21世纪财经专业规划教材

高等数学（上册）

微积分

秦素平　李万军
宿金勇　薛庆平　编著

Gaodeng Shuxue
Weijifen

立信会计出版社
LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

21 世纪财经专业规划教材

高 等 数 学(上)

微 积 分

秦素平　李万军
宿金勇　薛庆平　编著

立 信 会 计 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册．微积分/秦素平等编著.—上海：立信会计出版社，2005.9

21世纪财经专业规划教材

ISBN 7-5429-1554-1

Ⅰ.高… Ⅱ.秦… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 ②微积分—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第112817号

出版发行 立信会计出版社
经　　销 各地新华书店
电　　话 (021)64695050×215
(021)64391885(传真)
(021)64388409
网上书店 *www.Lixinbook.com*
(021)64388132
地　　址 上海市中山西路2230号
邮　　编 200235
网　　址 *www.lixinaph.com*
E-mail *lxaph@sh163.net*
E-mail *lxzbs@sh163.net*(总编室)

印　　刷 郑州铁路局印刷厂
开　　本 850×1168毫米 1/32
印　　张 13
字　　数 319千字
版　　次 2005年9月第1版
印　　次 2005年9月第1次
印　　数 3000
书　　号 ISBN 7-5429-1554-1/O·0005

前　　言

随着市场经济的发展和现代化管理水平的提高,数学方法在各分支学科的渗透更加广泛和深入,社会对大学生的数学素质要求也更高。作者在多年教学经验的基础上,吸收多种教材的精华,编写了这套高等数学教材,本教材适合大学非数学专业学生使用。本教材有以下特点:

1. 难易适当,深入浅出,举一反三,易教易学。

2. 各章都配备了 A、B 两套习题,可供不同基础、不同层次的学生选用,题型丰富、涵盖面广,能使学生通过练习,牢固掌握所学知识点。本书还精心编选了部分应用例题和习题,能使学生开阔知识面,提高应用数学知识的能力。

3. 按照中学新课改要求,注意与中学内容相衔接。考虑到学生各类考试需要,本教材基本涵盖了高等数学考核知识点的所有内容,为学生进一步深造提供必要的知识准备。

4. 本教材编选进了数学文化方面的阅读材料,以此提高学生学习高等数学的兴趣和数学文化修养。

5. 本书分上、下两册。上册为微积分,下册为线性代数,书中带 * 号章节为选学内容,不同专业和基础的学生可以根据实际情况有所侧重地选学教材有关章节。

本书由赵白云、秦素平、李万军、王建明、宿金勇、薛庆平、赵辉合作编著。其中李万军执笔上册预备知识、第一、第六章;秦素平执笔上册第二、第三章;宿金勇执笔上册第四、第五章;薛庆平执笔上册第七、第八章;王建明执笔下册第一、第二章;赵白云执笔下册

第三、第四章；赵辉执笔下册第五、第六章。上册中阅读材料由秦素平、李万军摘编。本书上册由秦素平统稿，下册由赵白云统稿。

在本书的编写过程中，作者参考了国内众多院校教师和数学工作者编写的教材和书籍，摘编、引用了部分数学同行的文章，在此一并表示感谢。

在编写过程中尽管作者都付出了艰辛的劳动，但由于水平和时间所限，疏漏之处在所难免，恳请同行、专家及读者指正，在此表示深切谢意。

作者

2005 年 6 月 10 日

目　录

引论　微积分思想

微积分学是高等数学的最主要部分，是高等数学的基础。它的思想和方法广泛应用于自然科学、工程技术、社会经济等领域，是高等院校数学教学的主要内容。

微积分是人类思维的伟大成果之一，是人类文化史上的一大成就。它的地位处于自然科学和人文科学之间，是打开科学大门的钥匙，是人类思维的体现，是高等教育的一种特别有效的工具。

微积分来源于实践，在我国公元三世纪就有“割圆术”积分思想的萌芽。一千多年以后，由于天文学、力学、几何学的实际需要，比较系统的微积分理论于公元十七世纪中叶在牛顿、莱布尼兹等大科学家手中诞生。十八世纪，微积分被成功应用于物理学、几何学，解释万有引力定律、行星运动三大定律、速度、斜率等自然现象，这就促使微积分迅速发展。十九世纪，由于柯西等大数学家的贡献，严格的微积分理论在实数理论、极限理论基础上走向成熟。十九世纪以后，微积分应用日益广泛，日趋成熟，几乎渗透到自然、社会和经济领域的各个方面，促进了科技的发展，也使自身在应用中更完美。

微积分是微分和积分的合称。就像乘法和除法一样，两者之间有互为逆运算的密切关系，所以微分和积分不可分割，必须合起来一起研究，故合称微积分。微积分学主要解决两类问题——变化率问题和积累问题。其他许多问题都可以转化为这两类问题加以解决。

第一类问题：研究非均匀变化的变量的局部变化规律。例如，

变速直线运动物体的瞬时速度，曲线在任一点处的切线斜率等。这类问题即求函数在某一点的变化率问题。解决这类问题的基本思想是：先考虑指定点附近的变化情况，即由指定点适当扩大到该点附近的一个小范围来考察。在这个小范围内，近似的以“不变代变”、“以静代动”，求得平均变化率，近似等于该点处的瞬时变化率，再将小范围无限缩小而趋向于零，促使“近似”转化为“精确”，从而求得函数在指定点处的变化率。这就是微分学问题（详见本书第三章）。

第二类问题：研究非均匀变化变量的无限积累问题。例如，求不规则图形的面积，求非均匀物体的质量等。这类问题即无限求和问题。解决这类问题的基本思路是：先将整体化为有限个微小的局部（化整为零），在每个局部“以直代曲”“以不变代变”，再积零为整求和式，得到整体的近似值，最后，再使每一局部无限变小，通过求和式极限，促使“近似”转化为“精确”，从而得到积累问题的准确值。这就是积分学问题（详见本书第五章）。

以上两类问题本质不同，但解决问题的方法有异曲同工之处，都是先讨论局部范围内的近似状态（“以静代动”、“以直代曲”简化思维），再通过求极限，促使局部近似状态浓缩到单点的精确状态（第一类问题）或促使局部近似状态累积到整体的精确状态（第二类问题）。解决以上两类问题的思想方法是人们在长期实践中积累的正确方法。这种思想方法具有普遍性，可推广使用到类似问题。例如，转动静止的胶片，可得到运动的画面，单位时间内拍出的静止胶片越多，运动的画面越逼真。这就是“以静代动”的变化率问题；又如，钳工可用平锉锉出圆形的工件，锉的方向变化越快，锉出的圆形工件越标准；同样，建筑工人可用直线型的方砖砌出曲线型的建筑。这就是“以直代曲”的积累问题。

通过对以上两类问题的研究分析，可使我们了解到：

（1）微积分学研究的对象是从实践中抽象出的函数，贯穿微

积分学始终的思想方法是极限。微积分学的主要内容是微分问题和积分问题。

(2)微积分学产生的源泉是实践。微积分学的发展完美展现了人们认识客观世界从感性跃进到理性,又从理性能动地认识感性,并进一步发展理性的精彩过程。微积分的应用充分展示了人们应用抽象思维去把握现实的能力。微积分的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。

(3)微积分使数学从初等数学(常量数学,从静止的角度,像照相一样研究客观事物)进入高等数学(变量数学,从变化的过程像录相一样研究客观事物)。其精髓是:引入极限方法,在变化中考察各变量之间的关系,用变化的观点去观察问题、分析问题,解决问题。这是高等数学区别于初等数学最本质的特点。

(4)从哲学的角度考虑,微积分思想揭示了"直与曲"、"静与动"、"变与不变"、"有限与无限"、"近似与精确"的对立统一关系,集中体现了"量变与质变"的辩证思想,反映了"实践、认识、再实践、再认识"的认知规律,为唯物辩证法提供了实证。

预备知识 高等数学中常用的初等数学知识

高等数学是以初等数学为基础的。但是,高等数学中所用到的不是初等数学知识的全部,仅仅是其中的一部分。在这一部分中,有一些是必须熟练掌握的,有一些只要了解就可以了。本章根据高等数学的需要,对中学中所学过的初等数学知识作一简要的复习和总结,并补充有关函数知识,如邻域、复合函数等,为学习高等数学作准备。

§1 集 合

集合是数学中的一个基本概念,集合论是数学的一个重要分支。集合论的基本知识已应用于数学的各个领域,是现代数学的基础。集合论思想着眼于从对象整体结构观察问题,思考问题,是人们认识客观现实从“特殊”到“一般”的升华,是现代系统论和结构理论的根基。

一、集合的概念

所谓集合就是具有某种共同属性的一些对象的全体。构成集合的每一个对象称为该集合的元素。通常,用大写字母 A、B、C 等表示集合,用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$。如果集合中含有有限个元素,称为有限集;集合中含有无限个元素,称为无限集;集合中不含任何元素,称

为空集，记为 Φ。在研究某个问题时，所有研究对象构成的集合，称为全集，记为 U 或 I。表示集合通常有列举法、描述法、图形法三种形式。

二、集合的运算

1. 子集与补集

集合与集合之间，存在着“包含”与“相等”的关系。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A；如果集合 A 与集合 B 含有相同的元素（即 A 与 B 互相包含），则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$；如果 $A\subseteq B$，但 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记为 $A\subset B$。

例如，空集是任何非空集合的真子集。任何集合是自身的子集。

如果 U 是一个集合，A 是 U 的一个子集，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 U 中子集 A 的补集（或余集），记为$\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$$

例如，在实数集合 R 中，有理数集合 Q 的补集$\complement_U Q$ 就是无理数集合。

子集和补集有如下简单性质：

(1) $\Phi\subseteq A\subseteq A\subseteq U$。

(2) $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$。

(3) $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$。

(4) $\complement_U \Phi=U, \complement_U U=\Phi$。

2. 交集、并集、差集

交集：由既属于集合 A 又属于集合 B 的公共元素构成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

并集:由属于集合 A 或者属于集合 B 的所有元素构成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

差集:由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合,称为集合 A 与 B 的差集,记为 $A - B$。即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

集合的交、并、补有如下简单性质:

(1)$A \cap B \subseteq A$ 或 B。

(2)$A \cup B \supseteq A$ 或 B。

(3)$A - B \subseteq A$。

(4)$A - B = A \cap \complement_U B$。

(5)$\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$。

(6)$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$。

在两个集合 A 与 B 之间还可以定义其他运算,如向量积。设在集合 A 中任取一个元素 x,在集合 B 中任取一个元素 y,则由 x,y 组成的有序数对为(x,y)。把这样的有序数对(x,y)作为新的元素,它们的全体构成的集合称为集合 A 与 B 的向量积,记为 $A \times B$,即 $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, x \in B\}$

例如,$R \times R = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R\}$ 表示平面上全体点的集合。

例如,设 $A = \{0,1\}$ 则 $A \times A = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$

三、区间与邻域

由于微积分学是在实数范围内讨论的,故对数集作一简单讨论。一些实数放在一起构成数集,区间是用得较多的一类数集。

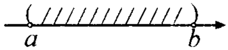
设 a,b 为实数,且 $a < b$,

(1) 开区间:由大于 a 且小于 b 的所有实数构成的集合

$\{x|a<x<b\}$称为以 a 为左端点，b 为右端点的开区间，记为 (a,b)，即开区间

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

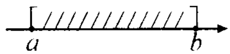
用图形表示为



(2)闭区间：由大于等于 a 且小于等于 b 的所有实数构成的集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为以 a 为左端点，b 为右端点的闭区间，记为 $[a,b]$，即闭区间

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

用图形表示为



同理，可定义半开半闭区间

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

以上区间称为有限区间，区间长度为 $b-a$。

(3)无限区间：无限区间也是经常用到的数集，有如下五种。为表达方便，引入符号“∞”，读作“无穷大”，不能当作数对待。

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，表示大于 a 的实数集合。

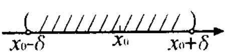
$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，表示大于或等于 a 的实数集合。

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，表示小于 b 的实数集合。

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，表示小于或等于 b 的实数集合。

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，表示全体实数集合 R。

(4)邻域：在实轴上，以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为 x_0 的 δ 邻域，用图形表示为



由于邻域

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$
$$=\{x \mid -\delta<x-x_0<\delta\}=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

所以,x_0 的 δ 邻域常用$|x-x_0|<\delta$ 表示。

如果在 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0,则称其为以 x_0 为中心,以 δ 为半径的空心邻域,用集合表示为$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$。

例如,(1,3)表示以 2 为中心,以 1 为半径的邻域。

$\{x \mid 0<|x-1|<2\}$表示以 1 为中心,以 2 为半径的空心邻域。

邻域是微积分学中经常遇到的一个概念,以点 x_0 为中心的任何一个开区间都称为点 x_0 的邻域。今后,在讨论函数在 x_0 处的性质时,经常要在假设函数在 x_0 的某邻域(即 x_0 的左、右邻近区域)满足一定条件下进行。

§2 函数

在许多实际问题中,存在着相互依赖、相互制约的变化因素,定量研究其变化规律,是解决问题的关键。函数的概念,正是对这些变化关系的数学描述,是定量研究问题的前提,是微积分学的研究对象,是进一步学习数学的基础。

一、函数的概念

定义 1 设 X、Y 是非空的数集,如果按某个确定的对应关系 f,使对于集合 X 中的任意一个元素 x,在集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 和它对应。那么,就称 f 为从集合 X 到集合 Y 的一个函数,记作

$$y=f(x) \qquad x \in X$$

其中,x 叫自变量,其取值范围 X 叫作函数的定义域,记为 $D(f)$,与 x 值对应的 y 值叫作函数值,全体函数值的集合叫作函数的值域,记作 $R(f)$。

例如，$y=\sin x$ 是一个函数，$D(f)=R$，$R(f)=[-1,1]$。

由定义可知，定义域和对应关系是构成函数的两个基本要素，只有定义域与对应关系都相同的两个函数才是相同的函数。

例如，函数 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 不是相同函数，因其定义域不相同。

在中学数学中，常用公式表示函数，称为解析式。例如，一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$、双曲线函数 $y=\dfrac{1}{x}$，线性函数 $y=ax+b$ 等。但在实际中，函数也可用表格或图像表示。

例如，某商场统计出的某商品价格 P 与销量 Q 之间的关系可列表为

P(元/件)	10	11	12	14	15
Q(件)	21	18	15	10	8

该表格就表示一个函数，定义域是$\{10,11,12,14,15\}$。

又如，某气象台描出的某天各时刻气温变化情况的图像如图 1 所示。该图像就表示出了温度随时间变化的规律，是一个函数。

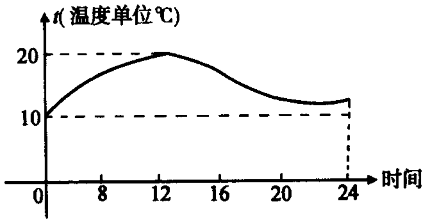


图 1

解析法表示的函数简明准确，且便于运算和理论分析；列表法的优点是可以直接以自变量的值查到对应的函数值，缺点是所列数据往往不完全；图像法的优点是直观，但不便于推理和理论分析。本书讨论的函数主要用解析法表示。但应当指出，以上函数的三种表示法在具体应用时经常是配合使用的。在高等数学的研