

碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学
学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

线性代数 同步辅导

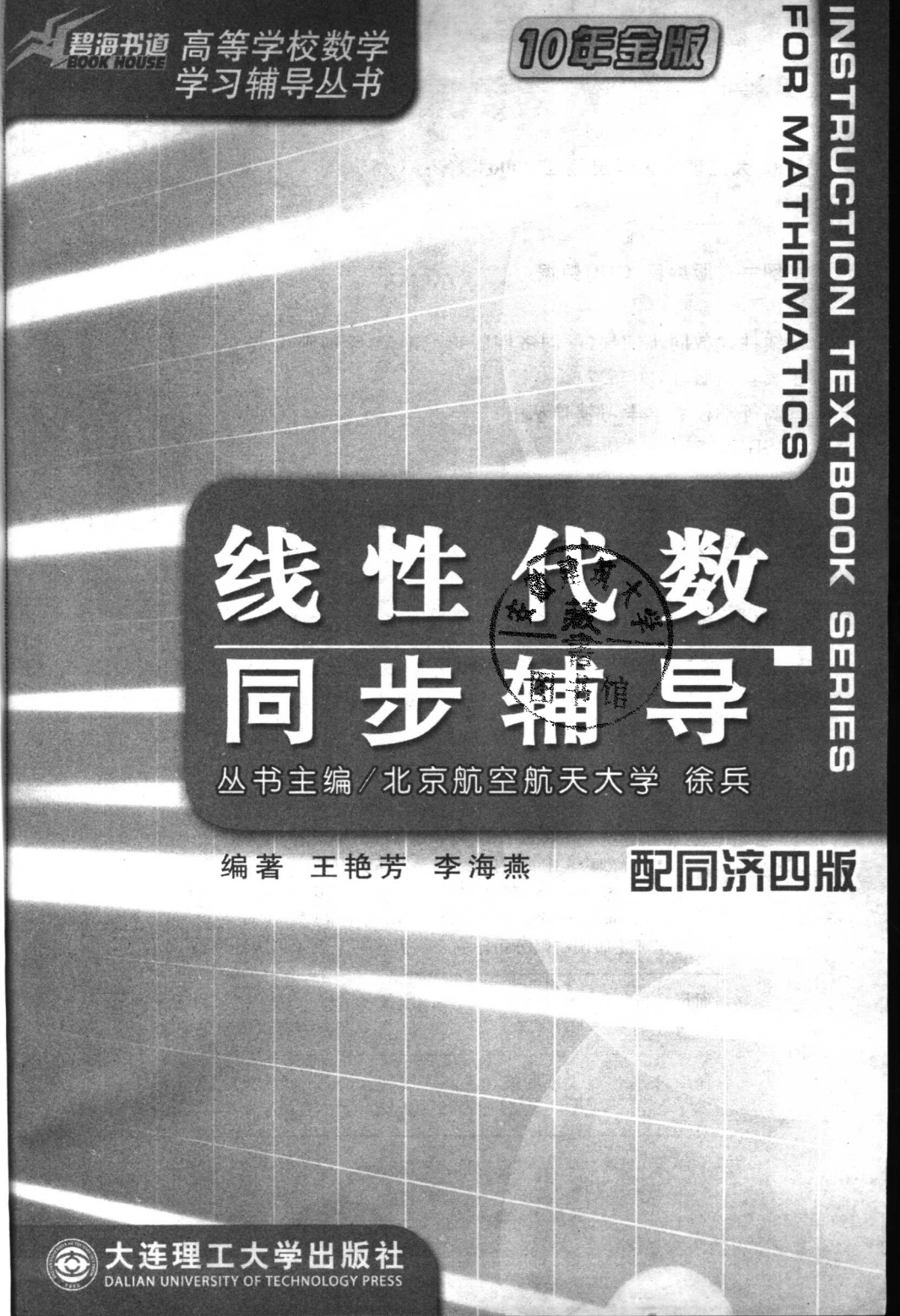
丛书主编 / 北京航空航天大学 徐兵

编著 王艳芳 李海燕

配同济四版



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

10年金版

碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学
学习辅导丛书

线性代数 同步辅导

丛书主编 / 北京航空航天大学 徐兵

编著 王艳芳 李海燕

配同济四版



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2006

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导(配同济四版)/王艳芳,李海燕编著.——大连:大连理工大学出版社,2006.7

高等学校数学学习辅导丛书

ISBN 7-5611-3248-4

I. 线… II. ①王… ②李… III. 线性代数—高等学校—教学参考资料
IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072197 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm

印张:9

字数:360 千字

2006 年 7 月第 1 版

2006 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 邱明霞

责任校对:碧 海

封面设计:熔 点

定 价:12.00 元

丛书特色

名校名师亲自编写 作者教学经验丰富，深受学生欢迎，作者亲力亲为。

立体化多层次设计 精心设计四大系列丛书：

- ◆ **习题全解（全析）系列** “不是好学生的作业本，而是优秀教师习题课的教案”。
- ◆ **同步辅导系列** 帮助学生适应从中学到大学学习方式的转变。
- ◆ **全程学习指导系列** 培养学生基本解题能力，同时兼顾考研基本题型的介绍，使课程学习与考研准备相衔接。
- ◆ **典型题精讲系列** 在更高层次上引导学生掌握数学算理与数学思想。

全新理念，全新组合 帮助读者培养用数学思想进行逻辑思考的能力，用数学力增强读者的竞争力。

编读互动

免费下载学习资源 设有专用网站，读者可以免费下载自测试题，拜读相关知名人士的教学、人生心得。

自选名师亲自答疑 读者可以将问题发到指定邮箱，并可指定编委会的任一老师给予解答。

挑错有礼 真诚欢迎读者指正书中的编写及印刷错误并提出合理化建议，一经核实并采纳，我们将对最早提出的读者赠送相关图书。

联系方式

网 址：<http://www.bhsd.dutp.cn>

E-mail：bihaishudao@dutp.cn

电 话：0411-84708947 84707962

通讯地址：大连市软件园路80号理工科技园B座
大连理工大学出版社

科技教育出版中心“碧海书道”收

邮政编码：116023

团购热线：0411-84708898

**我们坚决反对假借知名高校名义
并编造作者的行为！**

我们坚决抵制让学生代笔的行为！

我们致力于打造“零差错”图书！

碧海扬帆书做伴 长空翱翔道为先
碧海书道 强势推出

高等学校数学学习辅导丛书

习题全解（全析）系列

高等数学习题全解全析（配同济五版）

线性代数习题全解全析（配同济四版）

概率论与数理统计习题全解全析（配浙大三版）

微积分习题全解（配人大修订版）

线性代数习题全解（配人大三版）

概率论与数理统计习题全解（配人大修订版）

数学分析习题全解全析（配华东师大三版）

高等代数习题全解全析（配高教四版）

近世代数习题全解全析

同步辅导系列

高等数学同步辅导（配同济五版）

线性代数同步辅导（配同济四版）

概率论与数理统计同步辅导（配浙大三版）

全程学习指导系列

高等数学全程学习指导（配同济五版）

线性代数全程学习指导（配同济四版）

概率论与数理统计全程学习指导（配浙大三版）

微积分全程学习指导（配人大修订版）

线性代数全程学习指导（配人大三版）

概率论与数理统计全程学习指导（配人大修订版）

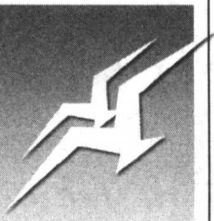
典型题精讲系列

高等数学典型题精讲

线性代数典型题精讲

封面设计：

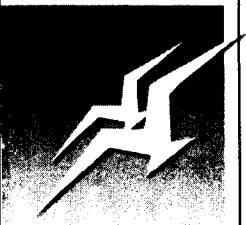




高等学校数学学习辅导丛书 编写委员会

主 任	北京航空航天大学	徐 兵	教授
副主任	清华大学	韩云瑞	教授
委 员	大连理工大学	姜乃斌	教授
	浙江大学	秦禹春	教授
	大连大学	王丽燕	教授
	大连海事大学	王志平	教授
	南开大学	周概容	教授

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课,对理工类、经管类学生都非常重要。21 世纪是知识经济时代,数学的重要性更显突出,人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说,其重要性更是不言而喻。

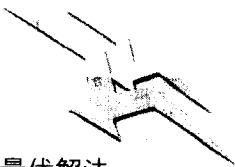
作为一名从事大学数学教学和科研工作 40 余年的教师,我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10 多年来,该社先后出版了 50 余种相关的大学数学辅导图书,我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书,对于图书的内在质量和选题设计,我非常认可,因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上,大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10 周年之际,我受出版社之托,担任该系列丛书编委会主任,深感责任重大。一方面,需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质;另一方面,需要在对现有图书进行规划和整合的基础上,结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此,本次修订主要围绕以下几个方面展开:

第一,坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校,并且都是知名教师。例如,韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中,2005、2006 连续两年全校排名第一;大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”;南开大学的周概容教授连续 17 年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二,对于全部习题进行重新演算,以保证解题过程的正确,而

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题,努力寻求最优解法,对于重点例题、习题给出多种解法,以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力,可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三,针对学生不同的学习阶段,设计了不同层次的系列图书,力图为学生提供学习数学的立体空间,引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学,从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门,要尽快适应大学的学习环境,注重夯实大学数学的基础,为学习专业课打下基础;高年级阶段,很多学生准备进一步学习深造,报考研究生,对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点,本套丛书设计了四大系列。

习题全解(全析)系列 为读者解答教材中的习题,像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握基础知识,领悟数学的真谛。本系列图书“不是好学生的作业本,而是优秀教师习题课的教案”。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列 按节同步,讲解细致,其主要特点是“基础、同步”,帮助读者重点掌握大学数学中的“基本概念、基本理论、基本方法”。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代“以老师讲解为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变。

全程学习指导系列 指导学生准确理解大学数学中的概念、原理,熟练掌握解题的基本思路、方法,提高分析问题、解决问题的能力,同时,让学生熟悉研究生考试的各类题型,在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列 以习题讲解为主,在注重基本解题能力培养的同时,增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题,在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

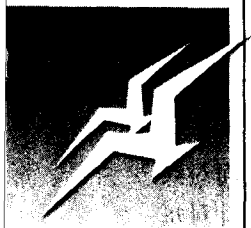
我们欢迎读者通过各种方式与我们联系,提出建议与意见,以利于本套丛书千锤百炼,惠及更多学子。

祝大家学习进步,前程似锦!

徐 兵

2006年6月

于北京航空航天大学



编者的话

《全程学习指导》系列图书自出版以来,连年加印,数次修订,成千上万的学生从中获益,我们深感欣慰。但是,在教学过程中我们也发现,仍然有相当多的学生由于不适应从中学时代“以老师讲课为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变,再加上进入大学校门后不适应新的学习环境,使得很多学生对大学数学的学习有一种畏惧感。

《同步辅导》系列图书针对以上问题,按节同步,重在基础,讲解细致。

本书分为宏观分析和微观精讲两大部分。

宏观分析部分包括“导读”、“本章知识脉络图”和“应记应背”三个版块。

导读 介绍本章的主要内容及其相互联系、重点难点等;

本章知识脉络图 则将本章知识点以及相互联系用图表的形式直观展现,一目了然;

应记应背 将一些常用的、应该牢记的公式集中列出。理解并记住这些公式将大大提高解题效率。

本部分重在帮助读者总结、精炼、提高,是学习中“由多到少”的过程。

微观精讲部分包括“同步精讲精练”、“教材习题同步解析”和“单元测试”三个版块。

同步精讲精练 针对每一节,给出应该掌握的基本知识以及应注意点,使读者透彻、深入地理解基本概念、基本理论,这是对课堂的补充,是“弦外之音”。本版块对难点、易错点都逐一进行剖析,不

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



厌其烦,使读者进入课堂和伴读的环境。对于计算题,给出了做题的基本步骤。许多读者觉得学习时一看就懂,下笔就错。这实质上还是基础知识不扎实,练习少的表现。针对这一问题,本版块一方面对典型例题进行剖析,指导读者分析问题和解决问题。另一方面,针对每一节配备了精选的自我测试题,精讲精练,讲练结合,分解难点,无阶梯进步,是本板块的宗旨。

教材习题同步解析 为了方便读者对照和分析自己完成作业的情况,本书给出了配套教材中的全部习题解答。此答案只是提供一种思路,一种方法,大家千万不要照抄。

单元测试 每章末给出“单元测试”,可以作为阶段复习的成果检验。

本部分是学习中“由少到多”的过程。

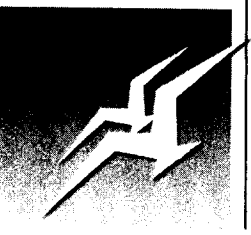
为了能将平日的学习与考研有机联系,书中有针对性地选用了部分考研试题。为增加信息量,考研真题采用“年代/类别/分值”标注方式,如“060106”,说明此题是2006年数学一的考题,分值6分。

《线性代数》是大学各门类、各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲),以及教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写,与被全国许多高校采用的《线性代数》(同济第四版)配套。

希望读者通过 E-mail 等方式给我们提出宝贵意见和建议。

王艳芳 李海燕

2006年7月



目 录

第一章 行列式 / 1

导 读 / 1

本章知识脉络图 / 2

应记应背 / 2

同步精讲精练 / 4

教材习题同步解析 / 20

单元测试 / 41

第二章 矩阵及其运算 / 45

导 读 / 45

本章知识脉络图 / 46

应记应背 / 46

同步精讲精练 / 47

教材习题同步解析 / 63

单元测试 / 85

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组 / 88

导 读 / 88

本章知识脉络图 / 89

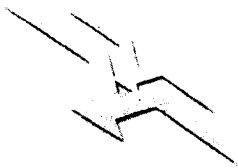
应记应背 / 89

同步精讲精练 / 90

教材习题同步解析 / 101

单元测试 / 121

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



第四章 向量组的线性相关性 / 125

导 读 / 125

本章知识脉络图 / 126

应记应背 / 126

同步精讲精练 / 127

教材习题同步解析 / 148

单元测试 / 179

第五章 相似矩阵及二次型 / 184

导 读 / 184

本章知识脉络图 / 185

应记应背 / 185

同步精讲精练 / 187

教材习题同步解析 / 215

单元测试 / 249

第六章 线性空间与线性变换 / 253

导 读 / 253

本章知识脉络图 / 254

应记应背 / 254

同步精讲精练 / 256

教材习题同步解析 / 269

单元测试 / 277

第一章 行列式

导 读

线性代数是高等数学的一部分。它的主要目的是求解线性方程组的解,求线性方程组的解使用的主要工具之一是行列式。要学好线性代数,理解行列式的概念和性质,掌握行列式的计算方法是十分必要的。第一章主要包括行列式的计算和应用两部分内容。

本章第一节主要讲解二、三阶行列式的定义和计算方法(对角线法则)。第二节给出了比较抽象的数学概念——全排列及逆序数,理解好这两个概念及能够分析三阶行列式展开式的特征,是学好 n 阶行列式的关键。第三节给出 n 阶行列式的定义,这是本章的难点。要真正理解 n 阶行列式的定义是有一定难度的,分为3点来理解就容易得多:①其展开式共有 $n!$ 项;②每一项都是取自于不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和;③各项的符号是:当这一项中 n 个元素的行指标按自然顺序排列时,由这 n 个元素的列指标所组成的排列为偶(奇)排列,该项取正(负)号。第四节利用对换与排列的关系给出了 n 阶行列式定义的另一形式。第五节主要介绍了行列式的性质,学好行列式的性质对求行列式的值是大有好处的。可以利用行列式的性质将行列式化为上(下)三角形行列式,也可以利用行列式的性质将行列式的某一行(列)化为只有一个非零元素的形式,然后按该行(列)展开(下节介绍)。第六节讲解了计算行列式的一种最基本的方法——按行(列)展开。行列式的计算是本章的重点。基本方法有:①定义法;②三角形法;③展开法。特殊方法有:①对角线法则(二、三阶行列式);②范德蒙行列式;③数学归纳法;④递推公式;⑤加边法;⑥分解之和法;⑦三对角行列式。第七节着重讲解行列式的一个应用——克拉默法则,它主要解决了求 n 个未知量 n 元非齐次线性方程组的唯一解问题。用行列式的值可以判断齐次线性方程组解的情况。

本章重点是行列式的计算,给出10种方法供读者参考。掌握这10种方法,求行列式值的问题就迎刃而解了。

本章知识脉络图

行列式的引入:二、三阶行列式

排列、逆序数、奇(偶)排列

n 阶行列式定义: $D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, t 为排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$

的逆序数(不同行不同列的 n 个元素乘积的代数数)

行列式

性质 {
 两个翻:全翻(转置)不变,部分翻(交换)变号
 三个零:某行(列)元素全为零,两行(列)对应位置元素相等
 两行(列)对应位置元素成比例
 三个可:可提性、可分性、可加性

展开式: $D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$

计算方法 {
 基本方法:定义法、三角形法、展开法
 特殊方法:对角线法则、范德蒙行列式、数学归纳法、递推公式、加边法、分解之和法、三对角行列式等

应用 {
 克拉默法则:求非齐次线性方程组惟一解
 讨论齐次线性方程组解的情况

应记应背

① 行列式性质:两个翻、三个零、三个可。

② 上(下)三角形行列式的值等于其主对角线上元素乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

③ 次三角形行列式的值等于次对角线元素乘积添加符号,即

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} &= \begin{cases} D(\text{行列式值}) & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\
 \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} &= \begin{cases} D(\text{行列式值}) & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
 \end{aligned}$$

⑤ 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

⑥ 当线性方程组系数行列式 $D \neq 0$ 时:

(1) 齐次线性方程组有且只有零解;

(2) 非齐次线性方程组有惟一解, 且 $x_j = \frac{D_j}{D}$ ($j=1, 2, \dots, n$).

同步精讲精练

一、二阶与三阶行列式

助 学

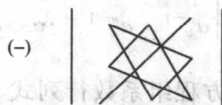
由 2^2 个元素 $a_{ij} (i, j=1, 2)$ 所构成的 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式(横排为行,纵排为列, a_{ij} 为元素,第一、二角码分别代表行、列标)。它的计算比较简单,其值为主对角线上两个元素之积与副对角线上两个元素之积的差,即 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 。如: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 5 = -7$ 。我们重点讲三阶行列式的计算,仔细观察三阶行列式的展开式,从中找出规律性,为理解 n 阶行列式的定义打下基础。

定义:称由 $9(3^2)$ 个数排成的 3 行 3 列表数

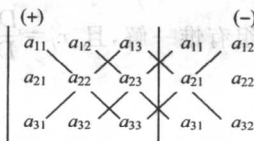
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

为三阶行列式。等式右端为其展开式(行列式的值)。

三阶行列式的展开式虽然很繁杂,但行列式元素构成的规律却很简单。一个明显的规则就是所谓的对角线法则,对角线法则可以借助于图形记忆。



或者



如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\
 = 2 \times 3 \times 5 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 3 \times (-4) - 2 \times 3 \times 2 - \\
 1 \times 3 \times 2 - 1 \times (-4) \times 5 \\
 = 30 + 2 - 24 - 12 - 6 + 20 \\
 = 10$$

自我测试

1. 求值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{反对称行列式})$$

$$2. \text{求} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0 \text{ 的充分必要条件.}$$



参考答案及提示

$$1. (1) 18 \quad (2) a^3 - 4a \quad (3) 0$$

$$2. |a| < 1$$

二、全排列及其逆序数

助 学

1. 全排列

把 n 个不同的元素 $1, 2, \dots, n$ 排成一行, 称为 n 个元素的全排列 (n 级排列)。排列的总数为 $n!$ 。

如: 1324 为一个 4 级全排列, 而 1354 和 1334 不为 4 级排列。



一个 n 级排列必由 n 个不重复、不遗漏的元素所组成。