高等钢结构分析与设计

舒兴平 著

科学出版社
www.sciencep.com

高等钢结构分析与设计

舒兴平 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书全面、系统地介绍了高等钢结构分析理论与设计计算方法，内容包括非线性连续介质力学的基本理论、平面钢框架的几何与材料非线性分析、空间钢框架的几何与材料非线性分析、钢框架二阶弹性分析的简化设计方法、钢框架结构非线性稳定极限承载力的试验研究、刚性钢框架设计、半刚性连接钢框架结构分析、半刚性连接钢框架设计、钢管相贯节点极限承载力的试验研究、钢管相贯节点极限承载力性能的理论分析研究、钢管结构的分析与设计。

本书可供土木工程专业的设计人员、科研人员、研究生及高等院校相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等钢结构分析与设计/舒兴平著. —北京:科学出版社,2006
ISBN 7-03-016599-3

Ⅰ.高… Ⅱ.舒… Ⅲ.①钢结构-结构分析②钢结构-结构设计
Ⅳ.TU391

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 146079 号

责任编辑:童安齐 何舒民 / 责任校对:刘彦妮
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年4月第 一 版 开本:16(787×1092)
2006年4月第一次印刷 印张:21 1/4
印数:1—3 000 字数:492 000

定价:48.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)
销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BA03)

前言

目前大多数国家采用计算长度法计算钢结构的稳定问题。该方法的步骤是:采用一阶分析求解结构内力,按弹性稳定理论确定各压杆的计算长度,然后将各杆件隔离出来,按单独的压弯构件进行稳定承载力验算,验算中考虑了弹塑性、残余应力和几何缺陷等的影响。该方法的最大特点是采用计算长度系数来考虑结构体系对被隔离出来的构件的影响,计算比较简单,对比较规则的结构可以得到较好的结果。但计算长度设计法存在以下缺陷:① 不考虑节间荷载的影响,按理想框架分枝失稳求特征值的方法求稳定问题,得不到失稳时框架的准确位移,无法精确考虑二阶效应的影响;② 不能考虑结构体系中内力的塑性重分布,因此对大型或复杂结构体系常常给出保守的设计,使结构体系的可靠度高于构件的可靠度;③ 不能精确地考虑结构体系与它的构件之间的相互影响,无法在给定荷载下预测结构体系的破坏模式。

要克服上述问题,必须开展以整个结构体系为对象的二阶弹塑性分析,即所谓的高等分析和设计。此时,可求得在特定荷载作用下结构体系的极限承载力和失效模态,而无需对各个构件进行验算。目前,欧洲钢结构规范(EC3)和澳大利亚钢结构标准都列有二阶弹塑性分析或高等分析的条款。已颁布实施的《钢结构设计规范》(GB50017 - 2003)也将钢框架二阶分析方法纳入设计条文,这表明二阶分析设计方法用于工程设计已变得越来越重要。考虑几何非线性和材料非线性的结构分析即高等分析设计方法的特点是:由于考虑了非线性的影响,因而对荷载的不同组合需要单独进行分析,叠加原理不再适用。该方法给出的结构承载能力将同时满足整个体系和它的组成构件的强度和稳定性的要求,可完全抛弃计算长度和单个构件验算的概念,对结构进行直接的分析和设计。

高等分析和设计是一个正在发展和完善的新设计方法,而且是一种精确的方法。可以预期,在近期内计算长度法和高等分析设计法这两种方法将并存,并获得共同发展。今后,随着结构分析和计算机技术的进步,高等分析设计法将逐渐成为主要的设计方法。

本书前三章采用非线性连续介质力学中三维连续体的有限变形理论,将其应用于平面与空间杆系结构,在已变形的平面与空间杆系结构上建立平衡方程,通过迭代求出结构的内力与变形。采用内力屈服面塑性流动理论来考虑材料非线性的影响。上述高等分析方法理论严谨、计算方法统一、计算精度高。第四章通过 4 个无支撑纯钢框架算例验证了《钢结构设计规范》(GB50017 - 2003)中第 3.2.8 条所规定的二阶简化计算方法的计算精度。第五章通过四榀平面钢框架结构的静力试验,研究了钢框架的荷载-位移全过程曲线、极限承载力、应变分布、延性及试件的最终破坏模式,并将理论分析与试验结果进行了比较。第六章采用现行《钢结构设计规范》(GB50017 - 2003)所规定的二阶弹性分析简化方法对一个 12 层无支撑刚性纯钢框架进行了设计。第七章和第八章讨论了半刚性连接的性能,分析了半刚性连接对钢框架结构受力性能的影响。对腹板带双角钢的上下翼缘角钢半刚性连接节点采用三参数幂函数模型来模拟,并提出了该类型半刚性连接钢框架的简化

设计方法。第九章至第十一章通过6个K形圆钢管和2个N形搭接方圆钢管的足尺试验研究，探讨了管节点的破坏模式及应力、应变分布和变形发展规律，并将管节点极限承载力试验结果与规范公式计算结果进行了分析比较，然后采用有限元理论分析了各几何参数对K形圆钢管和N形搭接方圆钢管相贯节点极限承载力的影响，最后按现行设计规范对2个实际管结构桁架进行了设计。

本书汇集了作者10多年来在高等钢结构分析与设计计算理论方面的研究成果。在编写过程中，作者还参阅和引用了国内外有关的最新文献资料，谨向所引用文献资料的所有作者表示衷心感谢。

作者的导师沈蒲生教授详细地审阅了全部书稿，提出了许多宝贵的意见和建议，在此作者对恩师多年来的辛勤培养和热情指导表示衷心感谢。

在本书的编写工作中，得到了《钢结构设计规范》(GB50017－2003)国家标准管理组、《高层民用建筑钢结构技术规程》及《轻型房屋钢结构技术规程》国家规程管理组的大力支持，许多前辈和同行专家也给本书提出了许多宝贵的意见和建议，卢倍嵘、胡习兵、朱正荣、朱邵宁、周晶晶、林鹏、袁智深、丁国强、舒永华、何琼芳、汤建平、陈伏彬、肖又箐等对本书的撰写付出了大量的心血，在此一并向他们表示衷心地感谢！

由于作者水平有限，书中不足之处在所难免，敬请各位专家和广大读者批评指正。

舒兴平
湖南大学土木工程学院
2005年9月

目　录

第一章　非线性连续介质力学的基本理论

1.1 引　　言

对于非线性问题，通常分为两大类，即物理非线性问题和几何非线性问题。物理非线性问题是指应力-应变之间不再呈线性关系，即所谓材料非线性问题。几何非线性问题主要是指大位移小应变、大位移大应变引起的非线性，这两种情况统称为大变形情况。此时，应变-位移关系中的高次项已不能忽略。在大变形情况下，变形前后力的方向、微元体的面积和体积，都发生了变化，因此应力、应变如何定义，以哪个状态来描述所有的物理量，必须加以明确。采用不同的参考坐标系，对变形前后的各物理量，就有不同的表达形式。

本章概要介绍三维连续体的有限变形理论，它严格区分变形前后状态，可以描述任何大变形行为，是最彻底的非线性理论。本章内容包括非线性连续介质力学的基本理论（求和约定、坐标变换和笛卡儿张量简介），应变、应力的度量以及有限变形的三维虚功增量方程，它们是建立各类非线性理论的基本出发点。

1.2 求 和 约 定

1.2.1 字母标号

物理量是指表示物质性质的量。有不少物理量（或几何量）不能用一个标量加以表述，必须用一组标量才能描述；这组量中的每一个，叫做该物理量的分量。这些分量都与坐标系密切相关，例如：

点的位置——用三个坐标 x、y、z 表示；

位　　移——用三个坐标轴方向的分量 u、v、w 表示；

速　　度——用三个坐标轴方向的分量 v_x、v_y、v_z 表示；

应力状态——用九个应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yx}、τ_{yz}、τ_{zy}、τ_{zx}、τ_{xz}表示；

应变状态——用九个应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yx}、γ_{yz}、γ_{zy}、γ_{zx}、γ_{xz}表示。

在张量符号中，都采用字母标号，即将某一物理量的所有分量用同一个符号表示，并附加标号以区分其中各个分量。例如，将卡氏坐标 x、y、z 写成 x_1、x_2 和 x_3，并用 x_i（$i=1$，2，3，下同）表示；将坐标轴正向的单位矢 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 写成 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，并用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示；将位移分量写成 u_1、u_2、u_3，并用 u_i 表示；应力分量则写成 σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}、σ_{12}、σ_{21}、σ_{23}、σ_{32}、σ_{31}、σ_{13}，并用 σ_{ij}（i，j $=1,2,3$，下同）表示；类似地，应变分量用 ε_{ij}表示。在微分运算中，也可以采用字母标号，如$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$分别写成 $\varphi_{,1}$、$\varphi_{,2}$、$\varphi_{,3}$，并用 $\varphi_{,i}$表示。今后，如未加特别说明，字母标号中的字母（如 i、j、k 等）都可取数字 1、2、3，即字母的约定域（range convention）为 1、2、3。

1.2.2 求和标号、求和约定

在同一项中重复出现的字母标号，叫做求和标号，它表示将该标号按顺序 1、2、3 轮换时所得各项之和，这就是求和约定，例如

$$\left.\begin{aligned} a_ib_i &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_{ij}b_j &= a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 \\ a_{ii} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

在式(1.1)中，根据求和约定，都省略了求和记号 $\sum\limits_{i=1}^{3}$ 或 $\sum\limits_{j=1}^{3}$。求和标号又叫做"哑标"或"伪标"。根据这种求和约定，矢量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ 可以写成 $A_i\boldsymbol{e}_i$。

通常，在同一项中求和标号只重复出现两次(指双标号量的运算)，但有时也可能重复出现三次、四次，分别称为三重、四重哑标，例如

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = a_{ii}a_{ii}$$

求和标号可以任意变换字母。例如

$$\left.\begin{aligned} a_ib_i &= a_jb_j \\ a_{ij}b_j &= a_{ik}b_k \\ \varphi_{,i}dx_i &= \varphi_{,k}dx_k \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

这是因为，求和标号已经不是用来区分该符号所代表的个别分量，而是一种约定的求和标志，因此可以选用任何字母，不会改变其含义。但是，这种求和约定只适用于字母标号，不适用于数字标号，例如

$$\sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

但

$$\sigma_{11} = \sigma_x$$

同时，在和式相乘的运算中，注意不要改变原来哑标的"重次"，例如，$(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$，各个和式为两重哑标，应该写成 $\sigma_{ii}\sigma_{jj}$，不能写成 $\sigma_{ii}\sigma_{ii}$。因为根据求和约定，$\sigma_{ii}\sigma_{ii}=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2$。当然，原式也可以用加括号的办法来表示，即

$$\sigma_{ii}\sigma_{jj} = (\sigma_{ii})^2$$

上式右侧应先在括号内求和。同理，两矢量的点乘一般地应写成

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_i\boldsymbol{e}_i\cdot B_j\boldsymbol{e}_j$$

最后指出，在有些情况下，同一项中虽然出现重复的标号，但不按该标号求和，这时应另加说明。

1.2.3 自由标号

同一项内不重复出现的字母标号，叫自由标号。自由标号表示一般的项，可取 1、2、3 中任何一个值。例如，σ_{ij}表示九个应力分量中的任一个。

在同一方程式中，各项的自由标号应该相同，而且应理解(约定)为该方程式对所有自由标号的约定域都成立。例如，$a_i=b_{ij}c_j$ 表示下列三式都成立

$$a_1 = b_{11}c_1 + b_{12}c_2 + b_{13}c_3$$

$$a_2 = b_{21}c_1 + b_{22}c_2 + b_{23}c_3$$

$$a_3 = b_{31}c_1 + b_{32}c_2 + b_{33}c_3$$

因此，下列线性方程组

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

可写成

$$a_{ij}x_j = b_i$$

根据自由标号的定义显然可见，在同一方程式中，不能任意改变其中一项或部分项的自由标号的字母；如果有必要时，必须将各项的自由标号同时改变字母。

1.2.4 克罗内克德耳塔记号 δ_{ij}

记号 δ_{ij}表示九个量，并规定

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当\ i = j \\ 0, & 当\ i \neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

所以九个量中，只有三个量不为零。δ_{ij}叫做克罗内克德耳塔记号。δ_{ij}的性质和应用示例如下：

1）

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \tag{1.4a}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \tag{1.4b}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km} = \delta_{im} \tag{1.4c}$$

2）

$$a_{ij}\delta_{ij} = a_{ii} \tag{1.5}$$

3）

$$a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik} \tag{1.6a}$$

$$a_i\delta_{ij} = a_j \tag{1.6b}$$

上列关系式(1.6)可用于变换标号的字母，例如

$$a_{ij}\xi_j - \lambda\xi_i = a_{ij}\xi_j - \lambda\delta_{ij}\xi_j = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})\xi_j$$

4）设有一组方程

$$a_{11} = b + c_{11}, a_{12} = c_{12}, a_{13} = c_{13},$$

$$a_{21} = c_{21}, a_{22} = b + c_{22}, a_{23} = c_{23},$$

$$a_{31} = c_{31}, a_{32} = c_{32}, a_{33} = b + c_{33}$$

应用 δ_{ij}可将上列九式写成

$$a_{ij} = b\delta_{ij} + c_{ij}$$

5）已知 $a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{jk}\delta_{jk}$，所以

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}} = \delta_{jk} \tag{1.7}$$

及

$$x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \tag{1.8}$$

1.2.5 排列符号

定义

$$e_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = [\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{e}_k] = \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

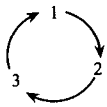
即

$$e_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \tag{1.10}$$

或

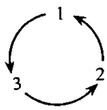
$e_{ijk} =$

1，当 i、j、k 顺序号为(1,2,3)、(2,3,1) 和(3,1,2)，即顺钟向排列，

如 

所示。

-1，当 i、j、k 顺序号为(1,3,2)、(3,2,1) 和(2,1,3)，即逆钟向排列，

如 

所示。

0，当 i、j、k 有重复时(不论是两个下标重复，还是三个下标重复)，

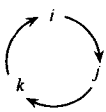
如 112、111 等。

因为 e_{ijk}有三个下标，每个下标变程为 3，所以可以重复的排列共 $3^3=27$ 种，其中包括不重复排列 $3!=6$ 种，这六种不重复排列中，三种是顺钟向排列，三种是逆钟向排列，即

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \qquad 3\text{ 种}$$
$$e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1 \qquad 3\text{ 种}$$
$$e_{112} = e_{113} = \cdots = 0 \qquad 21\text{ 种}$$

由三重混合积还可知

$$e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij} = -e_{ikj} = -e_{kji} = -e_{jik} \tag{1.11}$$

其下标轮换如 

所示。

例如

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23}) = e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} = e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{1.12}$$

排列符号与克罗内克记号间有下列重要关系

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{jp}\delta_{iq} \tag{1.13}$$

可以这样记忆它，即：

恒等式左边是两个排列符号相乘，六个下标中有两对自由指标(即 ij 和 pq)，一对哑标(即 k)，右边是两项，每项是两个克罗内克记号相乘，第一项的两个 δ，它们的下标是由左边那两对自由指标 ij、pq 的前两个指标(即 ip)和后两个指标(即 jq)分别构成；第二项

的两个 δ，它们的下标分别是左边两对自由指标 ij 和 pq 的里面两个指标（即 jp）和外面两个指标（即 iq）构成，因此可以记作“前前后后，里里外外”。

对于式(1.13)可说明如下：

因为

$$I=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

所以，根据行列式任两列互换变号的性质可知

$$\begin{vmatrix}\delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r}\end{vmatrix}=e_{pqr}I=e_{pqr}$$

或者，由行列式任两行互换变号的性质可知

$$\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}=e_{ijk}I=e_{ijk}$$

因此

$$\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}=e_{ijk}e_{pqr}$$

在上式中，令 $r=k$，得

$$e_{ijk}e_{pqk}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk}\end{vmatrix}$$

按第三行展开，得

$$e_{ijk}e_{pqk}=\delta_{kp}\begin{vmatrix}\delta_{iq} & \delta_{ik}\\ \delta_{jq} & \delta_{jk}\end{vmatrix}-\delta_{kq}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{ik}\\ \delta_{jp} & \delta_{jk}\end{vmatrix}+\delta_{kk}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix}$$

由求和约定，$\delta_{kk}=3$，再由克罗内克记号定义可知

$$e_{ijk}e_{pqk}=\begin{vmatrix}\delta_{iq} & \delta_{ip}\\ \delta_{jq} & \delta_{jp}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix}$$

将上式等号右边第一个二阶行列式交换两列（变号），于是右边三个行列式相同，于是

$$e_{ijk}e_{pqk}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{jp}\delta_{iq}$$

此式中间恰好是原三阶行列式的二阶主子式。

1.3 坐标变换

1.3.1 二维空间坐标轴旋转的关系式

设平面内的直角坐标系 x_1Ox_2，绕通过原点 O 垂直于该平面的 x_3 轴转过 θ 角，得到一新坐标系 $\bar{x}_1O\bar{x}_2$，如图 1.1 所示。现约定，凡新坐标系中的量均在上面加一横道表示。

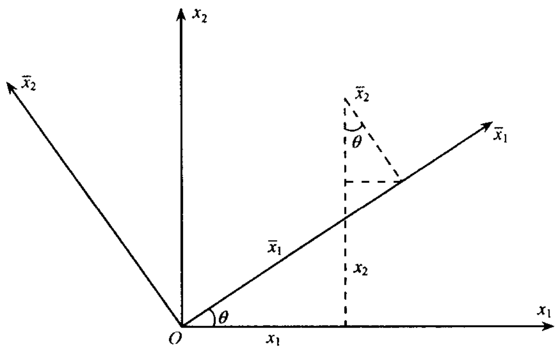


图 1.1

由(x_1,x_2)表示$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ \bar{x}_2 &= -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.14a}$$

反之

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= \bar{x}_1\cos\theta - \bar{x}_2\sin\theta \\ x_2 &= \bar{x}_1\sin\theta + \bar{x}_2\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.14b}$$

式(1.14a)的指标形式为

$$\bar{x}_i = \beta_{ij}x_j \qquad (i,j=1,2) \tag{1.15a}$$

其中

$$\beta_{ij} = \cos(\bar{\boldsymbol{e}}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

用矩阵表示就是

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

式(1.14a)的矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

即

$$\{\bar{x}\} = [\beta]\{x\} \tag{1.15b}$$

同样,式(1.14b)可写成

$$\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix} \tag{1.16a}$$

即

$$\{x\} = [\beta]^{-1}\{\bar{x}\} \tag{1.16b}$$

现在因为$[\beta][\beta]^{\mathrm{T}}=I$,所以$[\beta]$是正交矩阵,因此$[\beta]^{-1}=[\beta]^{\mathrm{T}}$,于是

$$\{x\} = [\beta]^{\mathrm{T}}\{\bar{x}\} \tag{1.16c}$$

其指标形式为

$$x_j = \beta_{kj}\bar{x}_k \qquad (j,k=1,2) \tag{1.16d}$$

将式(1.16d)代入式(1.15a),得

$$\bar{x}_i = \beta_{ij}\beta_{kj}\bar{x}_k$$

由此可知

$$\beta_{ij}\beta_{kj} = \delta_{ik} \tag{1.17}$$

这是在 x_1Ox_2、$\bar{x}_1O\bar{x}_2$都是直角坐标系的情况下得到的。对正交变换这个关系普遍成立,所以此关系式是正交性条件。

1.3.2 三维空间坐标轴的旋转

把以上二维形式的坐标变换推广到三维,见图 1.2。设 $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 是直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 绕原点 O 旋转而得到的新系,仍记

$$\beta_{ij} = \cos(\bar{\boldsymbol{e}}_i, \boldsymbol{e}_j) \tag{1.18}$$

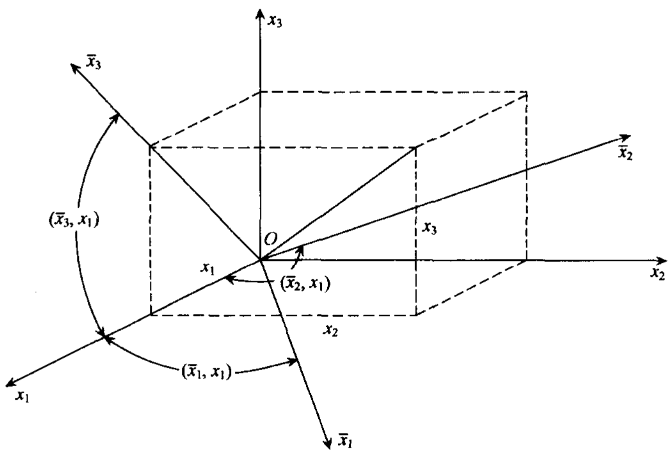


图 1.2

其中 $i,j=1$、2、3。坐标对应关系如表 1.1 所示。

表 1.1 新旧坐标系转轴规律

	x_1	x_2	x_3
$\bar{x}_1$	β_{11}	β_{12}	β_{13}
$\bar{x}_2$	β_{21}	β_{22}	β_{23}
$\bar{x}_3$	β_{31}	β_{32}	β_{33}

于是

$$\bar{x}_i = \beta_{ij}x_j$$

即

$$\{\bar{x}\} = [\beta]\{x\} \tag{1.19}$$

或

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

反之

$$x_j = \beta_{kj}\bar{x}_k$$

因为

$$\{x\} = [\beta]^{-1}\{\bar{x}\}$$
$$[\beta]^{-1} = [\beta]^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\{x\} = [\beta]^{\mathrm{T}}\{\bar{x}\} \tag{1.20}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

如引入任一单位矢量 $\boldsymbol{n}$,那么它的方向余弦

$$n_i = \cos(n, e_i) \tag{1.21}$$

必须满足

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n_i n_i = 1 \tag{1.22}$$

而

$$n = n_i e_i = n_j e_j$$

当 $\boldsymbol{n}$ 就是 $\bar{e}_i$ 时

$$\bar{e}_i = \cos(\bar{e}_i, e_j)e_j = \beta_{ij}e_j \tag{1.23}$$

同理

$$e_j = \cos(e_j, \bar{e}_k)\bar{e}_k = \beta_{kj}\bar{e}_k \tag{1.24}$$

把式(1.24)代入式(1.23),得

$$\bar{e}_i = \beta_{ij} \cdot \beta_{kj}\bar{e}_k$$

所以

$$\beta_{ij}\beta_{kj} = \delta_{ik} \tag{1.25}$$

即表 1.1 中,任一行或任一列三个方向余弦的平方和为 1,而任一行与另一行(或任一列与另一列)对应的方向余弦之积的和为零,如

$$\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 = 1$$
$$\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 = 1$$
$$\beta_{11}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{22} + \beta_{13}\beta_{23} = 0$$
$$\beta_{11}\beta_{12} + \beta_{21}\beta_{22} + \beta_{31}\beta_{32} = 0$$
$$\cdots$$

1.4 笛卡儿张量简介

1.4.1 标量

标量是指由一个正值或负值的数量所确定的物理量(或几何量)。或者,更一般地说,是由一个具有实值的、空间点的函数所确定的物理量。

标量分为两种:一种是与坐标系的选择无关的标量,叫做绝对标量或不变量,如物体的质量、温度、力所做的功等;另一种是作为矢量分量的标量,是与坐标系有关的标量,叫做非绝对标量。今后凡提到作为张量范畴的标量都是指绝对标量。

1.4.2 矢量

矢量是由三个与坐标系选择有关,且服从一定的坐标变换规律(在只限于直角坐标系时,则为转轴规律)的标量所确定的物理量或几何量。这三个标量叫做矢量的分量。矢量的坐标转轴规律可由任一特殊类型的矢量来建立。下面我们讨论位移矢。设位移矢 $\boldsymbol{u}$ 的三个分量为 u、v、w,则可写成

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.26a}$$

坐标轴转动后,设为 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$,它的三个分量为 $\bar{u}_i$,则有

$$\boldsymbol{u} = \bar{u}_i \bar{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.26b}$$

由上两式可见

$$u_i \boldsymbol{e}_i = \bar{u}_i \bar{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.26c}$$

用单位矢 $\bar{\boldsymbol{e}}_j$ 点乘式(1.26c)两侧,可得

$$u_i \boldsymbol{e}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j = \bar{u}_i \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j$$

或者

$$\bar{u}_j = u_i \beta_{ji} \tag{1.27a}$$

若用 $\boldsymbol{e}_j$ 点乘式(1.26c)两侧,则可得

$$u_j = \bar{u}_i \beta_{ij} \tag{1.27b}$$

式(1.27a)和式(1.27b)是矢量的转轴公式。矢量的定义可陈述如下:矢量是由三个分量所确定的,其分量为服从坐标转轴公式(1.27a)或式(1.27b)的物理量或几何量。

1.4.3 张量

设(ξ_1,ξ_2,ξ_3)、(η_1,η_2,η_3)是矢量,a_{ij}是与坐标选择有关的 9 个量。当坐标变换时,双一次形式

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \xi_i \eta_j$$

保持不变,则称取决于两个下标 i、j 的 9 个量 a_{ij}的集合为二阶张量。a_{ij}中的每一个被称为此张量(对指定坐标系)的分量。

根据上述定义,可以导出坐标变换时张量分量 a_{ij}的变换规律。当坐标变换时,应有