UMSS

大学数学科学丛书 —15

有限群表示论

孟道骥 朱 萍 编著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　15

有限群表示论

孟道骥　朱　萍　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书是南开大学数学系本科生与研究生的选修课教材，讲述有限群的有限维表示. 内容包括：基本概念，群表示的特征标，点群的表示，群代数与对称群的表示，有限群的实表示与复表示，有限群表示在群论中某些应用和有限群的模表示等. 本书力求将抽象理论与具体例子相结合，代数与几何相结合，文字与图形相结合，深入与浅出相结合.

本书可作为高等院校数学系本科生与研究生的教材，也可供相关教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

有限群表示论/孟道骥 朱萍编著. —北京：科学出版社，2006

(大学数学科学丛书；15/李大潜主编)

ISBN 7-03-017735-5

I. 有… II. ①孟… ②朱… III. 有限群-群表示-高等学校-教材 IV. O152. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 085477 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：刘亚琦

责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

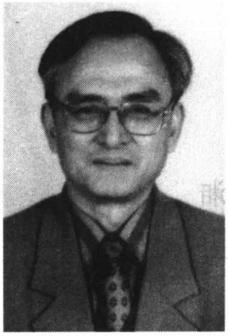
2006 年 8 月第一次印刷 印张：13 1/4

印数：1—3 000 字数：247 000

定价：30. 00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

作者简介



孟道骥，1938年生于四川省遂宁市．南开大学教授，博士生导师．曾主持国家自然科学基金项目、教育部博士点基金项目、教育部理科人才培养基地创造优秀名牌课程优秀项目、全国精品课程项目等．曾获国家教委及天津市科技进步奖等奖项．发表论文百余篇，著有《高等代数与解析几何》、《代数学基础》、《微分几何》(与梁科合作)、《复半单李代数引论》、《李群》(与白承铭合作)、《完备李代数》(与朱林生，姜翠波合作)和《Riemann 对称空间》(与史毅茜合作)等著作．

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

序 言

从古典数学到现代数学有两个极重要的转折. 一个是 Newton 和 Leibniz 创建的微积分. 将微积分用于几何, 则有微分几何与积分几何的发展. 解决含有未知函数的微分或积分的方程就发展了微分方程或积分方程的理论. 另一个是 Galois 在解决高次方程的根式解的问题时, 考虑了根的置换, 这是群论的开始. Jordan 系统地论述了群论和 Galois 理论. 随着群论的建立, 发展了抽象代数理论. 这些构成了 20 世纪数学发展的支柱, 促进了 20 世纪数学的飞跃发展.

群论是从 Galois 研究高次方程的根的置换开始的, 直到 19 世纪末 20 世纪初, 由 Frobenius 和 Burnside 独自开创了由线性群 (或等价的矩阵群) 来描述群的理论 (即群表示论), 群论才可以说形成了一个完整的系统的理论体系.

Frobenius 的工作由 Schur 改善和简化. 由诱导表示得到的 Frobenius 互反律、特征标乘积分解等是群表示论的主要工具. Burnside 定理 (p^aq^b 阶群是可解群) 是群表示论应用于有限群研究的最早的著名结果. 20 世纪 20 年代, Noether 强调了 “模” 这一代数结构的重要性, 她把代数结构理论和群表示理论融合为一, 推进了这两个分支的发展. 现今不仅有限群有 “表示理论”, 而且许多代数结构 (如结合代数、李群、李代数等) 都有 “表示理论”, 从而形成了广泛的 “表示理论”.

Brauer 将群表示理论大大深化, 引进了有限群的模表示理论, 建立了模表示与常表示的关系, 使群表示论在有限群结构理论中起着日益重要的作用. Feit 与 Thompson 证明了 Burnside 猜想, “奇数阶群是可解群” 是这方面的第一个重要结果. 有限单群分类问题的解决, 也是依赖于群的表示理论. 可惜受篇幅限制, 只能向读者简单介绍群的模表示理论.

群论的建立和发展, 除代数学本身的原因外, 还有几何的、物理的、化学的原因. “群” 是 “对称性” 的表现与描述. 有两类很好表现对称性的有限群. 一类自然是正多面体的对称群, 即点群. 点群的表示在物理学和化学中都是很有用的. 另一类是 n 个文字的置换群, 或对称群. 对称群的表示与多项式理论、组合数学都有密切联系, 受篇幅所限这里不向读者介绍了.

由于物理及几何的对象是在实空间中, 因此群的实表示是很重要的研究对象. 实表示的解决依赖于复表示的理论.

以上这些内容, 就是本书, 也就是我们在 “有限群表示论” 这门选修课以及模表示论的讨论班中介绍的内容. 这些只能算是有限群表示论的 ABC, 甚至只能算是 A. 希望这样的介绍多少有些用处. 白承铭教授、朱富海副教授及王立云副教授在讲授

此课程时, 也曾使用这个讲义并提了许多宝贵的建议. 作者衷心感谢他们. 我们要感谢白瑞蒲教授、陈良云副教授及所有参加这个讨论班的教师和研究生. 作者还要特别感谢张世清教授和王宏玉教授邀请前一作者到他们学校讲授本课程, 提供了一个交流的机会. 作者在讲授本课程与撰写本书时, 还得到许多朋友的热心帮助, 如陈永川教授、侯庆虎副教授、史毅茜副教授、孔小丽及孟新宇等, 在此谨致衷心的谢意. 还要恳请未及提到的朋友们的宽恕.

我们要深深地感谢中国科学技术大学数学系为前一作者提供了优越的工作环境, 本书最终就定稿于这样的优越环境中.

作者要感谢科学出版社的吕虹编审和她的同事们, 本书得以出版是与他们的辛勤工作分不开的. 我们还要感谢国家自然科学基金 (基金号: 10571119)、南开大学和教育部核心数学与组合数学重点实验室的一贯的大力资助.

孟道骥　朱　萍

2006 年 6 月

目　录

*　　　*　　　*

第一章　基本概念

在本章中我们主要介绍群表示的一些基本概念, 为了叙述方便, 我们在 §1.1 中简要地叙述了线性变换与矩阵; 在 §1.2 中给出群表示的定义与一些重要的例子; §1.3 中介绍群表示的有关可约性的定义, 并证明了表示论中第一个基本定理 —— 完全可约性定理; 在 §1.4 中给出了表示张量积的概念, 特别给出了表示的对称方与交错方的概念; 在本章的最后一节, 定义了群代数, 以环的理论或结合代数理论的观点来研究群表示论时, 群代数是一个极重要的基本概念.

以后, 以 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 及 $\mathbf{C}$ 分别表示自然数 $\{1,2,3,\cdots\}$ 的集合、整数环、有理数域、实数域及复数域. $\cong$ 则为同构的符号.

§1.1　线性变换与矩阵

设 $\mathbf{F}$ 是一个域, U, V 是 $\mathbf{F}$ 上的两个线性空间. 在本书中, 总是假定所讨论的线性空间是有限维的.

我们以 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 表示从 U 到 V 的所有线性映射的集合, 有时为明确指出我们所讨论的线性空间的基域 $\mathbf{F}$, 也记作 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}}(U,V)$, 即 $\forall\alpha\in\mathrm{Hom}(U,V)$, α 是从 U 到 V 的映射（简记为 α: $U\to V$）满足 $\forall u_1,u_2\in U$, $k_1,k_2\in\mathbf{F}$,

$$\alpha(k_1u_1+k_2u_2)=k_1\alpha(u_1)+k_2\alpha(u_2). \tag{1.1.1}$$

在 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 中, 我们可以定义加法与数乘. 对于 α_1, $\alpha_2\in\mathrm{Hom}(U,V)$, $k\in\mathbf{F}$, $\alpha_1+\alpha_2$, $k\alpha_1$ 由下面关系定义：

$$(\alpha_1+\alpha_2)(u)=\alpha_1(u)+\alpha_2(u), \tag{1.1.2}$$

$$(k\alpha_1)(u)=k\alpha_1(u), \tag{1.1.3}$$

$$\forall u\in U,\ k\in\mathbf{F}.$$

不难验证, $\mathrm{Hom}(U,V)$ 对此加法与数乘是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 而且有

$$\dim\mathrm{Hom}(U,V)=\dim U\cdot\dim V\,. \tag{1.1.4}$$

为了具体地刻画 $\mathrm{Hom}(U,V)$, 我们先介绍一些大家也许不十分熟悉的符号.

分别以 col_jA, row_iA, $\mathrm{ent}_{ij}A$ 表示矩阵 A 的第 j 列, 第 i 行, 第 i 行、第 j 列处的元素. 特别地, 当 A 是一个列矩阵 (行矩阵) 时, 以 ent_iA 表示 A 的第 i 个元素, 即 row_iA (col_iA).

若 U 是 $\mathbf{F}$ 上的 m 维线性空间, $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 为 U 的一组基, 记 $u \in U$ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 下的坐标为

$$\mathrm{crd}(u; e_1, e_2, \cdots, e_m) = \mathrm{crd}(u; e) = \mathrm{crd}u\,. \tag{1.1.5}$$

后两项是在不引起混淆时的简略记号.

如果 $e_1', e_2', \cdots, e_m'$ 是另一组基, 则称矩阵

$$T = T\begin{pmatrix} e_1\, e_2 \cdots e_m \\ e_1'\, e_2' \cdots e_m' \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathrm{col}_j T = \mathrm{crd}(e_j'; e_1, e_2, \cdots, e_m) \tag{1.1.6}$$

为从基 $e_1, \cdots, e_m$ 到基 $e_1', \cdots, e_m'$ 的过渡矩阵. $\forall u \in U$, 大家熟知下面的公式:

$$\mathrm{crd}(u; e_1', e_2', \cdots, e_m') = T^{-1}\mathrm{crd}(u; e_1, e_2, \cdots, e_m). \tag{1.1.7}$$

回到 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 的情况, 设 $e_1, \cdots, e_m$; $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 分别为 U, V 的基, $\alpha \in \mathrm{Hom}(U, V)$ 可以惟一确定一个矩阵

$$M(\alpha) = M(\alpha; e_1, \cdots, e_m; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n),$$

满足

$$\mathrm{col}_j M(\alpha) = \mathrm{crd}(\alpha(e_j); \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n). \tag{1.1.8}$$

称 $M(\alpha)$ 为 α 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_m; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

显然,

$$\begin{cases} M(\alpha + \beta) = M(\alpha) + M(\beta), \\ M(k\alpha) = kM(\alpha), \end{cases} \tag{1.1.9}$$

而且对 $\forall A \in \mathbf{F}^{n\times m}$ ($\mathbf{F}$ 上所有 n 行 m 列的矩阵的集合), 可以惟一地确定一个 $\alpha \in \mathrm{Hom}(U, V)$ 使得

$$M(\alpha) = A.$$

因而 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 是与 $\mathbf{F}^{n\times m}$ 同构的线性空间.

又若 $u \in U, \alpha \in \mathrm{Hom}(U, V)$, 则有

$$\mathrm{crd}(\alpha(u); \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = M(\alpha)\mathrm{crd}(u; e_1, e_2, \cdots, e_m). \tag{1.1.10}$$

当 $U = V$ 时, 记 $\mathrm{End}V = \mathrm{Hom}(V, V)$, 其中的元素称为 V 的线性变换. 设 e_1, e_2, $\cdots$, e_m 为 V 的一组基, $\alpha \in \mathrm{End}(V)$, 称

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_m) \\ &= M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_m; e_1, e_2, \cdots, e_m), \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

为 α 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 下的矩阵, 即有

$$\mathrm{col}_j M(\alpha) = \mathrm{crd}(\alpha(e_j); e_1, e_2, \cdots, e_m). \tag{1.1.12}$$

若 $e_1', e_2', \cdots, e_m'$ 是 V 的另一组基, 则有

$$M(\alpha; e_1', \cdots, e_m') = T^{-1} M(\alpha; e_1, \cdots, e_m) T, \tag{1.1.13}$$

其中 $T = T\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ e_1' & e_2' & \cdots & e_m' \end{pmatrix}$.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{col}_j(T^{-1}M(\alpha; e_1, \cdots, e_m)T) &= T^{-1}M(\alpha; e_1, \cdots, e_m)\mathrm{crd}(e_j'; e_1, \cdots, e_m) \\ &= T^{-1}\mathrm{crd}(\alpha(e_j'); e_1, \cdots, e_m) \\ &= \mathrm{crd}(\alpha(e_j'); e_1', \cdots, e_m') \\ &= \mathrm{col}_j M(\alpha; e_1', \cdots, e_m'). \end{aligned}$$

(1.1.13) 式表明 V 的一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的.

对于 $\alpha, \beta \in \mathrm{End}V$, 我们可定义乘法如下:

$$(\alpha\beta)(v) = \alpha(\beta(v)), \forall v \in V. \tag{1.1.14}$$

显然, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{End}V,\ k \in \mathbf{F}$, 有

$$\begin{cases} \alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \\ (\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma, \\ (k\alpha)\beta = \alpha(k\beta) = k(\alpha\beta), \\ \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma. \end{cases} \tag{1.1.15}$$

也就是说 $\mathrm{End}V$ 是 $\mathbf{F}$ 上的结合代数.

所谓结合代数由下面定义给出.

定义 1.1.1 设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 又在 $\mathcal{R}$ 中定义了乘法运算: $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta$, 满足 (1.1.15) 式中诸等式, 则称 $\mathcal{R}$ 为 $\mathbf{F}$ 上一个**结合代数**.

例如 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的 n^2 维结合代数, 而 $\mathbf{F}[x]$ 是 $\mathbf{F}$ 上无限维结合代数.

所谓结合代数的同态、同构就是保持乘法运算的线性空间的同态、同构.

定理 1.1.1 若 V 是 $\mathbf{F}$ 上 n 维线性空间, 则结合代数 $\mathrm{End}V$ 与 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 同构.

证 任取 V 中一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 定义 $\mathrm{End}V$ 到 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 的映射:

$$\alpha \longmapsto M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n) = M(\alpha).$$

显然这是线性同构映射. 又

$$\begin{aligned}\mathrm{col}_j M(\alpha\beta) &= \mathrm{crd}((\alpha\beta)(e_j); e_1, \cdots, e_n)\\ &= M(\alpha)\mathrm{crd}(\beta(e_j); e_1, \cdots, e_n)\\ &= M(\alpha)\mathrm{col}_j M(\beta)\\ &= \mathrm{col}_j(M(\alpha)M(\beta)),\end{aligned}$$

因此 $M(\alpha\beta) = M(\alpha)M(\beta)$. 故此映射是结合代数的同构映射. □

以 $\mathrm{GL}(V)$ 表示 $\mathrm{End}V$ 中可逆元素的集合, 这对乘法构成一个群. 而 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 中所有可逆矩阵的集合 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ 也是一个群. 显然

$$\alpha \longmapsto M(\alpha)$$

是 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ 的一个同构映射, 这两个群我们都称为一般线性群.

所谓群表示就是研究群到 $\mathrm{GL}(V)$ 或 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ 中的同态映射. 群表示的理论不仅对群本身的结构亦或其他数学分支, 而且在物理、化学等许多学科中的应用日益广泛.

在今后我们经常要用到的一个概念是迹. 我们在高等代数中已经熟知, 若 A 是一个 n 阶方阵, 我们称

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ent}_{ii}(A)$$

为 A 的迹. 显然

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(A_1 + A_2) = \mathrm{tr}A_1 + \mathrm{tr}A_2,\\ &\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}A,\\ &\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA),\\ &\mathrm{tr}(T^{-1}AT) = \mathrm{tr}A.\end{aligned}$$

当 A 有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 时, 有

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

由上面性质, 我们可定义 $\alpha \in \mathrm{End}V$ 的迹

$$\mathrm{tr}\alpha = \mathrm{tr}M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n),$$

其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 的任一组基.

又若 $\beta \in \mathrm{GL}(V)$, $\alpha \in \mathrm{End}V$, 则

$$\mathrm{tr}(\beta^{-1}\alpha\beta) = \mathrm{tr}\alpha.$$

同样, 我们可定义 $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ 的行列式, 特征多项式分别为

$$\det\alpha = \det M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n),$$
$$f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{id}_V - \alpha).$$

§1.2 群表示的定义及例子

定义 1.2.1 设 G 是一个有限群, V 是域 $\mathbf{F}$ 上的一个 n 维线性空间. 从 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个同态

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

称为群 G 的一个 n 维 **$\mathbf{F}$表示**, 记为 (ρ, V) 或简记为 ρ. 称 V 为**表示空间**, n 也叫**表示的级数**, 也记为 $\deg\rho\ (= \dim V)$.

显然, $\rho(g) = \mathrm{id}_V$, $\forall g \in G$, 是 G 的一个表示, 这个表示称为**平凡表示**.

定义 1.2.2 设群有两个 $\mathbf{F}$ 表示 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2), 若有 V_1 到 V_2 上的线性同构 S, 使得图 1.1 交换, 即

$S\rho_1(g) = \rho_2(g)S, \quad \forall g \in G$, 则称 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) 为**等价表示**, 记为

$(\rho_1, V_1) \sim (\rho_2, V_2)$ 或 $\rho_1 \sim \rho_2$.

完全平行地, 我们有矩阵表示的概念.

定义 1.2.3 群 G 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ 中的同态 ρ, 称为 G 的一个 n 级**矩阵表示**.

称 G 的两个矩阵表示 ρ_1, ρ_2 等价, 若有 $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ 使得

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "S"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

图 1.1

$$\rho_2(g) = S^{-1}\rho_1(g)S, \quad \forall g \in G.$$

从实质上说, 群的表示与群的矩阵表示并无区别.

设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 的一个表示, 取 V 中一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 则

$$g \longmapsto M(\rho(g); e_1, e_2, \cdots, e_n), \quad \forall g \in G$$

是 G 的一个矩阵表示. 若 $e_1', \cdots, e_n'$ 是 V 的另一组基, 则上面矩阵表示与下面的矩阵表示

$$g \longmapsto M(\rho(g); e_1', e_2', \cdots, e_n'), \quad \forall g \in G$$

等价.

反之, 我们取 $V = \mathbf{F}^n$, 则 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}) = \mathrm{GL}(\mathbf{F}^n)$. 故群 G 的矩阵表示自然是群 G 的表示.

例 1.2.1　取 $G = S_3$.

1) $\sigma \longmapsto 1 (\in \mathrm{End}(\mathbf{F}))$ 是一维平凡表示.

2) $\sigma \longmapsto \mathrm{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ 偶置换}; \\ -1, & \sigma \text{ 奇置换} \end{cases}$

是 1 维非平凡表示, 称为 S_3 的**符号表示**.

3) 取 V 为三维空间, e_1, e_2, e_3 为一组基. (P, V) 定义如下

$$P(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}, \quad \forall \sigma \in S_3.$$

容易验证 (P, V) 是 S_3 的一个三维表示, 称为 S_3 的**置换表示**. 容易算出, 对基 e_1, e_2, e_3 的矩阵表示为

$$P((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \quad P((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.2.1 可推广到一般的对称群 S_n.

1′) 一维平凡表示: $\sigma \longmapsto 1$,

2′) 符号表示: $\sigma \longmapsto \mathrm{sgn}\sigma$,

3′) 置换表示: $P(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$,

其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 n 维空间 V 的一组基. 此时, $P(\sigma)$ 的矩阵称为置换矩阵. 其特点是每行、每列有且仅有一个元素为 1, 而其余元素为 0. 一般我们有

$$\mathrm{ent}_{ij}(P(\sigma)) = \delta_{i\sigma(j)}.$$

利用对称群 S_n 的置换表示, 我们可以定义一般的有限群 G 的正则表示.

定义 1.2.4　设 G 是一个 n 阶群. 集合 G 的对称群 S_G 自然可以看作 S_n. 在群论中, 我们知道, G 中元素 g 的左平移 $L_g : h \longmapsto gh$ 是 $S_G = S_n$ 中的元素, 且

$$L : g \longmapsto L_g$$

是 G 到 S_G 的一一的同态映射. 设 P 是 S_G 的置换表示, 则

$$R = P \circ L$$

(见图 1.2) 是 G 的一个表示, 称 R 为 G 的 (**左**) **正则表示**.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "R"'] & S_G \arrow[d, "P"] \\ & \mathrm{GL}(V) \end{tikzcd}$$

图　1.2

下面我们更具体地来看看如何刻画正则表示.

设 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$. 于是在 V 中可取基 e_1, e_2, $\cdots$, e_n. 对 $g \in G$, 有 $gg_i = g_j$. 于是 $R(g)$ 由下面关系给出

$$R(g)e_i = e_j.$$

下面我们看一些具体例子. 注意, 我们要决定一个群的表示, 实际上我们只要找出此群生成元的像 (当然, 必须满足同样的生成关系).

例 1.2.2　设 $G = \{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$ 为 n 阶循环群, (R, V) 为 G 的正则表示. 我们只要求出 $R(x)$.

由于

$$\begin{aligned} &x \cdot x^i = x^{i+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-2, \\ &x \cdot x^{n-1} = 1, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} &R(x)e_i = e_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ &R(x)e_n = e_1. \end{aligned}$$