信阳师范学院资助出版

投资控制系统分析

TOUZI KONGZHI XITONG FENXI

祁传达 著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

信阳师范学院学术出版基金资助

投资控制系统分析

祁传达 著

中 国 铁 道 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统地论述了固定资产投资控制系统模型的各种不同形式及其建立方法，并综合运用系统科学、控制理论、算子半群理论和非线性分析等方法，分析各类投资控制系统模型解的存在唯一性、非负性和渐近稳定性。

本书作者祁传达，信阳师范学院副教授，主要从事应用数学、数理经济学和密码学研究。本书总结了作者在数理经济学领域多年的研究成果，但为了保持体系结构的完整性和系统性，书中也融入了其他学者已公开发表的研究成果。

本书适合作为应用数学、数理经济学理论工作者、高年级本科生、研究生的参考书，对其他从事经济研究和管理的人员也有一定的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

投资控制系统分析/祁传达著. —北京：中国铁道出版社，2006.5
ISBN 7-113-06987-8

Ⅰ.投… Ⅱ.祁… Ⅲ.固定资产-投资-控制系统-系统分析 Ⅳ.F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 046302 号

书　　名：投资控制系统分析
作　　者：祁传达　著
出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）
策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　曾亚非　　编辑部电话：010-83550579
封面设计：薛小卉
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：880 mm×1 230 mm　1/32　印张：5.25　字数：162 千
版　　本：2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1～1 000 册
书　　号：ISBN 7-113-06987-8/F・435
定　　价：12.00 元

前 言

经济系统的定量研究,无论在理论上还是应用中都有着重要意义。长期以来,这一领域的经济学家和自然科学家密切合作,大大推动了数量经济研究的进展,先后产生了数理经济学、经济计量学、经济控制论等理论。但这些理论还不足以使数量经济学成为一门精密科学,实际上还有许多重要问题需要深入研究。

一个地区或一个国家甚至整个世界的经济系统是一个动态系统。虽然这个系统有其自身特点,但它仍然要遵循系统所具有的一般规律。正是这个原因的推动,产生了以系统科学、控制理论等方法研究经济问题的新途径和新方法,为宏观经济学的发展带来了新的活力。

十年前,于景元等人提出了固定资产投资控制系统模型。随后,许多学者在这一领域进行了卓有成效的研究工作,取得了一系列既有理论意义又有实用价值的研究成果,可为政府进行经济预测、制定经济政策和发展战略提供科学依据。

固定资产投资控制系统模型是用偏微分方程描述的带有边界控制的分布参数系统模型,它是对固定资产"生灭"过程的数学描述。对固定资产投资控制系统模型的研究,实际上是对带有边界控制的分布参数系统模型的理论研究,它与系统的具体属性关系不大。也就是说,本书的理论和方法同样适用于其他

具有“生灭”过程的系统(如:人口系统、生物种群系统、森林系统等)模型的研究。

本书共七章,除了第二章作为理论基础介绍线性算子半群理论外,其余各章分别讨论了投资控制系统模型的建立和对线性投资控制模型、定常投资控制模型、时变投资控制模型、时滞投资控制模型、中性技术进步投资控制模型的理论研究和分析。

本书的内容主要来源于作者十年来的研究成果,但为了保持体系结构的完整性和系统性,书中也收进了其他学者已公开发表的研究成果。

作者在对该课题研究过程中,得到了北京信息与控制研究所于景元研究员、中科院系统所朱广田研究员的指导和帮助,在此深表谢意!感谢赵军博士、焦红兵博士对作者在研究过程中的帮助和支持!感谢解放军信息工程大学金晨辉教授的帮助和支持!

由于作者水平有限,时间仓促,书中难免有缺点和不足之处,欢迎读者批评指正!

作　者

2006 年 1 月

目　录

第一章

投资控制系统模型

宏观经济模型研究从美国学者穆尔进行劳动力市场分析开始到现在已经有近一个世纪的历史了。20 世纪 70 年代以来,由于高效率的电子计算机的出现,使得宏观经济模型研究进入空前热烈和广泛应用阶段,目前已渗透到经济学研究的各个分支,得到世界各国的普遍重视。

经济系统的定量研究,无论在理论上还是应用中都有着重要意义。长期以来,这一领域的经济学家和自然科学家密切合作,大大推动了数量经济研究的进展,先后产生了数理经济学、经济计量学、经济控制论等理论。但这些理论还不足以使数量经济学成为一门精密科学,实际上还有许多重要问题需要深入研究。

在竞争均衡的假设下,国民生产总值(GNP)的增长是投资积累、劳动力增加和科技进步等因素长期作用的结果。尤其在发展中国家,生产性资产积累的增长在经济增长中占有举足轻重的地位。因此,研究生产性投资问题对正确认识经济发展的规律有着重要的现实意义。

对于投资问题人们已经做了大量研究,建立了各种理论和应用模型,并进行定量分析。这些理论基本上可归纳为三大类:一是计量经济模型。这类模型对数据依赖大,而且对经济机制的揭示也不够充分。二是投入产出模型。这类模型在实际中得到广泛应用,但它基于各部门间联系是线性关系的假设。三是冯·诺依曼模型及相关的大道定理[1]。

资产存量在投资问题研究中占重要地位。传统方法主要有三种:在西方国家,资产存量是由历年资产投资额累计确定;在社会主义国家,资产存量由历年资产投资额与资产投资形成率的乘积确定;第三种方法是资产的大规模普查法,前苏联就曾使用过这种方法,但其成本太高。然而,无论是以美国为代表的西方国家的投资累计法,还是前苏联和东欧国

家的大规模普查法，都不能很好地解决资产的"年代"问题。传统方法不是解决资产存量数据有效取得的最好途径。

近年来由于系统科学理论的进展，为研究资产存量问题提供了新的思路和方法。从某种意义上讲，资产存量发展过程也是个生灭过程。生灭过程在客观世界中是广泛存在的，如生物种群的繁衍、人口的出生和死亡，等等。对这类过程的定量描述和研究已有很大进展。

本书将研究一种投资控制模型，它是按照宏观经济内在规律，从系统论观点出发，将一个国家或地区的生产部门看作整个国民经济的一个子系统，使用生产函数作为投资反馈要素；从资产役龄(资产已经使用年数)结构角度，建立具有年龄结构的资产存量发展过程的动力系统模型。该模型不仅能够反映各个时期资产存量，而且能够直观地描述资产役龄结构的分布状况，较好地解决资产的"年代"问题，并能用于宏观投资控制和长期经济发展预测。

1.1 投资控制系统模型

一个国家或地区的经济发展过程，是由很多因素决定的。社会制度、法律法规、自然资源、科技水平、人口数量、人口素质以及跨国、跨地区、跨行业经营等等，都能严重地影响该国家或地区的经济发展。然而，投资规模、投资收益率以及资本的输入、输出却是决定该国家或地区经济发展的直接原因。

我们的目的是定量地研究对一个国家或地区的经济发展起决定作用的生产部门的资产存量变化和发展过程。为了明确地确定本书对资产存量问题研究的范围，我们将作如下约定：把所要研究的国家或地区的生产部门的资产作为一个整体来考虑，也就是作为一个系统来研究，而不是去个别地讨论每一项具体的资产的状态变化。

在定量研究中，所有表征和影响资产存量变化的因素都是在整个资产平均意义下确定的，如资产消耗率、资产积累率等等。

资产存量变化过程定量研究的目的，就是找出资产存量随时间的变化规律以及能够影响该过程的变化的因素。决定这一规律的变量是时间的流逝、资产的消耗、资产的积累、资本的输入输出等。从下面的讨论中

将会看到，用定量函数表示的这四种因素，就能唯一决定任何一个被研究的国家或地区生产性资产存量变化的全过程。

设所研究的是某一地区的资产存量发展过程。这个地区可以是一个省、市，也可以是一个国家，甚至是某些跨国经济合作区。为了表示这个地区资产存量随着资产役龄（资产已经使用年数）和时间的变化情况，我们引进两个变量的函数 $N(a,t)$，这里 a 表示役龄，t 表示时间，它们都是连续变化的。

用 $N(a,t)$ 表示 t 时刻该地区一切役龄小于 a 的资产总数（以价值计量）。这样定义的函数 $N(a,t)$ 叫做资产函数。从定义本身可以看出，$N(a,t)$ 总是大于或等于零，即对任意的 a 和 t，都有 $N(a,t)\geqslant 0$。

另外对任意固定的 t，当 $a_2>a_1$ 时，必有 $N(a_2,t)\geqslant N(a_1,t)$。这说明 $N(a,t)$ 是 a 的非降函数。用 a_m 表示资产所能使用的最大年限，则 $N(a_m,t)$ 就是 t 时刻该地区的资产总量，今后用 $N(t)$ 表示它。根据 $N(a,t)$ 上述性质，则有

$$N(0,t)=0$$
$$N(a_m,t)=N(\infty,t)=N(t) \tag{1.1.1}$$

为了讨论方便，我们假定 $N(a,t)$ 及其一阶偏导数

$$N_a'(a,t)=\frac{\partial N(a,t)}{\partial a} \text{和} N_t'(a,t)=\frac{\partial N(a,t)}{\partial t}$$

都是连续函数。

设

$$p(a,t)=\frac{\partial N(a,t)}{\partial a}$$

$p(a,t)$ 称为资产役龄分布密度函数。根据资产函数 $N(a,t)$ 的非降性质和式(1.1.1)，有

$$p(a,t)\geqslant 0,\ p(a_m,t)=0 \tag{1.1.2}$$

如果 Δa ($\Delta a>0$) 是一足够小的年限区间，则 t 时刻役龄在 a 和 $a+\Delta a$ 之间的资产总数为 $p(a,t)\Delta a$。另外由于

$$p(a,t)=\frac{\partial N(a,t)}{\partial a},\ N(0,t)=0$$

则下列基本关系成立：

$$N(a,t)=\int_0^a p(\xi,t)\mathrm{d}\xi$$

$$N(a_m,t)=\int_0^{a_m} p(\xi,t)\mathrm{d}\xi=\int_0^{\infty} p(\xi,t)\mathrm{d}\xi=N(t) \tag{1.1.3}$$

同样，容易求得 t 时刻役龄在 a_1 和 $a_2(a_2>a_1)$ 之间的资产总数为

$$N(a_2,t)-N(a_1,t)=\int_{a_1}^{a_2} p(\xi,t)\mathrm{d}\xi \tag{1.1.4}$$

资产消耗率函数是资产存量变化过程中的重要参数之一。设 t 时刻役龄在区间 $[a,\ a+\Delta a]$ 的资产，平均单位时间内消耗掉的数量（以价值计）为 $M(a,\Delta a,t)$，而同一时刻役龄在 $[a,\ a+\Delta a]$ 内仍在使用的资产数量为 $p(a,t)\Delta a$，定义相对消耗率函数为

$$\mu(a,t)=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{M(a,\Delta a,t)}{p(a,t)\Delta a} \tag{1.1.5}$$

由资产消耗率函数定义可知，对足够小的 Δa、Δt，由 t 到 $t+\Delta t$ 时刻，役龄在 $[a,\ a+\Delta a]$ 中消耗掉的资产数量 $M(a,\Delta a,t)$ 为

$$M(a,\Delta a,t)=\mu(a,t)p(a,t)\Delta a\Delta t \tag{1.1.6}$$

对于所研究的地区，假定我们暂时不考虑资本的输入输出对资产存量的影响，只考虑资产自身消耗与积累过程。在 t 时刻役龄属于 $[a,\ a+\Delta a]$ 的资产数量为 $p(a,t)\Delta a$，当经过了 Δt 时间，在 $t+\Delta t$ 时刻，一部分资产被消耗，其数量为 $\mu(a,t)p(a,t)\Delta a\Delta t$，另一部分到了 $t+\Delta t$ 时刻，变成了役龄属于 $[a+\Delta a',\ a+\Delta a+\Delta a']$ 的资产。

注意到 a 与 t 具有相同量纲，$\mathrm{d}a/\mathrm{d}t=1$，所以 $\Delta a'=\Delta t$。在 $t+\Delta t$ 时刻，役龄在 $[a+\Delta a',a+\Delta a+\Delta a']$ 中的资产数量为 $p(a+\Delta a',t+\Delta t)\Delta a$。显然以下关系式成立：

$$p(a,t)\Delta a-p(a+\Delta a',\ t+\Delta t)\Delta a=\mu(a,\ t)p(a,t)\Delta a\Delta t$$

现将上式稍加变换

$$\begin{aligned}&p(a+\Delta a',t+\Delta t)\Delta a-p(a,\ t+\Delta t)\Delta a+\\&p(a,t+\Delta t)\Delta a-p(a,\ t)\Delta a\\=&-\mu(a,\ t)p(a,t)\Delta a\Delta t\end{aligned}$$

等式两边除以 $\Delta a\Delta t$，可以得到

$$\frac{p(a+\Delta a',t+\Delta t)-p(a,\ t+\Delta t)}{\Delta a'}+\frac{p(a,t+\Delta t)-p(a,\ t)}{\Delta t}$$

$= -\mu(a,\ t)p(a,t)$

令 $\Delta t \to 0$,并注意到 $\Delta a' = \Delta t$,则得到

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial a} = -\mu(a,\ t)p(a,t) \tag{1.1.7}$$

这是一个一阶线性偏微分方程,称为投资发展方程。

为了从上述方程求出资产分布密度函数 $p(a,t)$,还必须有初始条件和边界条件。可取任意时刻作为 t 的初始时刻,而不失其一般性,取 $t=0$,对应这个时刻的资产分布密度函数通常可由统计数据给出,它是已知函数,即

$$p(a,0) = p_0(a) \tag{1.1.8}$$

这就是方程(1.1.7)的初始条件。

另一方面,记

$$p(0,\ t) = \varphi(t) \tag{1.1.9}$$

这是式(1.1.7)的边界条件。其中 $\varphi(t)$ 就是 t 时刻单位时间内对本地区投资后新增的资产数量,我们称之为资产绝对积累率。

把方程(1.1.7)、(1.1.8)、(1.1.9)联合起来,就得到描述资产存量发展变化过程的完整的投资微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a} = -\mu(a,\ t)p(a,t) & (0 \leqslant a \leqslant a_m) \\ p(a,0) = p_0(a) & (\ t \geqslant 0) \\ p(0,t) = \varphi(t) & \end{cases} \tag{1.1.10}$$

根据偏微分方程的理论,当给出 $\mu(a,t)$ $p_0(a)$ $\varphi(t)$ 后,便可求方程(1.1.10)的解 $p(a,t)$:

$$p(a,t) = \varphi(t-a)\mathrm{e}^{-\int_0^a \mu(\xi,\xi+t-a)\mathrm{d}\xi} + p_0(a-t)\mathrm{e}^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi,\xi+t-a)\mathrm{d}\xi} \tag{1.1.11}$$

上式中,当 $t \leqslant a$ 时,$\varphi(t-a) \equiv 0$;当 $t > a$ 时,$p_0(a-t) \equiv 0$。

如果 $\mu(a,t)$ 不依赖于 t 而只依赖于 a,即 $\mu(a,t) = \mu(a)$,则上式可进一步简化成

$$p(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t)\mathrm{e}^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant a \\ \varphi(t-a)\mathrm{e}^{-\int_0^a \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} & \text{当 } a < t \end{cases} \tag{1.1.12}$$

表达式(1.1.11)和(1.1.12)表明,资产分布密度函数 $p(a,t)$ 和资产绝对积累率 $\varphi(t)$ 成线性关系,而和资产消耗率 $\mu(a,t)$ 近似于指数规律。

它们对 $p(a,t)$ 的影响是完全相反的。$\varphi(t)$ 增大，$p(a,t)$ 也增大；而 $\mu(a,t)$ 增大，则 $p(a,t)$ 减少。

从控制论观点来看，$\varphi(t)$ 是分布参数方程(1.1.10)的控制变量（输入），它出现在系统的边界条件中，所以，系统方程(1.1.10)称为边界控制的分布参数系统。但这里的 $\varphi(t)$ 还没能和实时资产分布状态 $p(a,t)$ 发生联系，所以这种控制又叫开环控制。实际上，$\varphi(t)$ 应和 t 时刻的资产存量、资产产出能力以及相对积累率有密切关系。$\varphi(t)$ 可以表达成如下形式：

$$\varphi(t)=r(t)f(N(t),\ L(t),\ A(t),\ X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n) \qquad (1.1.13)$$

其中，$r(t)$ 为生产性资产投资占国民生产总值(GNP) $Y(t)$ 的比率，通常称之为资产积累率；$N(t)$ 为资本（指资产）投入；$L(t)$ 表示劳动力投入；$A(t)$ 为规模因素(Scals Factor)，并表示一个时间里的技术水平。X_1，$X_2,\cdots,\ X_n$ 表示各种中间投入，

$$Y=f(N(t),\ L(t),\ A(t),\ X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$$

表示生产函数。

如果把 Cobb-Douglas 生产函数（简称 C-D 生产函数）

$$Y(t)=A(t)L^{\beta}(t)N^{\alpha}(t)$$

代入式(1.1.13)，即可得到边界条件

$$\varphi(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\int_0^{a_m} p(a,t)\mathrm{d}a\right]^{\alpha} \qquad (1.1.14)$$

再把式(1.1.14)代入方程(1.1.10)中，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a}=-\mu(a,\ t)p(a,t)\\ p(a,0)=p_0(a)\\ p(0,t)=\varphi(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\displaystyle\int_0^{a_m} p(a,t)\mathrm{d}a\right]^{\alpha}\end{cases} \qquad (1.1.15)$$

由此可以看到，式(1.1.14)使 t 时刻的绝对积累率 $\varphi(t)$ 与同一时刻的资产分布状态 $p(a,t)$ 建立了直接关系，这在控制论中叫作实时状态反馈。

现在，我们讨论一下资本的输入、输出对投资系统的影响。用 $h(t)$ 表示 t 时刻单位时间内该地区资本输入、输出的总数，并规定输入为正，输出为负。这时，边界条件(1.1.14)应改为

$$\varphi(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\int_0^{a_m} p(a,t)\mathrm{d}a\right]^{\alpha}+h(t) \qquad (1.1.16)$$

这样我们就得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a}=-\mu(a,\ t)p(a,t)\\ p(a,0)=p_0(a)\\ p(0,t)=\varphi(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\displaystyle\int_0^{a_m} p(a,t)\mathrm{d}a\right]^{\alpha}+h(t)\end{cases}\tag{1.1.17}$$

但是,国家或地区间相互投资的主体可以是货币形态的资产,也可以是实物形态的资产(已使用 a 年应视同役龄为 a 的资产)。如果把货币形态的资产看作是役龄为零的资产,就可以推出带有资本输入、输出项的投资方程。

用 $g(a,t)\Delta a\Delta t$ 表示役龄在区间$[a,\ a+\Delta a]$中的资产,在$[t,\ t+\Delta t]$时间内输入或输出该地区的资产总数,并规定输入为正,输出为负。重复方程(1.1.7)的类似讨论,可以得到下述带有资本输入、输出项的投资方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a}=-\mu(a,\ t)p(a,t)+g(a,t)\\ p(a,0)=p_0(a)\\ p(0,t)=\varphi(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\displaystyle\int_0^{a_m} p(a,t)\mathrm{d}a\right]^{\alpha}+h(t)\end{cases}\tag{1.1.18}$$

国民经济的统计指标通常是以年为单位。为了与实际统计相一致且方便使用,下面对上述连续模型以年为役龄和时间单位进行离散化。

设 m 为固定资产的最长使用寿命,令

$$x(t)=\int_i^{i+1} p(a,t)\mathrm{d}a$$

便得到模型(1.1.18)相应的离散模型

$$\begin{cases}x_{i+1}(t+1)=[1-\mu_i(t)]x_i(t)+g_i(t)\quad (i=0,1,\cdots,m-1)\\ x_i(0)=x_{i0}\\ x_0(t)=r(t)A(t)L^{\beta}(t)\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{m} x_i(t)\right]^{\alpha}+h(t)\end{cases}$$

另外，从偏微分方程(1.1.15)可以推出积分形式的资产存量发展方程。

事实上，将式(1.1.14)代入式(1.1.11)中，可得方程(1.1.15)的解为

$$p(a,t)=r(t-a)A(t-a)L^{\beta}(t-a)N^{\alpha}(t-a)\ e^{-\int_0^a \mu(\xi,\xi+t-a)d\xi}+ p_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi,\xi+t-a)d\xi} \tag{1.1.19}$$

其中

$$N(t)=N(a_m,t)=\int_0^{a_m} p(a,t)da \tag{1.1.20}$$

再将式(1.1.19)代入式(1.1.20)得

$$N(t)=\int_0^t r(t-a)A(t-a)L^{\beta}(t-a)N^{\alpha}(t-a)\ e^{-\int_0^a \mu(\xi,\xi+t-a)d\xi}da+ \int_t^{\infty} p_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi,\xi+t-a)d\xi}da$$

若令

$$z(t)=\int_t^{\infty} p_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi,\xi+t-a)d\xi}da$$

则有

$$N(t)=\int_0^t r(t-a)A(t-a)L^{\beta}(t-a)N^{\alpha}(t-a)\times e^{-\int_0^a \mu(\xi,\xi+t-a)d\xi}da+z(t) \tag{1.1.21}$$

方程(1.1.21)就是积分形式的资产存量发展方程，它描述了资产总量的变化过程。

1.2 投资大系统

世界上，不同国家的社会制度、生产力水平、科技发展状况、劳动者文化素质等各不相同。有社会主义制度，也有资本主义制度；有发达国家，也有发展中国家。即使是在同一个国家内部，其地区间经济发展也很不均衡。比如，根据各地区经济发展状况，就可以把我国各地区的经济结构划分为发达地区经济、新兴工业化地区经济、原材料输出型地区经济和自给自足型地区经济四大类。不同的国家甚至同一国家中经济结构不同的

地区，其资产分布状态差异很大。为了反映这一特点，必须以投资方程(1.1.18)为基础，建立投资发展方程组，以便既能描述一个局部地区的资产状态变化规律，又能细致地考察各个国家或地区相互投资对整个资产存量演变的影响。

设有 n 个国家或地区，第 i 个地区的资产函数记为 $N_i(a,t)$，资产分布密度函数

$$p_i(a,t)=\frac{\partial N_i(a,t)}{\partial a} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

整个资产状态可用向量函数

$$\boldsymbol{P}(a,t)=(p_1(a,t),\ p_2(a,t),\cdots,\ p_n(a,t))$$

来表示。再用 $\mu_i(a,t)$ 表示第 i 个地区的相对资产消耗率函数，$a_{ij}(a,t)$ 表示 t 时刻第 j 个地区对第 i 个地区的按役龄投资率，即第 j 个地区对第 i 个地区投资的役龄为 a 的资产净额（第 j 个地区对第 i 个的地区投资额减去第 i 个地区对第 j 个的地区投资额）与第 j 个地区役龄为 a 的资产总额的比率，再用 $g_i(a,t)$ 表示第 i 个地区的资产扰动。这样，我们便得到如下投资方程组

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_1(a,t)}{\partial a}=-\mu_1(a,\ t)p_1(a,t)+\\
&\qquad\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(a,t)p_j(a,t)+g_1(a,t)\\
&\frac{\partial p_2(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_2(a,t)}{\partial a}=-\mu_2(a,\ t)p_2(a,t)+\\
&\qquad\sum_{j=1}^{n} a_{2j}(a,t)p_j(a,t)+g_2(a,t)+\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&\frac{\partial p_n(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_n(a,t)}{\partial a}=-\mu_n(a,\ t)p_n(a,t)+\\
&\qquad\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(a,t)p_j(a,t)+g_n(a,t)+
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

引进向量和矩阵符号，令

$$\mathbf{G}(a,t)=(g_1(a,t),\ g_2(a,t),\cdots,\ g_n(a,t))$$

$$\boldsymbol{A}(a,t)=\begin{bmatrix} a_{11}(a,t) & a_{12}(a,t) & \cdots & a_{1n}(a,t) \\ a_{21}(a,t) & a_{22}(a,t) & \cdots & a_{2n}(a,t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(a,t) & a_{n2}(a,t) & \cdots & a_{nn}(a,t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}(a,t)=\begin{bmatrix} \mu_1(a,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2(a,t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n(a,t) \end{bmatrix}$$

则方程组(1.2.1)可写成向量微分方程形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{P}(a,t)}{\partial a}=-\boldsymbol{M}(a,t)\boldsymbol{P}(a,t)+\boldsymbol{A}(a,t)\boldsymbol{P}(a,t)+\boldsymbol{G}(a,t)$$

它的初始条件和边界条件是

$$\boldsymbol{P}(a,0)=(p_{01}(a),\ p_{02}(a),\cdots,\ p_{0n}(a))$$
$$\boldsymbol{P}(0,t)=\boldsymbol{\Phi}(t)=(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\cdots,\ \varphi_n(t))$$

其中 $p_{0i}(a)$ $(i=1,2,\cdots,n)$是第 i 地区的初始资产分布密度函数，而$\varphi_i(t)$则是该地区的绝对积累率函数，后者还可写成

$$\varphi_i(t)=r_i(t)A_i(t)L_i^{\beta}(t)\left[\int_0^{a_m} p_i(a,t)\mathrm{d}a\right]^{\alpha}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

其中，$r_i(t)$为第 i 个地区资产的相对积累率，$A_i(t)$，$L_i(t)$分别为该地区的科技贡献率(含规模因素)和劳动力投入数。

这个模型不仅对大范围内的资产状况的描述更为精确，而且还可以建立资产存量统计、长期经济预测和控制的大模型。

1.3 闭环投资控制系统模型

设 $C(t)$、$Z(t)$分别表示 t 时刻的消费和持久性收入，w $(0<w<1)$是持久性收入中用于消费的比例系数，则

$$C(t)=wZ(t) \tag{1.3.1}$$

根据文献[10]，t 时刻持久性收入满足

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}=\theta\left[Y(t)-Z(t)\right] \tag{1.3.2}$$