人清晰的视觉形象，它能直观地表达概念、定理的本质以及相互间的关系，在抽象的数学思维中起着具体化和帮助理解的作用；自然语言比较生动、自然，它能将问题所研究的对象的含义更加明白地叙述出来，教科书上的概念、定理等多以自然语言叙述；集合语言是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言，集合语言比较简洁、严谨，可大大缩短语言表达的“长度”，有利于推理、计算。集合语言与其他语言的关系以及它的构成如下：

小节知识的融会贯通，全面测试本节内容，查缺补漏。

综合素养升华

2. 下列集合中，不同于另外三个集合的是()
- A. $\{x \mid x=1\}$ B. $\{y \mid (y-1)^2=0\}$
 C. $\{x=1\}$ D. $\{1\}$
3. 直角坐标系中，坐标轴上的点的集合可表示为()
- A. $\{(x, y) \mid x \neq 0, y=0 \text{ 或 } x=0, y \neq 0\}$ B. $\{(x, y) \mid x=0, \text{且 } y=0\}$
 C. $\{(x, y) \mid xy=0\}$ D. $\{(x, y) \mid x, y \text{ 不同时为零}\}$

单元知识的总结、回顾，系统整理，总体掌握！

回顾与思考

【本章知识脉络】

集合的基本运算

并集： $A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$
 交集： $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$
 补集： $C_U A = \{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$

【高考专题解读】

- 在判定给定对象能否构成集合时，特别要注意它的“确定性”，在表示一个集合时，应注意它的“互异性”、“无序性”。
- 用描述法表示集合时，要准确把握集合元素的共有特征性质，必须满足集合中任意元素都满足这个性质，并且特别地满足这些性质的元素都在这个集合中。
- 对由条件给出的集合要明白它所表示的意义，即元素指什么，是数还是点或者其它的，是什么范围，用集合表示不等式(组)的解集时，要注意分清是交集还是并集，结合数轴或维恩图帮助思维判断。

【本章专题归纳】

专题一 要注意理解、正确运用集合概念

【例1】已知集合 $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{y \mid y = x + 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N =$ (2009年, 北京)

- A. $(0, 1), (1, 2)$ B. $\{0, 1\}, \{1, 2\}$
 C. $\{y \mid y=1, \text{或 } y=2\}$ D. $\{y \mid y \geq 1\}$

思路分析

集合 M, N 是用特征性质描述法表示的，元素是实数 y 而不是实数对 (x, y) ，因此 M, N 分别表示函数 $y = x^2 + 1 (x \in \mathbb{R})$ 和 $y = x + 1 (x \in \mathbb{R})$ 的值域，求 $M \cap N$ ，即求两函数值域的交集。

通过测试，查缺补漏，全面提高。

素养养成型评价测试

(评价时间:150分钟 评价分值:150分)

第I卷 (选择题 共75分)

一、选择题

- 下列四个关系式中，正确的是()
 A. $0 \in \{a\}$ B. $a \in \{a\}$
 C. $\{a\} \in \{a, b\}$ D. $a \in \{a, b\}$
- 集合 $\{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素，则 a 的值是()
 A. 0 B. 0 或 1 C. 1 D. 1 或 -1

第II卷 (非选择题 共75分)

- 《新唐书》记载：“宰相之职，佐天子，总百官，治万事，其任重矣。”唐朝、北宋、明朝统治者为了防范权相过重的威胁，分别采取了哪些措施？其方式和结果如何？(8分)

课后习题全解

第一章 集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

思考(P₁)

它们都能组成集合，它们的元素分别是汽车和学生，它们的共同特征是都是有限个元素的集合。

思考(P₂)

(1)能组成集合，因为大于3小于11的偶数

教材课后习题详解评析。

目录

CONTENTS

第一章 集合与函数概念

(课程标准)整体解读	1
1.1 集合	3
1.1.1 集合的含义与表示	3
课标新理念	3
知识技能诠释	3
过程方法探究	5
情态价值体验	10
综合素养升华	12
1.1.2 集合间的基本关系	13
课标新理念	13
知识技能诠释	14
过程方法探究	15
情态价值体验	22
综合素养升华	24
1.1.3 集合的基本运算	25
课标新理念	25
知识技能诠释	26
过程方法探究	29
情态价值体验	35
综合素养升华	38
1.2 函数及其表示	40
1.2.1 函数的概念	40
课标新理念	40
知识技能诠释	40
过程方法探究	43
情态价值体验	52
综合素养升华	55

1.2.2 函数的表示法	57
课标新理念	57
知识技能诠释	57
过程方法探究	61
情态价值体验	70
综合素养升华	74
1.3 函数的基本性质	77
1.3.1 单调性与最大(小)值	77
课标新理念	77
知识技能诠释	77
过程方法探究	80
情态价值体验	85
综合素养升华	89
1.3.2 奇偶性	90
课标新理念	90
知识技能诠释	90
过程方法探究	91
情态价值体验	98
综合素养升华	100
回顾与思考	102
素养养成型评价测试	125

第二章 基本初等函数(I)

(课程标准)整体解读	127
2.1 指数函数	129
2.1.1 指数与指数幂的运算	129
课标新理念	129
知识技能诠释	129
过程方法探究	131

情态价值体验	137
综合素养升华	139
2.1.2 指数函数及其性质	141
课标新理念	141
知识技能诠释	141
过程方法探究	144
情态价值体验	156
综合素养升华	160
2.2 对数函数	162
2.2.1 对数与对数运算	162
课标新理念	162
知识技能诠释	162
过程方法探究	165
情态价值体验	177
综合素养升华	181
2.2.2 对数函数及其性质	182
课标新理念	182
知识技能诠释	182
过程方法探究	184
情态价值体验	202
综合素养升华	206
2.3 幂函数	208
课标新理念	208
知识技能诠释	208
过程方法探究	211
情态价值体验	217
综合素养升华	221
回顾与思考	223
素养养成评价测试	241

第三章 函数的应用

(课程标准)整体解读	244
3.1 函数与方程	245
3.1.1 方程的根与函数的零点	245

课标新理念	245
知识技能诠释	245
过程方法探究	247
情态价值体验	251
综合素养升华	255
3.1.2 用二分法求方程的近似解	256
课标新理念	256
知识技能诠释	256
过程方法探究	257
情态价值体验	261
综合素养升华	264
3.2 函数模型及其应用	265
3.2.1 几类不同增长的函数模型	265
课标新理念	265
知识技能诠释	265
过程方法探究	266
情态价值体验	270
综合素养升华	276
3.2.2 函数模型的应用实例	277
课标新理念	277
知识技能诠释	277
过程方法探究	279
情态价值体验	293
综合素养升华	298
回顾与思考	300
素养养成评价测试	308
本册综合素养养成评价测试	312
课后习题全解	315
参考答案	350

第一章

集合与函数概念

(课程标准) 整体解读

一、目标全解

(一) 知识与技能目标

1. 了解集合的含义,会使用符号“ \in ”或“ \notin ”表示元素与集合之间的关系.
2. 能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法、特征性质描述法和 Venn 图法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.
3. 理解集合的特征性质,会用集合的特征性质描述一些集合,如常用数集、解集和一些基本图形的集合等.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别一些给定集合的子集.在具体情境中,了解空集和全集的含义.
5. 理解两个集合的交集和并集的含义,会求两个简单集合的交集与并集.理解在给定的集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.
6. 掌握有关的术语和符号(\cup 、 \cap 、 \subseteq 、 \supseteq 、 \varnothing 、 $\not\subseteq$ 、 $\not\supseteq$ 、 \neq 、 \emptyset 等),会用它们表达集合之间的关系和运算.能使用 Venn 图表达集合之间的关系和运算.
7. 通过同一过程中的变量关系理解函数的概念,会用集合与对应语言来刻画函数,了解构成函数的要素.
8. 学会正确运用区间表示一些数集,会求一些简单函数的定义域和值域,初步掌握换元法的简单运用.
9. 了解映射的概念,能判定一些简单的对应是不是映射,并利用映射加深对函数概念的理解.
10. 会选择恰当的方法表示函数;了解简单的分段函数,并能简单应用.
11. 理解函数的单调性,学会运用单调性的定义来判断函数的单调性、最大(小)值及其几何意义;结合具体函数,了解函数奇偶性的含义.

(二) 过程与方法目标

1. 通过实例,体会元素与集合的“属于”关系,从观察分析集合中的元素入手,正确地表示出来.
2. 通过各种实例,了解函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型.在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画(构造)函数,再现函数知识产生的过程.

3. 经历并体验使用最基本的集合语言表示有关的数学对象的过程与方法,发展运用数学语言交流的能力.

4. 通过研究已构造(或已给出)的函数表达式,去解释、探究其性质,揭示相关变量之间的内在关系.

(三)情感、态度与价值观目标

1. 通过大量实例,感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义.

2. 探索利用直观图示理解抽象概念,体会“数形结合”的思想.

3. 在运用集合语言的过程中,逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度,学习用数学的思维方式解决问题、认识世界.

4. 通过学习,初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用,体会数学的科学价值、应用价值、人文价值和美学价值.

5. 感受对应关系在刻画函数概念中的作用,我们在初中数学学习的基础上,对数学的高度抽象概括性和广泛的应用性有进一步的认识.

二、内容全解

本章内容贯穿整个高中数学学习过程,特别是本章中的基本概念与典型题结合思想、数式与图形结合思想,分类讨论思想都是高中数学中的常用思想,是高中知识学习的起点,也是高中知识的重点,本章知识在高考中以不同形式,不同难度的题型频频出现.

本章学习的主要内容是集合的含义与表示,集合间的基本关系及运算,函数及其表示以及函数基本性质——单调性、奇偶性的判定与应用.

三、学法全解

本章是高中知识的起始章,学好本章知识,对于顺利学习高中数学意义重大.学习时,应注意以下三点:

(1) 注意和初中数学知识衔接.这就需要认真重新整理初中数学知识,形成良好的知识基础.在此基础上,再根据本章知识特点,较快的吸收新的知识,形成新的知识结构.

(2) 认真理解、反复推敲思考本章各知识点的涵义,各种表示方法,容易混淆的知识,仔细辨识、区别,达到熟练掌握,逐步建立和集合知识结构相适应的理论体系与思考方法.

今后,随着后续章节的学习,其应用会越来越广泛和深入,相应地对集合知识函数知识的理解、掌握水平也会越来越高,学习本章知识切忌急于求成.

(3) 通过本章的学习,要努力培养自己观察、比较、抽象、概括能力;初步形成运用集合、函数知识准确地表述数学问题和实际问题的意识和能力;培养科学的、严谨的学习态度,为树立辩证唯物主义科学的世界观、认识世界打下基础.

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

课标新理念

一、知识与技能

1. 了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系.
2. 了解集合元素的三个特性.

二、过程与方法

能选择自然语言、图形语言、集合语言描述不同的具体问题.

三、情感、态度与价值观

体会数学文字语言与符号语言的统一,加深对集合语言描述客观现实和数学问题的认识.

知识技能诠释

【点1全解】 集合的概念

一般地,我们把研究对象统称为元素(element),把一些元素组成的总体叫做集合(set)(简称为集).

【点2全解】 集合中元素的特性

(1)确定性:设 A 是一个给定的集合, x 是某一具体对象,则 x 或者是 A 的元素,或者不是 A 的元素,两种情况必有一种而且只有一种成立.

(2)互异性:集合中的元素必须是互异的.

(3)无序性:集合与其中元素的排列次序无关,如集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{b, c, a\}$ 是同一个集合.

【点3全解】 集合与元素的符号

(1)集合通常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示,元素用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示.

如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于(belong to)集合 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A .

如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于(not belong to)集合 A ,记作 $a \notin A$ (或 $a \in A$),读作 a 不属于集合 A .

(2)数学中一些常用的数集及其记法.

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 \mathbf{N} ;

所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ ;

全体整数组成的集合称为整数集,记作 \mathbf{Z} ;

全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 \mathbf{Q} ;

全体实数组成的集合称为实数集,记作 \mathbf{R} .

【点4全解】 元素与集合的关系

元素与集合有属于(\in)和不属于(\notin)两种关系;如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A ;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A .

注意: (1) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性,可知对任何 a 与 A ,在 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2) 符号“ \in ”、“ \notin ”是表示元素与集合之间的关系的,不能用来表示集合与集合之间的关系,这一点千万要记准.

【点5全解】 集合的表示法

集合的表示方法常见的有列举法、描述法,除此还有时用 Venn 图法.

(1) 列举法

将集合中的元素一一列举出来,并用花括号“ $\{\}$ ”括起来表示集合的方法.

使用列举法时,需注意以下几点.

① 元素间用分隔号“,”;

② 元素不重复;

③ 元素无顺序;

④ 对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用删节号.

(2) 描述法

把集合中的元素的共同特征描述出来,写在花括号内表示集合的方法叫做描述法,它的一般形式是 $\{x \in I | P(x)\}$,其中“ x ”是集合中元素的代表形式; I 是 x 的范围;“ $P(x)$ ”是集合中元素 x 的共同特征,竖线不可省略.

描述法的语言形式有三种:文字语言,符号语言,图形语言.

如:表示由直线 $y = x$ 上所有的点组成的集合,可用下列三种方法:

① 文字语言形式: $\{\text{点 } P | P \text{ 是直线 } y = x \text{ 上的点}\}$;

② 符号语言形式: $\{(x, y) | y = x\}$;

③ 图形语言形式:在平面直角坐标系内画出直线 $y = x$ (略).

描述法的这三种语言形式可择优使用.

使用描述法时,需注意以下几点:

① 写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号);

② 说明该集合中元素的性质;

③ 不能出现未被说明的字母;

④ 多层描述时,应当准确使用“且”、“或”;

⑤ 所有描述的内容都要写在集合符号内.



过程方法探究

一、基础巩固题

(一) 集合的判定

【例1】 考察下列每组对象能否构成一个集合？

- (1) 著名的数学家；(2) 某校 2005 年在校的所有高个子同学；(3) 不超过 20 的非负数；(4) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 在实数内的解；(5) 直角坐标平面内第一象限的一些点。

解 (1)(2)(5) 的元素不确定，不能构成集合，(3)(4) 的元素是确定的，其中(3)中，任给一个实数 x ，可以明确地判断是不是“不超过 20 的非负数”，即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x > 20$ ”或“ $x < 0$ ”，两者必具其一。

(二) 元素与集合的关系

【例2】 给出下列关系：① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$ ；② $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ ；③ $|-3| \notin \mathbf{N}_+$ ；④ $|- \sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$ ；其中正确的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

思路分析 元素与集合之间的关系是“ \in ”和“ \notin ”关系。

解 由 \mathbf{R} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{N}_+ 的含义可知，①②正确，③④不正确， \therefore 选 B。

注意 对几个常见数集的符号表示应熟练掌握。

【例3】 已知数集 M 满足条件：若 $a \in M$ ，则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ($a \neq 0, a \neq \pm 1$)，已知 $3 \in M$ ，试把由此确定的 M 的其他元素全部求出来。

思路分析 由已知，只需将 $a=3$ 代入 $\frac{1+a}{1-a}$ 求出值，然后再利用已知代入，这样依次代入即可求出 M 的所有元素。

解 $\because a=3 \in M$ ，则 $\frac{1+a}{1-a} = \frac{1+3}{1-3} = -2 \in M$ ，

$$\therefore \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \in M \quad \therefore \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \in M \quad \therefore \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \in M$$

$\therefore M$ 的所有元素为 $3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 。

(三) 列举法表示集合

【例4】 用列举法表示下列集合：

- (1) 不大于 10 的非负偶数集； (2) 自然数中不大于 10 的质数集；
 (3) 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集； (4) 方程 $(x-1)^2(x-2) = 0$ 的解集；
 (5) 方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集。



思路分析 列举法就是将集合中的元素都列举出来,写在花括号内表示这个集合.

解 (1) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$; (2) $\{2, 3, 5, 7\}$;

(3) $\{-2, 2\}$; (4) $\{1, 2\}$; (5) $\{(2, 1)\}$.

思想方法小结 集合中元素的互异性. (4) 不能写成 $\{1, 1, 2\}$, 为说明 1 为二重根也可写成 $\{1, 2\}$; (5) 的解集为单元素集合, 因为方程组只有一组解, 元素的形式为 $(2, 1)$, 注意与 (4) 的区别, 列举法适用于表示集合为有限集, 且元素的个数较少, 但有时也可表示无限集或元素个数较多的集合, 如 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

(四) 描述法表示集合

【例 5】 用描述法表示下列集合:

(1) 大于 4 的全体奇数构成的集合;

(2) $\{2, 4, 6, 8\}$;

(3) 在平面 α 内, 以 O 为圆心, 半径为 r 的圆;

(4) 被 5 除余 3 的所有整数组成的集合;

(5) 三角形的全体构成的集合.

思路分析 描述法是用集合中元素的特征性质来描述, 形式为 $\{x \in I \mid P(x)\}$, 要从集合中元素所满足的条件, 具有的属性入手, 联想有关的数学表达形式.

解 (1) $\{x \mid x = 2k + 1, k \geq 2, k \in \mathbf{N}\}$; (2) $\{x \mid x = 2k, 1 \leq k \leq 4, k \in \mathbf{N}\}$;

(3) $\{p \mid |PO| = r\}$; (4) $\{x \mid x = 5k + 3, k \in \mathbf{Z}\}$;

(5) $\{x \mid x \text{ 是三角形}\}$.

思想方法小结 用描述法表示集合时, 要弄清元素的特征性质, 使其具有符合性质的都属于集合, 不具有性质的一定不属于集合.

(五) 列举法与描述法的灵活运用

【例 6】 用另一种方法表示下列集合:

(1) $\{\text{绝对值不大于 2 的整数}\}$;

(2) $\{\text{能被 3 整除且小于 10 的正数}\}$;

(3) $\{x \mid x = |x|, x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5\}$;

(4) $\{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$;

(5) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$

思路分析 集合的表示方法主要有列举法和描述法两种, 本题是将集合表示的其中一种形式写成另外的形式.

解 (1) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; (2) $\{3, 6, 9\}$;

(3) $\because x = |x|, \therefore x \geq 0$, 又 $\because x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5, \therefore$ 集合为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

(4) $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$;

(5) $\{x \mid x = 2k - 1, -1 \leq k \leq 2, k \in \mathbf{Z}\}$.

思想方法小结 为了更好地掌握集合语言, 要注意集合的两种表示方法的灵活运用.

【例 7】 用适当的方法表示下列集合:

(1) 由 4 与 6 的所有公倍数组成的集合;

(2) 所有正偶数组成的集合;



(3) 由 1, 2, 3 这三个数字抽出一部分或全部数字 (没有重复) 所组成的一切自然数的集合.

思路分析 (1)(2) 都是无限集, 应用描述法表示, 4 与 6 的公倍数就是 12 的公倍数, (3) 由 1, 2, 3 这三个数字组成的一位, 二位和三位自然数都是有限集, 可用列举法表示.

解 (1) $\{x \mid x = 12k, k \in \mathbf{Z}\}$;

也可以表示为 {4 与 6 的公倍数}, {12 的公倍数};

(2) $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}^+\}$;

(3) $\{1, 2, 3, 12, 13, 23, 31, 32, 123, 132, 213, 231, 312, 321\}$;

思想方法小结 (1) 不能写作 {12 的倍数集}, {12 的所有倍数}, 因为花括号 {} 已包含有“集”和“所有”的意思; (3) 包括一、二、三位数, 不要遗漏. 123, 321 不同.

(六) 综合应用

【例 8】 已知集合 $M = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 若 M 中元素至多只有一个, 求 a 的取值范围.

思路分析 讨论方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 实数根的情况, 从中确定 a 的取值范围, 依题意方程有一个实数根或有两个相等的实数根或无实数根.

解 $a = 0$ 时, 原方程为 $-3x + 2 = 0, x = \frac{2}{3}$ 符合题意. $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 为一元二次方程.

$\Delta = 9 - 8a \leq 0, a \geq \frac{9}{8}$,

\therefore 当 $a \geq \frac{9}{8}$ 时, 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无实数根或有两个相等的实数根, 符合题意.

综合以上可知, $a = 0$ 或 $a \geq \frac{9}{8}$.

思想方法小结 “ $a = 0$ ”容易被忽略, 只有“ $a \neq 0$ ”时, 方程才是一元二次方程, 才能用判别式 Δ 来解决问题.

二、要点批答题

本节内容易在以下环节出错

1. 在学习集合的概念时, 元素的性质, 确定性和互异性易出错, 特别在求字母的取值时, 往往不检验所得解的正确性, 易产生增根.

2. 在表示集合时, 要正确运用描述法和列举法.

【例 9】 方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解集是 _____.

错解一 $\{x = 0, y = 1\}$ 或 $\{0, 1\}$

错解二 $\{(x, y) \mid x = 0 \text{ 或 } y = 1\}$

错解分析 用列举法把答案写成 $\{x = 0, y = 1\}$ 或 $\{0, 1\}$, 前者既不是列举法也不是描述法, 也就是不符合集合表示法的基本模式. 而集合 $\{0, 1\} \neq \{(0, 1)\}$. 或用描述法把答案写成 $\{(x, y) \mid x = 0 \text{ 或 } y = 1\}$ 也是不正确的, 这个集合的元素有无限多个, 它表示这样的点 $(0, y)$ 或 $(x, 1)$.

