测绘科技专著出版基金资助
CEHUI KEJI ZHUANZHU CHUBAN JIJIN ZIZHU

THE THEORY OF NEURAL NETWORK AND ITS APPLICATIONS IN ENGINEERING

神经网络理论及其工程应用

胡伍生 编著

测绘出版社

测绘科技专著出版基金资助

神经网络理论及其工程应用

The Theory of Neural Network and Its Applications in Engineering

胡伍生　编著

测绘出版社

·北京·

内容简介

本书共分五章。第一章介绍了泛函分析的基本概念，如集合、映射、线性空间、范数、序列的收敛性、连续、极限、Cauchy 序列、完备空间等；第二章介绍了神经网络的发展概况、神经网络的特征、研究神经网络的意义及其应用前景等；第三章介绍了几个主要的神经网络的计算模型；第四章详细介绍了神经网络 BP 算法，包括 BP 算法的计算思路、理论分析、计算模型等，并针对 BP 算法存在的问题，提出了若干改进措施，本章内容融入了编者的最新研究成果；第五章主要介绍了神经网络 BP 算法在工程中的应用情况，书中列出了大量实例，涉及面较广，侧重于测绘、交通、土木等工程领域。

本书可作为测绘科学与技术学科或相关学科本科生和研究生的教材，以及相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

神经网络理论及其工程应用/胡伍生编著．—北京：
测绘出版社，2006. 1
ISBN 7-5030-1300-1

I. 神…　II. 胡…　III. 人工神经元网络
IV. TP183

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 002453 号

神经网络理论及其工程应用
胡伍生　编著
测绘出版社出版发行
地址：北京市西城区复外三里河路 50 号 邮编：100045
电话：(010)68512386 68531558 网址：www. sinomaps. com
三河艺苑印刷厂印刷　　新华书店经销
成品尺寸：169mm×239mm　印张：9. 25　字数：178 千字
2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 1 次印刷
印数：0001—2000 册
ISBN 7-5030-1300 -1/P・417
定价：22. 00 元

序　言

胡伍生教授编著的《神经网络理论及其工程应用》一书，即将出版问世，我有幸在出版前阅读全稿，实感荣幸。著者嘱我写篇序言，我也欣然同意了。

神经网络是一门新颖学科和高新技术，是一种有效解决自然科学中复杂问题的方法。因此，发展和应用人工神经元网络的理论及其在工程中的应用是当前自然科学界的热点，特别在复杂工程领域中，还存在着许多“灰色地带”（即规律不清楚的领域），用传统理论和方法难以解决这些复杂的工程问题，无疑神经网络方法是一种有效的解决途径。目前，虽然人工神经元网络在工程应用中取得了一定的进展，但仍然还有很多工作要做，如人工神经元网络的理论、模型、算法、应用和实现研究等。

胡伍生教授是我熟悉的一位优秀青年科技工作者，近几年，结合较多的实际工程，潜心研究神经网络在工程中的应用，发表了十几篇这方面的学术论文，并两次赴美参加国际学术会议，两次在会上宣读神经网络在测绘工程中应用的学术论文，引起了国外同行的浓厚兴趣。该书是他在悉心阅读了大量著作和科技论文的基础上心有所得，并加以分析和总结，同时主要融入了他本人和其他学者的最新研究成果。

我认为本书有以下特点：一是全面系统地介绍了神经网络的基本理论，既有比较深奥的泛函分析理论和知识，又对神经网络理论和计算模型作了深入浅出的介绍，并详尽介绍了在工程中应用最为广泛的 BP 算法；其二是理论密切联系工程实际，将神经网络技术广泛应用于测绘、交通、桥梁、道路、岩土等领域。因此，本书不仅具有高的学术水平，更具有重要的实用价值。

我深信本书的出版发行必将推动神经网络技术在工程领域中的应用，并深信作者一定乐意听取广大读者所提出的一切意见和问题，而将该项研究推向新的高度。

是为序。

中国工程院院士　吴中如

2005 年 5 月于河海大学

前　言

人为万物之灵，根本在大脑。人的大脑是宇宙中具有最精巧的结构、最奥妙的运行机制、最完善的功能、最快的判断和决策速度以及大容量的记忆实体。科学家们的长期目标就是要揭开人脑工作机制的奥妙，目的在于制造出接近人脑的机器，从而改善人们的物质和文化生活。从工程应用角度来看，最好是能模拟人脑的思维方式，以解决实际工程问题。

人工神经网络是一门新兴交叉学科。20 世纪 80 年代科学界掀起了一次研究人工神经网络的新高潮，许多领域的科学家对人工神经网络高度重视，并积极开展了大量研究工作，取得了不少突破性进展。工程界对人工神经网络及其应用也表现出了极大的关注和热情，希望它能在用传统理论和方法难以解决的问题方面，发挥很大的作用。目前人工神经元网络在工程应用方面，确实取得了令人鼓舞的进展，但仍然还有很多工作要做，如人工神经元网络的理论、模型、算法、应用和实现研究等。

本书有三个特点：(1)非常简练地介绍了泛函分析的有关知识，这部分内容较难，但我认为，纯数学训练有利于启发和开拓人的思维；(2)神经网络 BP 算法是目前工程应用中使用得最广泛的一种神经网络模型，因此，本书详细地介绍了神经网络 BP 算法，并针对 BP 算法存在的问题做了细致的讨论，提出了很多改进措施；(3)最后一章列举了大量的神经网络工程应用实例，工程实例涉及到测绘工程、水利工程、交通工程、岩土工程、道路与铁道工程、桥梁工程等学科领域。有些工程应用实例，其神经网络之应用的思维方式很精妙，希望这些实例能给读者以启发。

最后，感谢我的研究生何辉明、沙月进、张凤梅、梁小勇、陈刚、曾勇等，他们为本书稿做了很多事务性工作；我还要感谢 Internet，感谢参考文献的所有作者。

人工神经元网络及其应用是多学科交叉的前沿科学，它的理论高深，难度大，涉及面广，发展迅速。鉴于编著者水平有限和时间仓促，书中不可避免地存在一些不足和错误之处，恳请广大读者批评指正，以期今后改进。

胡伍生

2005 年 5 月于东南大学

E—mail：ws. hu@jlonline. com

目　录

Contents

第1章　神经网络的数学基础

§1.1　概　述

知识之海浩浩荡荡，现有知识犹如沧海一粟，而庞大的工程问题无不错综复杂，现有知识是远不足以给出完备解答的。有很多复杂工程，还存在着许多“灰色地带”(即规律不清楚的领域)，需要进一步的深入研究。人工神经网络模型是生物神经系统的一种高度简化后的近似，属于自适应非线性动力学系统，具有学习、记忆、计算和各种智能处理功能。人工神经网络是一门新兴交叉科学。从20世纪80年代以来，许多领域的科学家掀起了研究人工神经元网络的新高潮，积极开展了大量研究工作，现已取得了不少突破性进展。工程界也对神经网络技术及其应用表现出极大的兴趣，在用传统理论和方法难以解决的工程问题方面，神经网络方法确实能发挥很大作用，取得良好效果。神经网络能较好地解决具有不确定性、严重非线性、时变滞后的复杂系统的建模。

泛函分析是现代数学的重要分支，是研究拓扑线性空间到拓扑线性空间的映射(包括非线性映射)的理论。泛函分析综合利用代数、几何、分析的观点和方法为研究各种数学模型提供了基本的构架和方法，从而使应用数学、系统分析等学科领域中的基本概念更为清晰，同时也促进了基本概念的统一。相对而言，泛函分析的概念比较抽象，对于缺乏纯数学训练的人来说，要掌握泛函分析的概念和方法不是一件轻松的事情。

泛函分析起源于变分学、微分方程和函数逼近理论等领域中的研究。实际上，泛函分析可以看成是分析、代数和几何学中的概念和方法的归纳和一般化。泛函分析的研究对象是各种集合，例如数集、向量集、函数集和映射集等等，这些集合通常具有某些性质。

在很多而且重要的情形下，这些集合是线性空间。为了在这些线性空间中研究极限和连续性，还需要引进范数，这样的空间称为线性赋范空间。实数集 R、实平面 R^2 和更一般的实 n 维线性空间 $R^n=\{x\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$ 是人们所熟悉的线性空间的例子。

如果在 R^n 上定义欧几里得“长度”函数 $\|\cdot\|:R^n\to R^+$，这里，“长度”函数定义为

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

R^+ 表示全体非负实数，这时称具有"长度"函数的 R^n 为欧氏空间。线性赋范空间可以看成是欧氏空间的拓广。实际上，线性赋范空间就是在其上定义有"长度"函数（通称为范数）的线性空间。线性赋范空间是泛函分析的基本概念。

为阅读方便起见，泛函分析所用到的各数学符号及其含义见表 1.1。

表 1.1　符号说明表

符号	含　义	符号	含　义
$\in$	属于	A^c	集 A 的余集
$\notin$　$\bar{\in}$	不属于	N	自然数集
$\subset$、$\supset$	包含符号	R	实数集
$\rightarrow$	趋于极限；映射到	C	复数集
$\Rightarrow$	蕴涵；必要性	R^n	n 维欧氏空间
$\Leftarrow$	被蕴涵；充分性	A^{T}	矩阵 A 的转置阵
$\Leftrightarrow$	充分且必要；等价	A^*	算子 A 的共轭算子（伴随算子）
$\exists$	存在着；有	$f(A)$	集 A 的象
$\forall$	对所有；对每一	$f^{-1}(A)$	集 A 的原象
$\cup$	并（集）	$\triangleq$	定义为
$\cap$	交（集）	$\zeta(X,Y)$	$X \rightarrow Y$ 的有界线性算子构成的空间
$\dot{A}$	集 A 的内部	$C(X,Y)$	紧算子空间
A'	集 A 的导集	$C[a,b]$	连续函数空间
$\bar{A}$	集 A 的闭包	X^*	X 的共轭空间
$X \times Y$	X 与 Y 的积集	$\| x \|$	向量 x 的范数
$|z|$	绝对值	$\| f \|$	泛函 f 的范数
$\varnothing$	空集	$\| A \|$	算子 A 的范数

§1.2　集合和映射

1.2.1　集合

【定义 1.1】 集

集是现代数学中最基本的概念之一，它渗透于数学各个分支之中。集，用通俗的话讲，是指具有某种性质的事物的全体，其中个别事物称之为集的元素或元，有时也称为集之中的点。

【例 1.1】 全体自然数组成的集 N 可以表示成为： $N=\{1,2,3,\cdots\}$

或写成： $N=\{n;n$ 为自然数$\}$

不含任何元素的集称为空集，记作$\varnothing$。

【例 1.2】 在区间$[a,b]$上连续函数的全体所构成的集，称为区间$[a,b]$上的连续函数集，用记号 $C[a,b]$表示，该集之中的元是连续函数。

设 A,B 为两个集，若$\forall x\in A$，都有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，读作：A 含于 B(或 B 包含 A)。

【定义 1.2】 集的并、交、差

设 A,B 是两个集合，则

A 与 B 的并集记为 $\quad A\cup B\triangleq\{x;x\in A$ 或 $x\in B\}$

A 与 B 的交集记为 $\quad A\cap B\triangleq\{x;x\in A$ 且 $x\in B\}$

A 与 B 的差集记为 $\quad A-B\triangleq\{x;x\in A$ 且 $x\notin B\}$

若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 互不相交。

差集 $A-B$，也可记作 B_A^C，称为 B 关于 A 的余集(补集)。

【定理 1.1】 集的运算性质(证明从略)

交换律	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
对偶律	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

除定理 1.1 所列基本运算性质外，下面一些常用的关系式显然是成立的。

① $(A^c)^c=A$

② $A\cup A^c=X,A\cap A^c=\varnothing$

③ $A-B=A\cap B^c$

④ 若 $A\subset B$，则 $A^c\supset B^c$

⑤ 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$ 及 $B\subset A^c$

【定义 1.3】 直积

集合$\{(x,y);x\in A,y\in B\}$称为集 A,B 的直积(积集)，记为$A\times B$，即

$$A\times B\triangleq\{(x,y);x\in A,y\in B\}$$

当 A,B 中有一个为空集时，规定 $A\times B=\varnothing$。

更一般地，可以定义 n 个集合的直积

$$\prod_{k=1}^{n}A_k\triangleq\{(a_1,a_2,\cdots,a_n);a_k\in A_k,k=1,2,\cdots,n\}$$

其中记号$\prod\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。

【例 1.3】 设 $A=[a,b]$，$B=[a,b]$，则

$$A \times B = \{(x,y);a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$$

其图形是平面上的一个正方形(包含边界)。

【例 1.4】 设 R 是实数集$\{x;-\infty<x<+\infty\}$，则 $R\times R=\{(x,y);-\infty<x,y<+\infty\}$是 2 维平面点集 R^2。

1.2.2 映射

映射是函数概念的推广，也是现代数学中最基本的概念之一。

【定义 1.4】 映射

设 X，Y 是两个非空集，若有一定的法则，使每个 $x\in X$，存在一个确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称给出了一个从 X 到 Y 中的映射 f，表示为

$$f:X \to Y$$

并记

$$y=f(x),x\in X$$

称 y 为 x 在映射 f 之下的像，x 为 y 关于映射 f 的原像(逆像)，X 称为 f 的定义域，记为 $D(f)$。

Y 中子集：

$$f(X) = \{y;y = f(x), \forall x \in X\}$$

称为 f 的值域，记为 $R(f)$，即 $R(f)=\{f(x);x\in X\}$。

根据定义，X 中任一元素在 f 之下的像是唯一的。反之未必，$R(f)$中的点 y 可能在 X 中是两个以上元素的像。记号

$$f^{-1}(\{y\})\triangleq\{x;f(x) = y,x \in X\}$$

表示 y 的所有原像点的集合。

若 $B\subset Y$，则集合： $f^{-1}(B)\triangleq\{x;f(x)\in B,x\in X\}$

称为 B 的原像集，简称 B 的原像，它是 X 的子集，其中任一点的像都含于 B 中。

当 X 和 Y 为数集时，映射就是我们熟悉的函数。

与映射同义的术语还有算子、变换、对应等。

【例 1.5】 积分算子。定义映射 T：$C[a,b]\to R$，使得

$$T(f)\triangleq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \ \forall f(x) \in C[a,b]$$

值域为数集的映射也称为定义在集上的函数或称泛函数(简称泛函)。如上面积分算子 T 就是集 $C[a,b]$上的一个泛函。

【例 1.6】 导算子。若记 $C^{(1)}[a,b]\triangleq\{f(x);\ f'(x)\in C[a,b]\}$，定义映射 D：$C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$，使得

$$D(f)\triangleq \frac{d}{\mathrm{d}x}f(x), \forall f(x) \in C^{(1)}[a,b]$$

为便于研究映射性质，须将映射进行分类。

【定义 1.5】 映射的分类：单射、满射和双射

设映射 $f:X\rightarrow Y$

① 若对于 X 中任意不同的点 x_1, x_2 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是一对一映射，或称 f 为单射。如 $y=2x, x\in N, y\in N$，该映射是单射，但不是满射。

② 若 $R(f)=Y$，即 Y 中每个元素均是 X 中某个元素在映射 f 下的像，则称映射 f 为满射，或称 f 为从 X 到 Y 上的映射，否则就称 f 为 X 到 Y 中的映射。如 $y=\mathrm{int}(1+x/2), x\in N, y\in N$，该映射是满射，但不是单射。

③ 若 f 既是满射，又是单射时，称 f 为双射。如 $y=x, x\in N, y\in N$，该映射是双射。

显然，当 $f:X\rightarrow Y$ 为双射时，$\forall x\in X$，有唯一的 $y\in Y$，使 $y=f(x)$。反之，$\forall y\in Y$，必有唯一的 $x\in X$，使 $f(x)=y$，因此，由 $y=f(x)$ 可以确定一个由 Y 到 X 上的映射，记为

$$f^{-1}:Y\rightarrow X$$

称为 $f:X\rightarrow Y$ 的逆映射。即有 f 为可逆映射 $\Leftrightarrow f$ 为双射。

但要注意，$f^{-1}(B)$ 仅表示 B 的原像集，并不意味逆映射 $f^{-1}(*)$ 存在。

【例 1.7】 将 X 中每个元素 x 映成自身 x 的映射是最简单的双射，称为恒等映射，用 $I:X\rightarrow X$，且 $I(x)=x, \forall x\in X$ 表示。

【例 1.8】 线性函数 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$ 是 $R\rightarrow R$ 的双射。

1.2.3 可列集与不可列集

只包含有限个元素的集合（包括空集）常被称为有限集，否则便被称为无限集（无穷集）。

对于有限集，它的元素个数可用自然数表示。因此，比较两个有限集的元素多少是不困难的。但是，如何比较两个无限集所含元素的多少呢？这个问题涉及到对无限集本质的认识。显然对无限集用数(shu)元素个数的方法是行不通的。

19 世纪 70 年代，德国数学家 Cantor 首先提出了用“配对”的思想来讨论无限集。

【定义 1.6】 集合的对等与基数

若存在集合 A 到 B 上的某个双射，则称 A 与 B 是对等的，记作 $A\sim B$。

若 A 与 B 对等，就称它们具有相同的基数（势），用 $\overline{A}$ 表示集 A 的基数。

我们规定，与有限集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对等的集合的基数为 n，空集的基数为 0。也就是说，有限集的基数是该集合中元素的个数。因此，集的基数的概念是有限集中元素个数概念的推广。

不难验证集合的对等关系满足下面性质：

①自反性　$A \sim A$

②对称性　若 $A \sim B$,则 $B \sim A$

③传递性　若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$

一般讲,具备自反性、对称性、传递性 3 个条件的关系称为等价关系。所以,集的对等是一种等价关系,而基数给出了具有对等关系集合的一种“定量”的描述。

【定义 1.7】 可列集

凡与自然数集 $N=\{1,2,\cdots n,\cdots\}$对等的集合称为可列集(可数集)。

从定义不难看出,集合 A 为可列集,当且仅当 A 中全体元素可以用自然数加以编号,使之无一遗漏地排成一个无穷序列的形式。记为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

例如,正偶数集:(2,4,6,…,2n,…},正奇数集:$\{1,3,5,\cdots,2n-1.\cdots\}$,整数集:$Z=\{0,-1,1,\cdots,-n,n,\cdots\}$等,都是可列集。

由上可看到,一个无限集可以和它的真子集对等。这意味着一个无限集可以和它的某个真子集看作具有“一样多”的元素,这正是康托(Cantor)“配对”思想的核心,反映了无限集的一种本质属性。

【例 1.9】 有理数集 Q 是可列集。

证明　因为任何有理数都能唯一地表示成既约分数$\dfrac{p}{q}$的形式,其中 p,q 为整数,$q>0$,于是 Q 中元素形式上就可记为

$$Q=\{r_{p,q};q,p\in Z,q>o,p,q\text{ 互质}\}$$

可以证明,集$\{r_{p,q};p,q\in Z\}$是可列集,而 Q 是它的无限子集,故 Q 为可列集。

绝非所有无限集都是可列集,开区间(a,b)实数集就是典型的不可列集。

【例 1.10】 实数集(0,1)是不可列集。

证明(反证法)　若设(0,1)为可列集;于是该集之中的所有元素可排成一列,不妨设

$$(0,1)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

其中 $a_i\in(0,1),i=1,2,\cdots$。每一 a_i 均可表示成无限小数的形式,且当规定有限小数写成以 9 为循环节的无限小数时,表示是唯一的。

设
$$\begin{aligned}a_1&=0.\,p_{11}p_{12}p_{13}\cdots\\a_2&=0.\,p_{21}p_{22}p_{23}\cdots\\a_3&=0.\,p_{31}p_{32}p_{33}\cdots\\&\vdots\end{aligned}$$

构造一数:　$x=0.\,x_1x_2x_3\cdots$　　其中 $x_n=\begin{cases}1 & \text{当 } p_{m}\neq 1\\0 & \text{当 } p_{m}=1\end{cases}$

则 x 与所列任一 a_i 均不相同。但是 $x\in(0,1)$,说明$\{a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots\}$不能完全列

举(0,1)中所有元素,导出矛盾,故(0,1)为不可列无限集。

“自然数集”与“区间(0,1)实数集”代表了两类基数不同的无限集。由于任意无限集都必含有可列子集。因此,从某种意义上讲,可列无穷是元素个数“最少”的无限集。

1.2.4 实直线上的开集和闭集

极限是分析中最基本的概念之一。对极限过程的描述,最重要的是如何准确地刻划所谓“点与点的接近”。即必须以某种适当的方式来说明一些点靠近某个点的程度。

例如,数列 $x_n \to x_0(n\to\infty)$ 就可用开区间这种集合概念来描述。即对任给的含有 x_0 点的开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$,总存在 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 成立。

【定义 1.8】 R 中的邻域

设 $x_0\in R,\varepsilon>0$,则集 $V(x_0,\varepsilon)\triangleq(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 称为以 x_0 为中心,ε 为半径的邻域,简称 x_0 点的 ε 邻域,简记 $V_\varepsilon(x_0)$。

利用邻域的概念就可以讨论直线上各种类型点集的性质及点与集合之间的关系。

【定义 1.9】 内点、聚点和闭包

设 $A\subset R,x\in R$,则

①若存在 $\varepsilon>0$,使 $V_\varepsilon(x)\subset A$ 则称点 x 为集合 A 的内点,用 $\mathring{A}$ 表示 A 的全体内点所成之集,称为 A 的内部(开核)。

②若对任何 $\varepsilon>0$,都有 $A\cap(V_\varepsilon(x)-\{x\})\neq\varnothing$,即 x 的任一 ε 邻域内都含有 A 中异于 x 的点,则称 x 是 A 的一个聚点,用 A' 表示 A 的全体聚点所成之集,称为 A 的导集。

③A 与其导集 A' 的并集记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=A\cup A'$,称为集 A 的闭包。

由定义,集合的内点必属于该集之中,但聚点却未必一定属于该集。

【定义 1.10】 开集、闭集

当 $A=\mathring{A}$ 时,集 A 称为开集,并规定空集为开集;当 $A^c=R-A$ 为开集时,称集 A 为闭集。

从定义知道,A 为开集$\Leftrightarrow A$ 中的点均为 A 的内点$\Leftrightarrow\forall x\in A,\exists\varepsilon_x>0$,使得 $V\varepsilon_x(x)\subset A$。

又,开集的余集是闭集,闭集的余集是开集。于是,容易知道 R 中任何开区间,包括 R 本身均为开集;R 中任何闭区间,包括 R 和 $\varnothing$ 均为闭集。但是,须指出,R 中点集除去开集、闭集外,还有大量非开非闭的集合。如 $[a,b)$、

$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$等等。

【定理 1.2】 开集的性质(证明从略)

① $\varnothing$,R 是开集;

② 任意多个开集的并集是开集;

③ 有限个开集的交集是开集。

【定理 1.3】 闭集的性质(证明从略)

① $\varnothing$,R 均为闭集;

② 任意多个闭集的交集是闭集;

③ 有限个闭集的并集是闭集。

注意,无穷多个开集的交集未必仍是开集,无穷多个闭集的并集也未必是闭集。例如,虽然 $G_k=\left(-\frac{1}{k},1\right)$ $(k=1,2,\cdots)$均为开集,但是$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k=[0,1)$却非开非闭。

【定理 1.4】 闭集的特征性质

A 为闭集$\Leftrightarrow A=\overline{A}$

证明 A 为闭集$\Leftrightarrow A^c$ 为开集$\Leftrightarrow \forall x\in A^c,\exists \varepsilon_x>0$,使 $V(x,\varepsilon_x)\subset A^c$

$\therefore A\cap V(x,\varepsilon_x)=\varnothing$,故 $x\overline{\in}\overline{A}$,$\forall x\in A^c\Leftrightarrow\overline{A}\subset A$, 即 $A=\overline{A}$。

定理指出,集 A 为闭集的充要条件是 A 包含了它的全部聚点(极限点)。因此,在闭集中对其点列的极限运算是封闭的,这是 R 中闭集的极好之性质。

由此可知,R 中有限点集、空集、实直线 R 本身均为闭集。在实直线上 R 和$\varnothing$既是开集又是闭集。

【例 1.11】 $\dot{A}$ 恒为开集,$\overline{A}$ 恒为闭集。

在 R 中定义了邻域、开集、闭集等概念,通常也称为在 R 中引入了拓扑结构。这些概念很容易推广到 n 维欧氏空间 R^n 中。

§1.3 线性赋范空间

1.3.1 线性空间

【定义 1.11】 线性空间

设 W 是一个非空集合,K 是数域(例如实数域或复数域),并且有两个映射,一个是加法映射"+":$W+W\to W$,或者$(x,y)\to x+y$,通常称为加法。另一个是数乘映射"·":$K\times W\to W$,或者$(a,x)\to ax$,通常称为数乘。

加法映射和数乘映射满足下面的条件:

① $x+y=y+x$，对所有的 $x,y\in W$；

② $(x+y)+z=x+(y+z)$，对所有的 $x,y,z\in W$；

③ W 中存在唯一的零元素 0，使得对每一个 $x\in W$，满足 $x+0=0+x=x$；

④ 对每一个 $x\in W$，存在唯一的逆元素 $-x\in W$，使得 $x+(-x)=0$；

⑤ $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$，对所有的 $x\in W$ 和所有的 α、$\beta\in K$ 都成立；

⑥ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，对所有的 $x\in W$ 和所有的 α、$\beta\in K$ 都成立；

⑦ $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，对所有的 $x,y\in W$ 和所有的 $\alpha\in K$ 都成立；

⑧ $1x=x$，对所有的 $x\in W$ 都成立，这里 1 是数域 K 中的单位元素。

这时，称 W 是数域 K 上的线性空间，或向量空间，有时也简称 W 是线性空间。

今后，将限于讨论 K 是实数域 R 或者复数域 C 的情形，这时将分别称 W 是实线性空间或复线性空间。本书中未区分零元素与数零的记号，相信不致引起混淆。简单地说，如果一个非空集合上定义了加法和数乘运算，这些运算满足交换律、结合律和分配律等，这时就形成了一个线性空间。

下面举一些线性空间的例子。

【例 1.12】 令 $W=R,K=R$；加法和数乘取通常的运算意义，这时 W（即实数域 R）是一个线性空间。

【例 1.13】 令 W 是所有阶数不超过 n 的实多项式组成的集合，这里 n 是一固定正整数，$K=R$，这时 W 是实线性空间。

【例 1.14】 令 $W=R^n=\{x\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$，其中加法和数乘定义为

① 加法：$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$

② 乘法：$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$，$\alpha\in R$，这时 $W=R^n$ 是线性代数中所熟悉的 n 维实向量空间。

【例 1.15】 令 W 是全体复 $m\times n$ 矩阵组成的集合，$K=C$，矩阵的加法和数乘运算取通常的意义，这时 W 是复线性空间。

【例 1.16】 令 $W=\{x\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots);x_i\in R,n=1,2,\cdots\}$，因为 W 中每一个元素 x 可以看成是一个序列，有时也称 W 是序列空间，其中加法和数乘运算定义为

① 加法：$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$

② 乘法：$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n,\cdots)$

这里，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in W$，$\alpha\in R$，$W$ 也形成一个实线性空间。这是无限维向量空间。

【例 1.17】 令 W 是[0,1]区间上全体实 Riemann 平方可积函数组成的集合，