ZHONGXUE
SHUXUE
FANGFA
ZHIDAO

赵振威 著

中学数学方法指导

科学出版社

下册

中学数学方法指导

下册

中学数学方法指导

下册

赵振威 著

科学出版社

1988

内 容 简 介

数学方法是解答数学问题的钥匙。本书从中学数学教学实际出发，以初等数学为基本背景，适当联系高等数学知识，系统地介绍数学中的常用方法，从数学思想的总体上，揭示各种数学方法的纵横联系。在写法上以数学解题为线索，通过对各类典型实例的剖析，分析和比较了各种数学方法的原理、特点、适用范围、注意事项和有关的技能和技巧。各例题均附有思考方法，剖析发现解题思路的方法、技巧或思维过程。各章还安排有精选的富有思维的练习题。书末附有参考答案。

本书适应多层次读者的需要，可供高中学生、中学数学教师、师范院校数学系师生、自学青年参考。既可作为高中数学复习参考资料，也可作为师范院校数学方法论选修课教材。

中学数学方法指导

下 册

赵振威 著

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

（北京朝阳门内大街137号）

苏州师专印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经售

•

1988年9月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1988年9月第一次印刷　印张：10

印数：1—10,000　字数：225,000

ISBN7-03-000779-4/G·19

定价：3.30元

目　录

（上册）

（下册）

第十一章　变更问题方法

解答数学题，实质上就是通过由因导果或执果索因，确立题中条件与问题或条件与结论逻辑上的必然联系，实现由已知向未知的转化。一般说来，结构比较简单的问题，通过适当联想就能找到合理的解题途径；对于结构复杂、抽象多变的数学题，常常需要在联想的基础上，联合运用其他思考方法，才能逐步探明解题线索。本章从变更问题的角度，探讨解题的几种思考方法。

一．变更问题的基本思想

所谓变更问题，就是在直接求解原问题难以入手时，把原问题作适当的变更，造成一个或几个比原问题来得简单，难度较低、易于解答的新问题，以通过对新问题的考察，发现原问题的解题思路，最终达到解决原问题的目的。从某种意义上说，解答数学题的关键，就在于对原问题作一系列恰当的变更。

变更问题，既可以变更问题的条件，也可以变更问题的结论，还可以同时变更问题的条件和结论；既可作等价变更，也可作非等价变更。具体地说，在变更问题时，要注意数学题的特点，遵循熟悉化、简单化、特殊化、和谐化、直观化等原则。

1. 熟悉化原则

熟悉化原则是指在变更问题时，要注意把陌生的问题，变更为比较熟悉的问题，以便充分利用已有的知识和经验。

例 1 试证：不存在整数 a，b，c 满足

$$a^2+b^2-8c=6。\qquad (1)$$

思考方法 本题不大容易入手，如果把(1)式变形为 $a^2+b^2=8c+6$，则原题可变更为：证明不存在整数 a 和 b，使它们的平方和被8除余6。变更后的问题我们比较熟悉，可以通过对整数的适当分类，利用整数性质完成证明。

证明 任何整数可以而且仅可以表为下列形式之一：$4n$，$4n+1$，$4n+2$，$4n+3(n\in Z)$。其平方数为

$$(4n)^2=16n^2,$$

$$(4n+1)^2=16n^2+8n+1,$$

$$(4n+2)^2=16n^2+16n+4,$$

$$(4n+3)^2=16n^2+8(3n+1)+1.$$

这就表明，上述四种形式的数的平方，被 8 除的余数只能是 0，1，4。显然，这三个余数的任意两数（可以相同）之和都不可能等于 6。因此，$a^2+b^2\neq 8c+6(a, b, c\in Z)$，即不存在整数 a，b，c 满足 $a^2+b^2-8c=6$。

例 2 （Ptolemy 定理）设AC、BD是圆内接凸四边形$ABCD$的两条对角线（图11—1），求证：

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD。\qquad (1)$$

思考方法 （1）式结构比较复杂，对这类线段等式一般比较生疏，不大容易入手，而对形如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或 $ad=bc$ 一类

线段关系式的证法比较熟悉。因此，自然希望能把(1)式变更为若干个形似$ad=bc$的等式来处理。观察(1)式结构上的特征，可以设想如果能在线段BD(或AC)上寻求一点E，使$AB\cdot CD=AC\cdot BE$ (2)
和

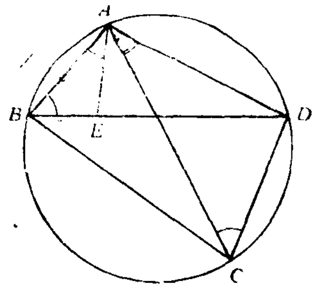

图11—1

$$AD\cdot BC=AC\cdot ED \tag{3}$$

同时成立，那么只要把(2)、(3)式相加，便可推出(1)式。这样，就把原题变更为两个比较熟悉的新问题，利用相似三角形的知识，容易确定点E的位置。

证明 在$\angle BAD$内部作$\angle BAE=\angle CAD$，设AE交BD于E（图11—1），有

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAE=\angle CAD\\ \angle ABE=\angle ACD\end{array}\right\}\Longrightarrow\triangle ABE\sim\triangle ACD$$

$$\Longrightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$$

$$\Longrightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BE.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle EAD=\angle EAC+\angle CAD\\ \angle BAC=\angle EAC+\angle BAE\\ \angle BAE=\angle CAD\end{array}\right\}\Longrightarrow\angle EAD=\angle BAC\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\angle ADE=\angle ACB\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\triangle ADE\sim\triangle ACB$$

$$\Longrightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{BC}$$

$$\Longrightarrow AD\cdot BC=AC\cdot ED.$$

$$\therefore\quad AB\cdot CD+AD\cdot BC$$
$$=AC\cdot BE+AC\cdot ED$$
$$=AC\cdot BD.$$

2.简单化原则

简单化原则是指在变更问题时，要注意把比较复杂的问题，变更为若干个比较简单的问题，以便各个击破，解出原题。

例 3 m为何值时，关于x的二次方程

$$2(m+1)x^2-4mx+3(m-1)=0 \tag{1}$$

至少有一个正根?

思考方法 至少有一个正根的情况比较复杂，可以分解为三个简单问题：（1）有两个正根；（2）有一个正根一个负根；（3）有一个正根和一个根为零。由此原题容易解出，如解法一。不难发现，方程（1）不可能有一个负根和一个根为零，所以至少有一个正根的反面，是有两个负根，这样，也可以先确定有两个负根时m的取值范围，而后解出原题，如解法二。

解法一 方程（1）是二次方程，有$m+1\neq0$，即$m\neq-1$。方程（1）有实根，当且仅当它的判别式不小于零，即

$$\Delta=(-4m)^2-4\times2\times3(m^2-1)\geqslant0$$
$$\Longleftrightarrow-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}.$$

设方程（1）的两根为x_1和x_2，则

$$x_1+x_2=\frac{2m}{m+1},\qquad x_1x_2=\frac{3(m-1)}{2(m+1)}.$$

至少有一个正根可以分成三种互不重复的情况：

（1）有两个正根．这时当且仅当

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m+1}>0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3(m-1)}{2(m+1)}>0, \\ m\neq -1, \\ -\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}. \end{cases}$$

解不等式组，得

$$-\sqrt{3}\leqslant m<-1,\text{或 } 1<m\leqslant\sqrt{3}.$$

（2）有一个正根和一个负根．在这种情况下，有

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{3(m-1)}{2(m+1)}<0, \\ m\neq -1, \\ -\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}, \end{cases}$$

解不等式组，得

$$-1<m<1.$$

（3）有一个正根和一根为零．这时，显然有

$$m=1.$$

综合上述三种情形，当$-\sqrt{3}\leqslant m<-1$或$-1<m\leqslant\sqrt{3}$时，方程（1）至少有一正根．

解法二 方程（1）有两个负根，当且仅当

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m+1}<0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3(m-1)}{2(m+1)}>0, \\ m\neq -1, \\ -\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}. \end{cases}$$

不难证明，上述不等式组无解。所以，方程（1）不可能有两个负根。注意到方程（1）也不可能有一个负根和一个根为零，则当$-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$且$m\neq-1$时，方程（1）至少有一个正根。

例3表明变更问题的具体途径，一般不是唯一的。本题中，显然以解法二较为简单。

3.特殊化原则

特殊化原则是指在变更问题时，要注意考察问题的各种特殊情形，以便从特殊情形的研究中，获取原问题的解题思路。

例4 设$F(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$，其中$\alpha$，$\beta$是适合$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi$的常数。试问$\alpha$，$\beta$为何值时，$F(\theta)$为与$\theta$无关的定值。

思考方法 如果$F(\theta)$是与θ无关的定值，则对于θ的任一值，$F(\theta)$的值是一定数。为此，可考虑便于确立α和β的θ的某些特殊值，如令$\theta=0$，$\frac{\pi}{2}$，$-\alpha$，$-\beta$，把原题变更为：

设$F(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$，$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi$，且$F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(-\alpha)=F(-\beta)$，求$\alpha$，$\beta$的值，并证明$F(\theta)$是与$\theta$无关的定值。

经过这样的特殊化处理，原题就不难解出

解 令$\theta=0$，$\frac{\pi}{2}$，$-\alpha$，$-\beta$，有

$$F(0)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$$

$$=3-\sin^2\alpha-\sin^2\beta,$$

$$F(-\alpha)=\sin^2\alpha+\sin^2(\beta-\alpha),$$

$$F(-\beta)=\sin^2\beta+\sin^2(\beta-\alpha).$$

设 $F(\theta)$是与 θ 无关的定值，则

$$F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(-\alpha)=F(-\beta).$$

比较以上各式，得

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2(\beta-\alpha)=\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

$$\because \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi,$$

$$\therefore \quad 0\leqslant\beta-\alpha\leqslant\pi.$$

因此，$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin(\beta-\alpha)$的值均非负，由(1)式即得

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{\pi}{3}, \quad \beta=\frac{2}{3}\pi.$$

不难验证，当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2}{3}\pi$时，$F(\theta)$确为与 θ 无关的定值．事实上，在这种情形下，有

$$F(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\sin^2\theta+\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2$$

$$=\sin^2\theta+2\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=\frac{3}{2}. \text{（定值）}$$

例 5 三角形三边a，b，c的长都是整数，且$a\leqslant b\leqslant c$。如果$b=m(m\in N)$，这样的三角形有几个？

思考方法 满足条件的三角形的个数，就是能构成三角形的三边a，b，c各种不同的数值的组合总数。为了便于探索a，b，c各种数值的组合规律，可以先考察m取某些特殊数值时三角形的个数。

令$m=1$，则$b=1$。在这种情况下，a的取值应满足以下条件：①$a>0$；②a为整数；③$a\leqslant b=1$。这就是说，a为不大于1的正整数。所以，$a=1$。在a，b，m已经取定的条件下，c的取值应满足以下条件：①c为整数；②$c\geqslant b=1$；③$c<a+b=2$。这就是说，当$a=b=1$时，c为小于2而大于或等于1的整数。所以，$c=1$。因此，当$m=1$时，满足条件的三角形只有1个($a=b=c=1$)。

令$m=2$，则$b=2$。按照同样的思考方法，a为不大于2的正整数，所以$a=1$，2。如果$a=1$，则c为小于3而大于或等于2的整数，所以$c=2$；如果$a=2$，则c为小于4而大于或等于2的整数，所以$c=2$，3。因此，当$m=2$时，满足条件的三角形共有3个($a=1$，$b=c=2$；$a=b=c=2$；$a=b=2$，$c=3$)。

通过考察$m=1$，2时的特殊情形，我们可以发现，对于确定的b，a的取值为不大于b的正整数；对于a，b的每一组确定的值，c的取值为小于$a+b$而大于或等于b的整数，据此规律原题便可解出。

解 依题设，$b=m$，a为满足不等式

$$0<a\leqslant m$$

的一切整数，即$a=1$，2，3，……，$m-1$，m。

对于a，b的每一组确定的值，c为满足不等式

$$m \leqslant c < a+m$$

的一切整数。

这样，当 $b=m$ 时，a、c 取值的组合和合乎条件的三角形的个数可用下表给出

a 值	c 值	合乎条件的三角形个数
1	m	1
2	$m, m+1$	2
3	$m, m+1, m+2$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$m, m+1, m+2, \cdots, 2m-2$	$m-1$
m	$m, m+1, m+2, \cdots, 2m-2, 2m-1$	m

所以，合乎条件的三角形共有

$$1+2+3+\cdots+(m-1)+m=\frac{m(m+1)}{2}\text{（个）}.$$

4.和谐化原则

和谐化原则是指在变更问题时，要注意把条件和结论的表现形式，变更为符合数与形内部固有的和谐统一的特点，以突出问题所及的各种数学对象之间的本质联系。

例 6 设正七边形的边长为a，对角线中长的为x，短的为y，求证：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}. \tag{1}$$

思考方法 (1)式结构比较复杂，可以变更为（简单化）

$$ax+ay=xy. \tag{2}$$

为了把条件和结论变得更加接近，使它们统一起来（和谐化），有两条基本途径可供选择：

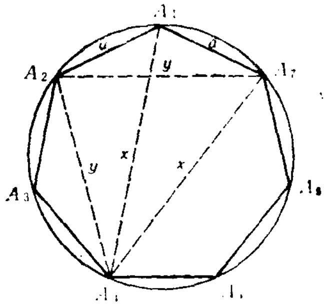

图 11—2

一是注意到正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 内接于圆（图11—2），$A_1A_2A_4A_7$ 是圆内接四边形，于是可把原题变更为：

设 $A_1A_2A_4A_7$ 为圆内接四边形，$A_1A_2=A_1A_7=a$，$A_1A_4=A_4A_7=x$，$A_2A_4=A_2A_7=y$，求证：

$$ax+ay=xy.$$

这样，利用托勒密定理容易得证，如证法一。

二是设正七边形的外接圆半径为R，则由正弦定理可知，$a=2R\sin\frac{\pi}{7}$，$x=2R\sin\frac{4\pi}{7}$，$y=2R\sin\frac{2\pi}{7}$。于是原题可变更为

求证：$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}$.

从而，可通过三角计算完成证明，如证法二。

证法一 边长为 a 的正七边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$必内接于圆，连结 A_2A_4，A_4A_7，A_1A_4，A_2A_7（图11—2），则 $A_1A_2=A_1A_7=a$，$A_1A_4=A_4A_7=x$，$A_2A_4=A_2A_7=y$。依托勒密定理，有

$$A_1A_2\cdot A_4A_7+A_1A_7\cdot A_2A_4=A_1A_4\cdot A_2A_7.$$