普通高校专升本丛书

PUTONG GAOXIAO ZHUANSHENGBEN CONGSHU

高明策划 大学教辅 工作室

概率论与数理统计基础

汪志宏 石雪梅 编

考试指导

西北工業大學出版社

考试指导丛书

概率论与数理统计基础考试指导

汪志宏　石雪梅　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是按照教育部最新制定的“高职高专教育数学基础课程教学基本要求”，并依据2004年审定的“概率论与数理统计基础”教学大纲编写的。全书分为8，内容由基本知识点、典型题分析、同步练习题、同步练习题参考解答等4个知识板块组成。通过对知识点的全面概括，指导读者理解基本概念和理论；通过对典型例题的分析解答和点评，帮助读者开拓解题思路，提高分析和解决问题的能力；同步练习题给出了详细的解题过程，帮助读者及时了解自己掌握知识的情况，有利于做到融会贯通。

本书可作为高职高专学习概率论与数理统计基础课程的辅导和参考书，也可供专升本的读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计基础考试指导/汪志宏，石雪梅编．西安：西北工业大学出版社，2006.9
（考试指导丛书）
ISBN 7-5612-2136-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①汪…②石… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第109643号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西宝石兰印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张：10
字　　数：262千字
版　　次：2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
印　　数：1～6 000册
定　　价：14.00元

前　言

高等职业教育是新世纪高等教育的重要组成部分．为适应高职高专教育发展以及教学和学习需要，我们按照教育部最新制定的“高职高专教育数学基础课程教学基本要求”以及教育部“关于概率论与数理统计课程的基本要求”和 2004 年审定的“概率论与数理统计基础”教学大纲，编写了这本参考书．

本书紧密围绕高职高专的培养目标和特点，着重对概率论与数理统计基础的基本知识点进行全面的解释说明，重点讲述和分析典型题的解题方法及技巧，以培养读者学习、解题能力．

本书除基本知识点全面、重点解析清楚易懂等特点外，还有以下特色：

(1) 增加了一章的篇幅叙述准备知识，这样，有利于读者的知识连贯和对以往知识的巩固，同时也突出以往容易混淆和易忽略的问题．

(2) 注重解题思路及技巧的培养．书中对典型例题解题思路及技巧重点分析，还对每一类型题目进行总结归纳点评，注重一题多解，有利于读者举一反三，扩大知识面，更全面地掌握所学知识．

(3) 着眼于学习人员的实际需要，同步练习题给出详细的解答，有助于读者更快更好地发现和解决学习及解题中遇到的问题．

(4) 为方便读者自测学习及复习效果，附录还给出了课程考试题以及供专升本读者练习的样卷．

(5) 书中收录的例题、习题均选自近几年高职高专的通用教材和流行辅导书中，或者是选自专升本试题，针对性强．

本书由汪志宏、石雪梅编写，由汪志宏负责统稿．

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏及错误之处，恳请读者批评指正．

编　者

2006 年 6 月

目 录

第 0 章　准备知识……………………………………………………… 1

0.1　基本原理 ……………………………………………………………… 1

0.1.1　基本知识点 ……………………………………………………… 1

0.1.2　典型题分析 ……………………………………………………… 1

0.1.3　同步练习题 ……………………………………………………… 2

0.1.4　同步练习题参考解答 …………………………………………… 3

0.2　排列 …………………………………………………………………… 3

0.2.1　基本知识点 ……………………………………………………… 3

0.2.2　典型题分析 ……………………………………………………… 4

0.2.3　同步练习题 ……………………………………………………… 4

0.2.4　同步练习题参考解答 …………………………………………… 5

0.3　组合 …………………………………………………………………… 5

0.3.1　基本知识点 ……………………………………………………… 5

0.3.2　典型题分析 ……………………………………………………… 6

0.3.3　同步练习题 ……………………………………………………… 7

0.3.4　同步练习题参考解答 …………………………………………… 7

第 1 章　随机事件及其概率………………………………………………… 8

1.1　随机事件及其概率、古典概型 ……………………………………… 8

1.1.1　基本知识点 ……………………………………………………… 8

1.1.2　典型题分析 ……………………………………………………… 11

1.1.3　同步练习题 ……………………………………………………… 14

1.1.4　同步练习题参考解答 …………………………………………… 15

1.2　加法公式条件概率和乘法公式 ……………………………………… 16

1.2.1　基本知识点 ……………………………………………………… 16

1.2.2　典型题分析 ……………………………………………………… 17

1.2.3　同步练习题 ……………………………………………………… 20

1.2.4　同步练习题参考解答 …………………………………………… 20

1.3　全概率公式、贝叶斯公式和独立试验概型 ………………………… 21

1.3.1　基本知识点 ……………………………………………………… 21

1.3.2 典型题分析 …… 23
1.3.3 同步练习题 …… 27
1.3.4 同步练习题参考解答 …… 28

第2章　一维随机变量及其分布 …… 30

2.1 一维离散型随机变量及其分布 …… 30
2.1.1 基本知识点 …… 30
2.1.2 典型题分析 …… 32
2.1.3 同步练习题 …… 35
2.1.4 同步练习题参考解答 …… 36
2.2 一维连续型随机变量及其分布 …… 37
2.2.1 基本知识点 …… 37
2.2.2 典型题分析 …… 38
2.2.3 同步练习题 …… 41
2.2.4 同步练习题参考解答 …… 42

第3章　二维随机变量及其分布 …… 44

3.1 离散型二维随机变量的分布 …… 44
3.1.1 基本知识点 …… 44
3.1.2 典型题分析 …… 46
3.1.3 同步练习题 …… 49
3.1.4 同步练习题参考解答 …… 50
3.2 连续型二维随机变量的分布 …… 51
3.2.1 基本知识点 …… 51
3.2.2 典型题分析 …… 52
3.2.3 同步练习题 …… 55
3.2.4 同步练习题参考解答 …… 56
3.3 相互独立的随机变量与二维随机变量函数的分布 …… 57
3.3.1 基本知识点 …… 57
3.3.2 典型题分析 …… 58
3.3.3 同步练习题 …… 61
3.3.4 同步练习题参考解答 …… 62

第4章　随机变量的数字特征 …… 64

4.1 数学期望 …… 64
4.1.1 基本知识点 …… 64
4.1.2 典型题分析 …… 65
4.1.3 同步练习题 …… 68

4.1.4 同步练习题参考解答 …… 69
4.2 方差、协方差和相关系数 …… 70
4.2.1 基本知识点 …… 70
4.2.2 典型题分析 …… 72
4.2.3 同步练习题 …… 75
4.2.4 同步练习题参考解答 …… 76

第5章 大数定律与中心极限定理 …… 78

5.1 大数定律 …… 78
5.1.1 基本知识点 …… 78
5.1.2 典型题分析 …… 79
5.1.3 同步练习题 …… 80
5.1.4 同步练习题参考解答 …… 81
5.2 中心极限定理 …… 82
5.2.1 基本知识点 …… 82
5.2.2 典型题分析 …… 83
5.2.3 同步练习题 …… 85
5.2.4 同步练习题参考解答 …… 86

第6章 数理统计基本概念及参数估计 …… 89

6.1 样本及抽样分布 …… 89
6.1.1 基本知识点 …… 89
6.1.2 典型题分析 …… 92
6.1.3 同步练习题 …… 94
6.1.4 同步练习题参考解答 …… 95
6.2 点估计与估计量的评选标准 …… 96
6.2.1 基本知识点 …… 96
6.2.2 典型题分析 …… 98
6.2.3 同步练习题 …… 101
6.2.4 同步练习题参考解答 …… 103
6.3 区间估计 …… 104
6.3.1 基本知识点 …… 104
6.3.2 典型题分析 …… 106
6.3.3 同步练习题 …… 108
6.3.4 同步练习题参考解答 …… 109

第7章 假设检验与线性回归 …… 111

7.1 统计假设检验 …… 111

7.1.1　基本知识点 …… 111
7.1.2　典型题分析 …… 115
7.1.3　同步练习题 …… 120
7.1.4　同步练习题参考解答 …… 121
7.2　回归分析 …… 123
7.2.1　基本知识点 …… 123
7.2.2　典型题分析 …… 124
7.2.3　同步练习题 …… 127
7.2.4　同步练习题参考解答 …… 128

附　录 …… 131

1　课程考试题一及参考解答 …… 131
1.1　试题一 …… 131
1.2　试题一参考解答 …… 132
2　课程考试题二及参考解答 …… 135
2.1　考试题二 …… 135
2.2　考试题二参考解答 …… 136
3　专升本考试样卷一及参考解答 …… 139
3.1　样卷一 …… 139
3.2　样卷一参考解答 …… 141
4　专升本考试样卷二及参考解答 …… 144
4.1　样卷二 …… 144
4.2　样卷二参考解答 …… 146

参考文献 …… 150

第 0 章　准备知识

要点导读：

- 加法原理和乘法原理．
- 排列和组合．

0.1　基本原理

0.1.1　基本知识点

加法原理和乘法原理在排列组合和概率论中占有重要的地位，因此熟练掌握和应用两大基本原理是学好概率论的关键．

1. 加法原理

(1) 简单的加法原理．若完成一件事，有两类不同的办法．在第一类办法中有 m 种方法，在第二类办法中有 n 种方法，两类办法中每一种方法都能完成这件事，则完成这件事共有 $m+n$ 种不同的方法．例如从甲地到乙地，从现实和方便讲，可以坐汽车去，也可以坐船去，即有坐汽车去和坐船去这两类不同的办法；坐汽车有坐小车、中巴或大巴 3 种不同的方法，坐船有坐铁壳船和小轮船 2 种不同的方法，则从甲地到乙地一共有 5 种不同的方法．

(2) 较复杂的加法原理．做一件事，若完成它有 n 类不同的办法．在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，类似地，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法．这 n 类办法中每一种方法都能完成这件事，则完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法．

2. 乘法原理

(1) 简单的乘法原理．完成一件事，必须通过两个步骤．第一步骤有 m 种方法，第二步骤有 n 种方法，则完成这件事共有 mn 种不同的方法．例如由甲村去乙村的道路有 5 条，由乙村去丙村的道路有 3 条，则从甲村经乙村去丙村，共有 5×3 种不同的走法．

(2) 较复杂的乘法原理．完成一件事，必须通过 n 个步骤．做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，类似做第 n 步有 m_n 种不同的方法，则完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法．

0.1.2　典型题分析

【例 0.1】　在读书活动中，一个学生要从 2 本科技书、3 本故事书、4 本文艺书里任选一本，共有多少种不同的选法？

分析 本题是要从 2 本科技书、3 本故事书、4 本文艺书共 9 本书里任选一本，从 2 本科技书任选一本，有 2 种不同的选法；从 3 本故事书里任选一本，有 3 种不同的选法；从 4 本文艺书里任选一本，有 4 种不同的选法．主要考查点是加法原理．

解答 共有 $2+3+4=9$ 种不同的选法．

【例 0.2】 乘积 $(a+b)(x+y+z)$ 展开后共有多少项？

分析 据多项式乘法法则，乘积 $(a+b)(x+y+z)$ 结果是后括号里的每个元素分别同前括号里每个元素乘积的和．前括号里有两个元素，后括号里有三个元素，要完成乘积就相当有两个步骤，第一步有 2 种不同的方法；第二步有 3 种不同的方法，所以用乘法原理．

解答 展开后共有 $2\times3=6$ 项．

【例 0.3】 一个口袋内装有 5 个小球，另一个口袋内装有 6 个小球，所有这些小球颜色互不相同．问：

(1) 从两个口袋内任取 1 个小球，有多少种不同的取法？

(2) 从两个口袋内各取 1 个小球，有多少种不同的取法？

分析 两个问题虽只差一个字，实际完成(1)，(2) 里的两件事过程有较大区别：从两个口袋里任取一球，要完成这件事有两类办法，一类是从装有 5 个小球口袋内任取一个小球，另一类是从装有 6 个小球口袋内任取一个小球，从而用加法原理；从两个口袋里各取一球，要完成这件事有两个步骤，第一步是从装有 5 个小球口袋内任取一个小球，第二步是从装有 6 个小球口袋内任取一个小球，从而用乘法原理．

解答 (1) $5+6=11$，所以从两个口袋内任取一个小球，有 11 种不同的取法；

(2) $5\times6=20$，所以从两个口袋内任取一个小球，有 30 种不同的取法．

点评 实际有关加法原理和乘法原理的问题都可模型化为本例的这类取球问题．

例如简单的加法原理：若完成一件事，有两类不同的办法．在第一类办法中有 m 种方法，在第二类办法中有 n 种方法，两类办法中每一种方法都能完成这件事，则完成这件事共有 $m+n$ 种不同的方法．用该模型可以叙述为：一个口袋内装有 m 个小球，另一个口袋内装有 n 个小球，所有这些小球颜色互不相同．从两个口袋内任取一个小球，有 $m+n$ 种不同的取法．

再如简单的乘法原理：完成一件事，必须通过两个步骤．第一步骤有 m 种方法，第二步骤有 n 种方法，则完成这件事共有 mn 种不同的方法．用该模型可以叙述为：一个口袋内装有 m 个小球，另一个口袋内装有 n 个小球，所有这些小球颜色互不相同．从两个口袋内各取一个小球，有 mn 种不同的取法．

0.1.3 同步练习题

一、选择题

1. 从装着编号为 1，2，3 的球的一号抽屉和装着编号为 4，5，6 的球的二号抽屉中任取一球，有________种可能结果．

A. 3　　B. 5　　C. 6　　D. 9

2. 乘积 $(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2+z_3)$ 展开后有________项．

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 12

二、填空题

1. 一件工作可以用两种方法完成，有 3 人会用第一种方法完成，另有 4 人会用第二种方法完成，选出 1 人来完成这件工作，共有________种选法．

2. 从甲地直接到乙地有 3 条陆路可走，从乙地直接到丙地有 4 条陆路可走，从甲地直接到丙地有 5 条水路

可走，问从甲地到丙地共有________种不同的走法．

三、计算题

1. 一口袋装有5张分别标有1,2,3,4,5的红卡片，另一口袋装有4张分别标有1,2,3,4的蓝卡片，从两口袋中任抽一张，问抽出的卡片有多少种可能结果？

2. 甲乙两队围棋高手比赛，两队各出5人捉对下棋5盘，共有多少种捉对方式？

3. 书架上层放有6本不同的语文书，中层放有5本不同的数学书，下层放有4本不同的英语书．

(1) 从中任取一本，有多少种不同的取法？

(2) 从中任取语数英各一本，有多少种不同的取法？

0.1.4 同步练习题参考解答

一、选择题

1.【解答】 从一号抽屉取，有3种可能结果；从二号抽屉取，有3种可能结果．故共有6种可能结果．选C.

2.【解答】 展开后的每项必含有每个括号里的一个元素，所以展开后有 $2\times2\times3=12$ 项．选D.

二、填空题

1.【解答】 选会用第一种方法完成的人，有3种选法；选会用第二种方法完成的人，有4种选法．故选出1人来完成这件工作，共有 $3+4=7$ 种选法．

2.【解答】 从甲地可直接到丙地，有5种走法；若先到乙地，再到丙地，则有 $3\times4=12$ 种走法．所以从甲地到丙地共有 $5+12=17$ 种不同的走法．

三、计算题

1.【解答】 从装有红卡片的袋中取，有5种可能结果；从装有蓝卡片的袋中取，有4种可能结果；故有 $5+4=9$ 种可能结果．

2.【解答】 共有 $5\times5=25$ 种捉对方式．

3.【解答】 (1) 从上层任取一本，有6种不同的取法；从中层任取一本，有5种不同的取法；从下层任取一本，有4种不同的取法．故从中任取一本，有 $6+5+4=15$ 种不同的取法．

(2) 取一本语文，有6种不同的取法；取一本数学，有5种不同的取法；取一本英语，有4种不同的取法．故从中任取语数英各一本，有 $6\times5\times4=120$ 种不同的取法．

0.2 排　　列

0.2.1 基本知识点

1. 相关定义

有时我们要从许多对象中抽取一部分，这每个对象都被称为元素．将抽出的元素排成一排，就是排列问题．具体又分为以下两类：

(1) 有重复的排列．在有放回选取中，同一元素可被重复选中，从 n 个不同元素中取 m 个元素组成的一个

排列,称为有重复的排列. 由于 m 个元素每个元素的选取都有 n 种可能,其排列总数为 n^m.

(2) 选排列和全排列. 从包含 n 个不同元素的总体中取出 m 个不同的元素按一定的顺序排成一列,这样的一列元素叫做从 n 个不同元素中取 m 个不同的元素组成的一个排列,又称为选排列. 其排列总数为 A_n^m;当 $m=n$ 时,排列称为全排列,其排列总数为 $n!$.

2. 排列相关公式

(1) 排列数公式.

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

(2) 阶乘.

$$n! = A_n^n = n(n-1)\cdots 2\times 1,\ \text{特别地},0! = 1$$

(3) 排列数公式和阶乘的关系.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

0.2.2 典型题分析

【例 0.4】 计算 A_{10}^3 及 A_3^3.

分析 直接利用排列数公式和阶乘公式.

解答 (1) $A_{10}^3 = 10\times 9\times 8 = 720$

(2) $A_3^3 = 3\times 2\times 1 = 6$

【例 0.5】 写出从 3 个元素 a,b,c 中任取两个元素的所有选排列.

分析 任取两个元素,并要考虑次序.

解答 分别是 a,b b,a a,c c,a b,c c,b.

【例 0.6】 用从 0 到 9 这 10 个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

分析 从 0 到 9 这 10 个数字任取 3 个数字的排列数,减去其中以 0 为排头的排列数,就是用这 10 个数字组成的没有重复数字的三位数的个数.

解答 从 0 到 9 这 10 个数字任取 3 个数字的排列数为 A_{10}^3,其中以 0 为排头的排列数为 A_9^2,所以所求的三位数的个数为 $A_{10}^3 - A_9^2 = 648$.

点评 实际上,还可以结合加法原理或乘法原理来解决这一问题.

解法 1 由于百位上的数字不能为 0,所以可以分成两个步骤来考虑:先排百位上的数,再排十位和个位上的数. 百位上的数只能从 1 到 9 这 9 个数任取一个,有 A_9^1 种;十位和个位上的数,可从余下的 9 个数字中任选两个,有 A_9^2 种. 根据乘法原理,所求三位数的个数为 $A_9^1A_9^2 = 648$.

解法 2 符合题意的三位数可以分为三类:每一位数字都不是 0 的三位数,有 A_9^3 个;个位数字是 0 的三位数,有 A_9^2;十位数字是 0 的三位数,有 A_9^2 个. 据加法原理,符合题意的三位数个数是 $A_9^3 + A_9^2 + A_9^2 = 648$.

0.2.3 同步练习题

一、选择题

1. 4 个人排成一组照相,有________种排法.

A. 1　　B. 4　　C. 24　　D. 12

2. 用 1,2,3,4,5 这 5 个数,可以组成________个是 5 的倍数的四位数.

A. 5　　B. 24　　C. 48　　D. 120

二、填空题

1. 从________个不同的元素中取出 2 个元素的排列数是 56.

2. 一部影片在 4 座影院轮映,每座影院放映一场,共有________种轮映次序.

三、计算题

1. 求 n,使得 $A_{2n}^3 = 10A_n^3$.

2. 由 0 到 5 这 6 个数可以组成多少个没有重复数字的五位数?

3. 7 个人并排站成一排.

(1) 如果甲必须站在中间,有多少种排法?

(2) 如果甲、乙两人必须站在两边,有多少种排法?

0.2.4　同步练习题参考解答

一、选择题

1.【解答】 共有 $A_4^4 = 24$ 种不同的排法. 选 C.

2.【解答】 这四位数是 5 的倍数,个位必须排 5;十位百位千位就是 4 个数选 3 个的全排列,所以可以组成 $A_4^3 = 24$ 个是 5 的倍数的四位数. 选 B.

二、填空题

1.【解答】 设元素个数为 n,由题意,有 $A_n^2 = 56$,即 $n(n-1) = 56$,所以 $n = 8$.

2.【解答】 实际上,轮映次序数就是 4 个元素组成的全排列的排列数,所以共有 $A_4^4 = 24$ 种轮映次序.

三、计算题

1.【解答】 由 $A_{2n}^3 = 10A_n^3$,有 $2n(2n-1)(2n-2) = 10n(n-1)(n-2)$,即 $n = 8$.

2.【解答】 由于 0 不能在首位,所以只要将 6 个数中选 5 个的排列数减去 0 排首位的数个数,即可以组成 $A_6^5 - A_5^4 = 600$ 个没有重复数字的五位数.

3.【解答】 (1) 实际就是 6 人排其余 6 个位置,共有 A_6^6 种排法.

(2) 先排甲乙,再排其余 5 个位置,共有 $A_2^2 A_5^5$ 种排法.

0.3　组　　合

0.3.1　基本知识点

1. 组合定义

从 n 个不同元素中取 m 个元素组成一组,不考虑其次序,称每个组为一个组合. 其组合总数为 C_n^m.

2. 组合数常用公式

(1) 组合数与排列数关系.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$$

(2) 组合数计算公式.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(3) 组合数的性质.

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,特别地,$C_n^0 = 1$.

2) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

3) 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$$

特别地,

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$(1-1)^n = 0 = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^r C_n^r + \cdots + (-1)^n C_n^n b^n$$

0.3.2 典型题分析

【例 0.7】 求 $C_{10}^3 + C_{10}^4$.

分析 可直接利用组合数公式计算.

解答

$$C_{10}^3 + C_{10}^4 = \frac{A_{10}^3}{3!} + \frac{A_{10}^4}{4!} = 330$$

点评 本题还可用组合数的性质计算:

$$C_{10}^3 + C_{10}^4 = C_{11}^4 = \frac{A_{11}^4}{4!} = 330$$

【例 0.8】 平面上有 10 个点,任何 3 个点不在同一直线上,以每 3 点为顶点作三角形,一共可以作多少个三角形?

分析 该问题相当于从 10 个元素中取 3 个,不考虑次序,是组合问题.

解答

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = 120$$

【例 0.9】 现从其中有 2 件次品的 100 件产品中任意抽出 3 件,至少有一件是次品的抽法有多少种?

分析 至少有一件是次品说明有一件次品或有两件次品. 因此从 100 件产品中任意抽出 3 件,除了三件都是合格品这一情况,其余的就是抽取 3 件至少有一件是次品. 所以满足题目问题的抽法数就是从 100 件产品中任意抽出 3 件抽法数减去从 98 件合格产品中任意抽出 3 件抽法数.

解答 从 100 件产品中任意抽出 3 件抽法数为 C_{100}^3,从 98 件合格产品中任意抽出 3 件抽法数为 C_{98}^3,故至少有一件是次品的抽法种数为

$$C_{100}^3 - C_{98}^3 = 161\ 700 - 152\ 096 = 9\ 604$$

点评 用加法原理和乘法原理,本题还有以下直接解法:

从 100 件产品抽出 3 件至少有一件是次品的抽法,包括有一件次品和有两件次品. 其中抽出 3 件里面仅一件次品的抽法 $C_{98}^2 C_2^1$ 种,抽出 3 件里面有两件次品的抽法 $C_{98}^1 C_2^2$ 种,所以至少有一件是次品的抽法种数为 $C_{98}^2 C_1^2 + C_{98}^1 C_2^2 = 9\ 506 + 98 = 9\ 604$.

0.3.3 同步练习题

一、选择题

1. 圆上有 10 个点，过每两点可画一条弦，一共可以画________条弦．

A. 10　　B. 12　　C. 20　　D. 45

2. 凸 5 边形有________条对角线．

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

二、填空题

1. 从 a,b,c,d 4 个元素中任取 2 个元素的所有组合是________．

2. 某校举行各系排球单循环赛，有 8 个队参加，共需要举行________场比赛．

三、计算题

1. 求 $C_n^{n-1}C_{n-1}^{n-3}$.

2. 有 1 元、2 元、5 元纸币各 1 张，一共可以组成多少种币值？

3. 某班有 50 名学生，其中班干部两名，现选派 5 名学生参加某活动：

(1) 如果两个班干部必须在内，有多少种选派法？

(2) 如果两个班干部至少有 1 人在内，有多少种选派法？

0.3.4 同步练习题参考解答

一、选择题

1.【解答】 10 个点在圆上，所以没有 3 点共线，所以一共可以画 $C_{10}^2=45$ 条弦．选 D.

2.【解答】 凸 5 边形任意两个顶点的连线不会经过第 3 个顶点，所以 5 个顶点间的连线减去 5 条边数就是结果，故凸 5 边形有 $C_5^2-5=5$ 条对角线．选 B.

二、填空题

1.【解答】 易知，所有组合如下：a 和 b；a 和 c；a 和 d；b 和 c；b 和 d；c 和 d.

2.【解答】 共需要举行 $C_8^2=28$ 场比赛．

三、计算题

1.【解答】 $C_n^{n-1}C_{n-1}^{n-3}=C_n^1C_{n-1}^2=n\times\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

2.【解答】 一共可以组成 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$ 种币值．

3.【解答】 (1) 如果两个班干部必须在内，有 $C_2^2C_{48}^3=17\ 296$ 种选派法．

(2)“至少有 1 人”就是“有两个人或 1 个人”．所以如果两个班干部至少有 1 人在内，有 $C_2^2C_{48}^3+C_2^1C_{48}^4$ 种选派法．

第 1 章　随机事件及其概率

要点导读:

- ✓ 了解随机试验样本空间样本点和随机事件的概念.
- ✓ 掌握随机事件的关系和运算.
- ✓ 理解概率的概念,掌握概率的基本性质,掌握古典概率的计算.
- ✓ 理解条件概率的概念,掌握概率的乘法公式、加法公式、全概率公式和贝叶斯公式.
- ✓ 理解事件的独立性和独立重复试验的概念,掌握利用事件的独立性进行概率计算.

1.1　随机事件及其概率、古典概型

1.1.1　基本知识点

1. 随机试验

若某试验具有三个特点:可以在相同的条件下重复地进行;每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现,称该试验为随机试验.随机试验最常见的就是抛掷一枚硬币试验:可以在相同的条件下重复地抛掷硬币;每次抛掷前都知道硬币或出现正面或出现反面;每次抛掷前不知道硬币正面出现还是反面出现.

2. 样本空间和样本点

随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为 E 的样本空间;样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.例如以"正面"、"反面"表示抛掷一枚硬币试验的结果,则样本空间 $S=\{$正面,反面$\}$,样本点有两个:正面,反面.

3. 随机事件

(1) 事件.试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件,简称事件;实际上严格来说,只有当 S 是由有限个元素或由可列无限个元素组成时,每个子集才是一个事件.今后假定考查的要作为事件的子集都满足上面条件.

在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

(2) 基本事件.由一个样本点组成的单点集,称为基本事件,例如以"正面""反面"表示抛掷一枚硬币试验的结果,则有两个基本事件{正面}和{反面}.

(3) 必然事件和不可能事件.样本空间 S 包含所有的样本点,它是自身的子集.在每次试验中它总是发

生的，称为必然事件；空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件．

（4）事件的关系和运算．事件的关系和运算主要有以下这些：

1）事件 B 包含事件 A．若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生．

2）事件 A 与事件 B 相等．若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B 相等．

3）和事件．事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件．当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生．$A \cup B$ 有时又记为 $A + B$．

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件．

4）积事件．事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的积事件．当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生．$A \cap B$ 有时又记为 AB．

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件．

5）差事件．事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件．当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A - B$ 发生，所以 $A - B = A\bar{B}$．

6）互不相容事件．若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的．这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生．尤其注意基本事件是两两互不相容的，如以“正面”“反面”表示抛掷一枚硬币试验的结果，则有两个基本事件{正面}和{反面}，显然它们互不相容．

7）互为逆事件．若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件；又称事件 A 与事件 B 为对立事件．这指的是对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生．A 的对立事件记为 $\overline{A}$，并且 $\overline{A} = S - A$．

（5）事件的运算规则．常见的有以下四大运算规则：

1）交换律　$A \cup B = B \cup A$，　$A \cap B = B \cap A$

2）结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3）分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4）德·摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

以上运算规则可推广到多个事件的运算，如分配律：

$$A \cup (B \cap C \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D)$$

4. 频率的定义及性质

（1）定义．在相同的条件下，进行了 n 次试验．在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数．n_A/n 称为事件 A 发生的频率．并记成 $f_n(A)$．

（2）频率具有的基本性质．

1）$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

2）$f_n(S) = 1$，$f_n(\varnothing) = 0$；

3）若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

频率有概率相类似的性质．