高职高专“十五”规划教材系列

计算机数学基础

祁文青　王宏伟　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专“十五”规划教材系列

计算机数学基础

祁文青　王宏伟　编著

本书介绍了线性代数和离散数学两个领域中各分支的基本内容，全书共分6章，其主要内容有行列式、矩阵、线性方程组、集合论初步、图论、数理逻辑。

书中概念论述清楚，讲解详实，通俗易懂，并且着重于概念的应用，而不着重于定理的证明。每章后配有习题，有助于读者加深对概念的理解。

本书既可作为高职高专计算机专业课程的教材，也可供从事计算机专业的科学工作者及有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学基础/祁文青，王宏伟编著．一北京：机械工业出版社，2004.1

（高职高专“十五”规划教材系列）

ISBN 7-111-13724-8

I．计… II．①祁…②王… III．电子计算机一数学基础一高等学校：技术学校一教材 IV．TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 122133 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策 划：胡毓坚

责任编辑：王 颖

责任印制：路 琳

北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·11.75 印张·287 千字

0001－5000 册

定价：17.00 元

出版说明

为了贯彻国务院发［2002］16号文件《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》的精神，进一步落实《中华人民共和国职业教育法》和《中华人民共和国劳动法》，实施科教兴国战略，大力推进高等职业教育改革与发展，我们组织力量，对实现高等职业教育培养目标和保证基本教学规格的文化基础课程、专业技术基础课程和重点建设专业主干课程的教材进行了规划和编写。

本套教材内容涵盖了普通大专院校计算机及非计算机专业的文化基础课、专业基础课、专业课以及选修课程，主要分为文化基础、编程语言、硬件技术、网络信息、数据库应用及多媒体技术等几大类。为配合高职教育关于"培养21世纪与我国现代化建设要求相适应的一线科技实用型人才"的最新理念，我们特为本系列教材配备了实践指导丛书，以利于老师的教学和学生的学习。

本套教材将理论教学和实践教学紧密结合，图文并茂、内容实用、层次分明、讲解清晰，其中融入了作者长期的教学经验和丰富的实践经验，是各类大专院校、职业技术学校的最佳教材，也可作为各类培训班的教材。

前　言

线性代数和离散数学是计算机相关专业必修的专业基础课程，是学习计算机专业各后续课程必要的知识准备。目前，很多学校把这两门课合二为一，统称为《计算机数学基础》。本书是为适应这一发展趋势编写而成的。编写时根据“高职高专教育强调理论知识必需、够用”的原则，在精选教学内容时，着重于基本概念的论述和应用，而不着重于定理的证明，适当减少个别结论的推证，使之易教易学。

全书共分六章，内容包括：行列式（行列式的定义、性质及计算）、矩阵（矩阵的基本概念、运算及其应用）、线性方程组（线性方程组解的一般理论）、集合论初步（集合的基本概念和运算、关系及其性质）、图论（图的基本概念、树及其性质）、数理逻辑（命题逻辑、谓词逻辑）。每章后附有习题，题量丰富，难度由浅入深，教师可根据学生的实际水平选择部分习题在课堂完成，加强学生对概念的掌握。

本书第 1、2、3 章由祁文青编写，第 4、5、6 章由王宏伟编写。

由于作者水平有限，书中难免存在不当和疏漏之处，恳请读者原谅，并提出宝贵意见。

编　者

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 *n* 阶行列式

线性方程组理论是本书讨论和研究的重要内容。线性方程组是未知数次数为 1 的一类特殊方程组，具有一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

式中，a_{ij} 表示第 i 个方程第 j 个未知数的系数，x_j 表示第 j 个未知数，b_i 表示第 i 个方程的常数项，i=1,2,…,m, j=1,2,…,n。

n 阶行列式的概念来源于求解方程个数 m 等于未知数个数 n 的线性方程组。

1.1.1 二、三阶行列式

为得到 n 阶行列式的概念，首先我们考虑方程个数 m 和未知数个数 n 都等于 2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-2}$$

利用加减消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases} \tag{1-3}$$

分析方程组（1-3），我们容易发现：x_1 的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关；类似地，x_2 的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关。为得到这种运算关系，可先不看等式右边部分，单看方程左边 x_1，x_2 的系数部分。我们发现系数部分 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，正好由方程组（1-2）的未知数系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 组成。为便于记忆，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ 并称之为二阶行列式。

行列式这一名称非常直观。在这样定义二阶行列式后，方程组（1-3）每个方程右边部分构成两个二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $D\neq 0$ 时，线性方程组（1-2）的解可以表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}$。

【例 1-1】 求二元线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1+2x_2=3\end{cases}$ 的解。

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1\times2-1\times1=1 \qquad D_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=1\times2-1\times3=-1$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{vmatrix}=1\times3-1\times1=2$$

$D\neq 0$，方程组有惟一解。方程组的惟一解为： $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-1$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$

类似地，方程个数 m 和未知数个数 n 都等于 3 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{1-4}$$

利用加减消元法，可得到

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1\\=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}\\(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_2\\=b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23}\\(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_3\\=b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}\end{cases} \tag{1-5}$$

分析方程组（1-5），我们发现：$x_j(j=1，2，3)$的解与系数之间以及系数与常数之间某种运算关系有关。为得到这种运算关系，我们先不看等式右边部分，单看方程左边 x_1,x_2,x_3 的系数部分。那么系数部分 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ 正好是由线性方程组（1-4）的未知数系数 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ 组成。为便于记忆，与二阶行列式类似引进记号。

定义三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

并称之为三阶行列式。

在我们这样定义三阶行列式之后，方程组（1-5）右边分别为三个三阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3$$

当 $D\neq 0$ 时，线性方程组（1-5）的解可以表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$。

【例 1-2】　线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26 \\ 2x_1-4x_2-x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=55$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=20 \qquad D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}=-15$$

方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=55/5=11,\ x_2=\frac{D_2}{D}=20/5=4,\ x_3=\frac{D_3}{D}=-15/5=-3。$$

1.1.2　排列及逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，需要引入 n 级排列、n 级排列的逆序数的概念。下面首先给出 n 级排列的概念。

定义 1-1　由 n 个自然数 1，2，…，n 组成的一个有序数组 $i_1\,i_2\ldots i_n$ 叫一个 n **级排列**。n 级排列的总数是 $n!$。

例如，1345276 是一个七级排列，597863214 是一个九级排列，4312 是一个四级排列。

下面给出 n 级排列的逆序数的概念。

定义 1-2　在一个 n 级排列 $i_1\,i_2\ldots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即对 $s<t$，有 $i_s>i_t$，称这一对数 $i_s\ \ i_t$ 构成一个**逆序**。一个 n 级排列中逆序的总数，叫这个 n 级排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1\,i_2\ldots i_n)$。

容易得到，$\tau(i_1\,i_2\ldots i_n)=t_1+t_2+\ldots+t_n$。其中，$t_1$ 表示在排列中排在 i_1 前面的比 i_1 大的数的个数，t_2 表示排在 i_2 前面的比 i_2 大的数的个数，……，t_n 表示排在 i_n 前面的比 i_n 大的数的个数。

例如，$\tau(4312)=0+1+2+2=5$

$\tau(597863214)=0+0+1+1+3+5+6+7+5=28$

$\tau(7654321)=0+1+2+3+4+5+6=21$

定义 1-3 如果一个 n 级排列中，所有的数都按照由小到大的顺序排列，那么这个排列叫 **n 级标准排列**。如果一个 n 级排列的逆序数为偶数，那么这个排列叫**偶排列**。如果一个 n 级排列的逆序数为奇数，那么这个排列叫**奇排列**。

例如，1345276，597863214 是偶排列；4312 是奇排列。

定义 1-4 在一个排列 $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$ 中，如果两个数 i_s 与 i_t 互换位置，其余数位置不变，这样的变换叫一个对换，记为(i_s, i_t)。

例如，$1345276 \xrightarrow{(1,6)} 6345271$

定理 1-1 对换改变排列的奇偶性。

证明

（1）考虑对换两个相邻的数的特殊情形。

设一个 n 级排列为$\dots i\ j \dots$，经过一个对换(i, j)得到另一个 n 级排列$\dots j\ i \dots$。在这两个排列中，i，j 与其他数之间以及其他数之间顺序相同，只有 i，j 之间的顺序不同。如果 $i<j$，那么原排列 i，j 之间是顺序，新排列 i，j 之间是逆序，新排列比原排列增加了一个逆序。反之，如果 $i>j$，那么原排列 i，j 之间是逆序，新排列 i，j 之间是顺序，新排列比原排列减少了一个逆序。无论逆序数是增加一个，还是减少一个，都改变了排列的奇偶性。

（2）考虑对换任意两个数的一般情形。

设一个 n 级排列为 $\dots i\ k_1 k_2 \dots k_s j \dots$，经过一个对换$(i, j)$，得到一个新的 n 级排列$\dots j\ k_1 k_2 \dots k_s i \dots$。对此我们可以看作两步：第一步，在原排列中把 i 依次与 k_1，k_2，…，k_s，j 作 $s+1$ 次相邻对换，将原排列变为$\dots k_1 k_2 \dots k_s j\ i \dots$。第二步，在第一步变出的排列中，把 j 依次与 k_1，k_2，…k_s 作 s 次相邻对换，就得到了新排列。这样原排列共经过 $2s+1$ 次相邻对换就得到了新排列。$2s+1$ 是奇数，相邻对换改变排列的奇偶性，奇数次相邻对换改变了原排列的奇偶性。

1.1.3 *n* 阶行列式

回忆前面给出的二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

首先，从每一项构成的特点可以看出，二阶行列式每一项由两个元素的乘积组成，两个元素行的脚标构成一个二级标准排列，两个元素列的脚标是所有的二级排列 12，21。三阶行列式每一项由三个元素的乘积组成，三个元素行的脚标构成一个三级标准排列，三个元素列的脚标构成所有的三级排列 1 2 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1，1 3 2，2 1 3。由此可定义 n 阶行列式的每一项。n 阶行列式每一项由 n 个元素的乘积组成，n 个元素行的脚标构成一个 n 级标准排列，n 个元素列的脚标构成所有的 n 级排列，即 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$。

其次，我们来看每一项符号的决定。从中可以看出，当列的脚标是 1 2 3，2 3 1，3 1 2 时，即列的脚标构成偶排列时，这一项取正号；当列的脚标是 3 2 1，1 3 2，2 1 3 时，即列的脚标构成奇排列时，这一项取负号。因此，n 阶行列式任意一项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为

$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$。

最后，我们看项数。二阶行列式的项数为所有二级排列的总数 $2!=2$，三阶行列式的项数为所有三级排列的总数 $3!=6$。因此，我们定义 n 阶行列式的项数为 $n!$。

总结以上分析，我们给出 n 阶行列式的定义。

定义 1-5　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}^{n!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1-6}$$

式中，$\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}^{n!}$ 表示对所有的 n 级排列求和，a_{ij} 表示 n 阶行列式中位于第 i 行、第 j 列的元素。

注意到 n 阶行列式每一项中 n 个元素的顺序可以任意交换，n 阶行列式的展开式也可以写成 $\sum\limits_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}^{n!} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 和 $\sum\limits^{n!} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$。

【例 1-3】　计算**对角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值。

解　根据定义 1-5

$$D = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}^{n!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

上面的所有项中，由于 0 乘任意数为 0，只有当 $j_1=1$，$j_2=2$，…，$j_n=n$ 时，这一项才不一定等于 0。因此

$$D=(-1)^{\tau(12\ldots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

与例 1-3 类似，我们能得到**上三角行列式**、**下三角行列式**的值分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即对角行列式、上三角行列式及下三角行列式都等于主对角线上元素的乘积。

【例 1-4】　计算**反对角行列式**

$$\begin{vmatrix} 0 & \vdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \vdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

的值。

解 根据定义 1-5

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}^{n!}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\ a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

上面的所有项中，由于 0 乘任意数为 0，只有当 $j_1=n$，$j_2=n-1$，…，$j_n=1$ 时，这一项才不一定等于 0。因此

$$D=(-1)^{\tau(nn-1\ldots21)}\ a_{1n}\ a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1n}\ a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

与例 1-4 类似，我们能得到**反上三角行列式**、**反下三角行列式**的值分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1n}\ a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \vdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \vdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1n}\ a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

1.2 行列式的性质

1.2.1 行列式的基本性质

利用行列式的定义，计算一般形式的行列式时，计算量是相当大的，有必要研究行列式的性质，以简化行列式的计算。另外这些性质在理论上也具有重要意义。

定义 1-6 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记为 D^T。设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式有以下基本性质。

性质 1 行列式和它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$。

例如，设 $D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 8\\1 & 5 & 6\\9 & 4 & 7\end{vmatrix}$，则 $D^{T}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 9\\2 & 5 & 4\\8 & 6 & 7\end{vmatrix}$，经验算有 $D= D^{T}=-201$

性质 1 说明行列式的行和列的地位是相同的。对于行成立的性质，对于列也成立。

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号。

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列，交换 i，j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$。

例如，设 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\3 & 1 & 5\\-2 & 2 & 7\end{vmatrix}=-33$，互换第 1 行与第 3 行后，得 $D_1=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 7\\3 & 1 & 5\\1 & 2 & 4\end{vmatrix}=33$，故有 $D=-D_1$。

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值为 0。

因为把行列式 D 中相同的两行（列）互换，其结果仍是 D，但由性质 2 可知互换两行（列）的结果为 $-D$。因此，$D=-D$，即 $D=0$。

性质 3 行列式某一行（列）的公因子可以提到行列式的外面，即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=kD$$

第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $ri \div k$（或 $ci \div k$），第 i 行（或列）乘以 k，记作 $ri\times k$（或 $ci\times k$）。

例如，$\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\5 & -10 & 5\\3 & -1 & 4\end{vmatrix}\overset{r_1 \div 2}{\underset{r_1 \div 5}{=\!=\!=}}10\times\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -2 & 1\\3 & -1 & 4\end{vmatrix}$

推论 1 如果行列式某一行（列）的元素全为 0，则此行列式的值为 0 。

推论 2 如果行列式某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为 0 。

例如，$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\2 & 1 & 6 & 0\\4 & -1 & 12 & 3\\-3 & 2 & -9 & 1\end{vmatrix}$，因 D 中第 1 列与第 3 列对应元素成比例，故有 $D=0$。

性质 4 如果行列式中某一行（列）的所有元素都是两个元素的和，则此行列式等于两个行列式的和，即如果

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \vdots & \vdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \vdots & \vdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$。

例如，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

性质 5 行列式某一行（列）的所有元素的 k 倍加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \vdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \vdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \vdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \vdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 行（列）的所有元素的 k 倍加到第 i 行（列）的对应元素上记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$。

1.2.2 利用性质计算行列式

下面我们利用行列式的性质，先将行列式化为上一节的特殊形式的行列式：对角行列式、上三角行列式、下三角行列式、反对角行列式、反上三角行列式、反下三角行列式，然后计算出行列式。

【例 1-5】 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$的值。

解 利用行列式的性质将第 1 行分别加到第 2、3、4 行上，使其成为一个上三角形行列式，利用三角形行列式的结论，可得此行列式的值。此例是计算行列式的一种典型算法。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8$$

【例 1-6】 计算行列式$\begin{vmatrix}3&5&8&6\\2&1&4&2\\1&-1&0&1\\5&4&2&1\end{vmatrix}$的值。

解 $$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\2&1&4&2\\3&5&8&6\\5&4&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-5r_1]{r_2-2r_1,r_3-3r_1}-\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\0&3&4&0\\0&8&8&3\\0&9&2&-4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-3r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\0&3&4&0\\0&-1&-4&3\\0&0&-10&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+3r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\0&-1&-4&3\\0&0&-8&9\\0&0&-10&-4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_4}\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\0&-1&-4&3\\0&0&2&13\\0&0&-8&9\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+4r_3}\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\0&-1&-4&3\\0&0&2&13\\0&0&0&61\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times2\times61=-122$$

【例 1-7】 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}x&a&\vdots&a\\a&x&\vdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\vdots&x\end{vmatrix}$$

解 这是一种类型的行列式，它的特点是对角线上的元素为同一数值，对角线以上和以下的元素则为另外同一数值，从而保证了行列式各列（行）的元素之和完全相同，由此可利用行列式的性质把行列式的第一行（列）的元素化为 1，进而把行列式转化为上（下）三角形行列式进行计算。

$$D=\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\vdots&x+(n-1)a\\a&x&\vdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\vdots&x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\vdots&1\\a&x&\vdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\vdots&x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\vdots&1\\0&x-a&\vdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\vdots&x-a\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

【例 1-8】证明

$$\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\q+r&r+p&p+q\\y+z&z+x&x+y\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{vmatrix}$$